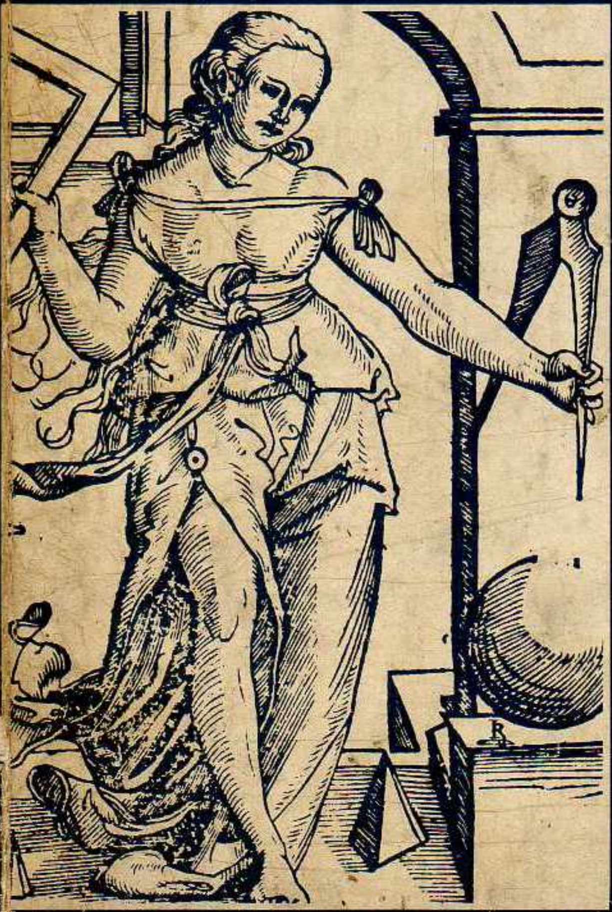
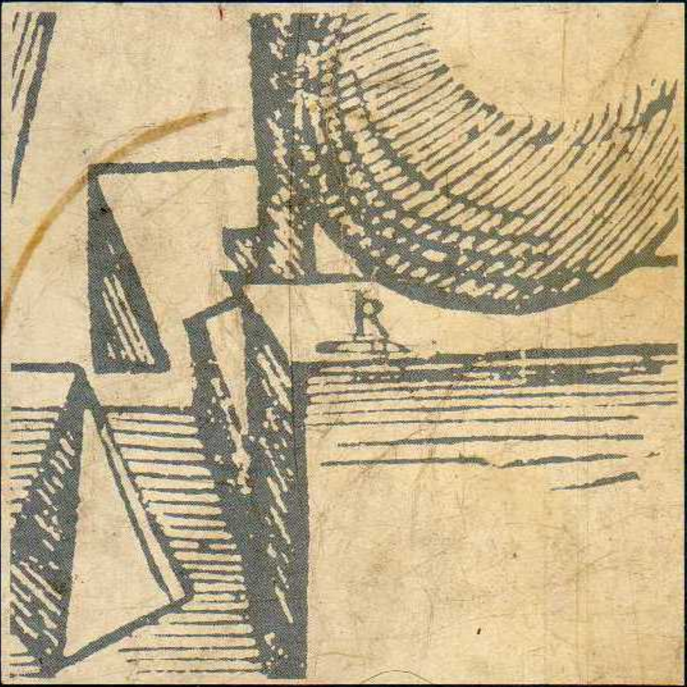
GEOMETRÍA

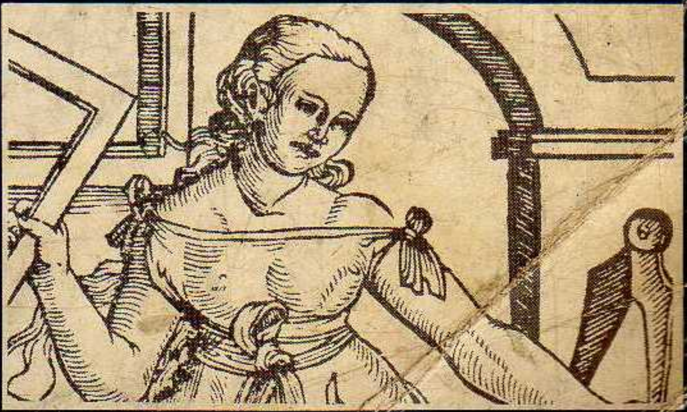
CURSO DE MATEMÁTICA ELEMENTAL

Tomo III y IV

[redacted]







ÍNDICE GENERAL

PRIMERA PARTE

PLANIMETRÍA

SEGUNDA PARTE

ESTEREOMETRÍA

TERCERA PARTE

GEOMETRÍA ANALÍTICA

PRIMERA PARTE

Luis Saavedra

PLANIMETRÍA

Euclides

Este insigne matemático griego se cree que vivió alrededor del año 300 antes de JC. Se le considera como el Padre de la Geometría.

Fue el fundador de la Escuela de Alejandría durante el reinado de Tolomeo I y en la cual se desarrolló sistemáticamente la Matemática.

En su genial obra *Los Elementos* expone en 13 libros la geometría que se conocía hasta esa época. Es curioso e importante señalar que este texto de Geometría se ha seguido usando con muy pocas variaciones durante más de 20 siglos.

1ª UNIDAD

Orígenes de la Geometría. Conceptos primarios. Punto. Línea. Espacio. Superficie. Plano y semiplano. Recta y semirrecta. Trazo o segmento. Rayo. Vertical y horizontal. Poligonal. Polígonos. Angulo.

---

1. ORIGENES

Etimológicamente la palabra GEOMETRIA significa »medida de la tierra«, ya que está formada por dos raíces griegas: geo = tierra y metrón = medida.

Históricamente su origen se remonta al Antiguo Egipto cuando las inundaciones periódicas del Nilo obligaban a reconstruir esas especies de parcelas o fundos de épocas remotas. Por lo tanto, podemos decir que lo que hoy se conoce como Geometría tuvo sus orígenes en Egipto unos tres mil años antes de Cristo y fue una *Geometría intuitiva*, ya que los hechos se aceptan sin demostración, son productos de la práctica, conocimientos que se fueron transmitiendo y aplicando tanto en la agrimensura como en la construcción de pirámides, tumbas y una serie de monumentos.

De Egipto pasaron estos conocimientos a los griegos que también le dieron, en un comienzo, un uso práctico a esta Ciencia. Existía una especie de agrimensores llamados »harpedonaptas«, palabra que significa »estiradores de la cuerda«. Su instrumento fundamental se componía de una cuerda en la cual existían cuatro nudos que dividían al cordel en longitudes correspondientes a 3 unidades = AB, 4 unidades = BC y 5 unidades = CD (Fig. 1). Con este primitivo instrumento geométrico se podían trazar ángulos rectos con lo cual se reemplazaba a la »escuadra« actual.

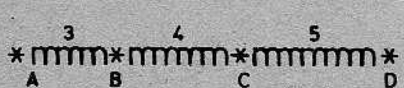


Fig. 1

Para esto clavaban una estaca en A y en B; juntaban D con A y al estirar la cuerda con otra estaca en C se formaba un ángulo recto en B. (Más adelante veremos que este conocimiento intuitivo no es más que el Teorema de Pitágoras.) (Fig. 2).

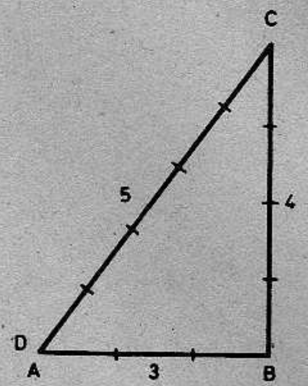


Fig. 2

Pero con los griegos ya se consigue un avance en esta Ciencia, pues con Thales de Mileto, unos 600 años antes de Cristo, nace la *Geometría demostrativa*, es decir, los hechos se aceptan si previamente son demostrados por medio de razonamientos y no por ser »recetas« que se aplican porque en la práctica y uso siempre resultan. Con Thales, y más que nada con Euclides, la demostración de los conocimientos matemáticos, en general, pasa a ser un elemento fundamental que —posteriormente— es la base de la Lógica, ya que se estudian y establecen las »leyes del razonamiento verdadero«.

Los antiguos griegos dieron gran importancia al desarrollo de esta Ciencia que, a menudo, se llama GEOMETRIA EUCLIDIANA, en homenaje a Euclides, el gran matemático griego que vivió, probablemente, hacia el año 280 a. de JC.

En su obra LOS ELEMENTOS expone en 13 libros los conocimientos geométricos hasta esa época y, salvo algunas pequeñas variaciones, son los mismos conocimientos geométricos que se siguen enseñando en los colegios secundarios actuales, a pesar de haber pasado más de 20 siglos.

La base de las demostraciones de la Geometría para Euclides son las definiciones, los axiomas y los postulados; con su ayuda demuestra una serie de teoremas que le servirán, posteriormente, para demostrar otros teoremas. Es decir, se parte de estas proposiciones no demostrables las que servirán de base para demostrar otras proposiciones siguiendo un desarrollo y un razonamiento deductivo. Con Platón (ateniense, 428 a 347 ó 348 a. de JC.) nace un movimiento científico-filosófico en su Academia en cuyo frontis se leía: »No entre aquí si no eres geómetra«.

Fue discípulo de Sócrates y maestro de Aristóteles; para él la Matemática debe estudiarse con el único objeto de saber más y no con una finalidad práctica o utilitaria. Para Platón las construcciones geométricas deben hacerse sin más instrumentos que la regla y el compás, incluso los antiguos problemas de la cuadratura del círculo, la trisección de cualquier ángulo y la duplicación del cubo.

Euclides (—330 a —227), Arquímedes de Siracusa (−287 a −212) y Apolonio de Pérgamo (¿ −260 a −200?) son los tres geómetras de la Antigua Grecia que cimentaron nuestra geometría que trataremos en seguida y que se basa en lo que históricamente se conoce como 5° POSTULADO DE EUCLIDES: »por un punto situado fuera de una recta se puede trazar sólo *una* paralela a ella«.

Existen otras »geometrías« que no aceptan este postulado euclidiano sino que aceptan otros principios y postulados que dan origen a las llamadas »geometrías no-euclidianas« o »hiperbólicas« como las creadas por Lobatschevsky (Nicolás Ivanovitch, ruso, 1793-1856), Juan Bolyai (húngaro, 1802-1860) y Bernardo Riemann (alemán, 1826-1866).

Pero nosotros en el desarrollo de este Libro estaremos plenamente de acuerdo con Euclides a pesar de haber transcurrido más de 23 siglos desde la época en que vivió este insigne matemático griego.

En la Historia de la Ciencia Matemática tienen vital y notable importancia los conocimientos de los hindúes y de los babilonios 2 mil a 3 mil años antes de Nuestra Era. De los babilonios hemos heredado hasta nuestros días el sistema sexagesimal, cuyo número básico es el 60. Una de las grandes ventajas de este sistema es el tener 60 diez divisores enteros: 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20 y 30. En cambio, 10 tiene sólo 2 divisores: 2 y 5. Como ejemplo del sistema sexagesimal está la medición en grados, minutos y segundos, como, asimismo, el cálculo horario en horas, minutos y segundos. Además, tanto los hindúes como los babilonios resolvían ecuaciones cuadráticas y otros conocimientos que fueron divulgándose de Babilonia, India, Arabia y Grecia hasta llegar a Occidente a través de siglos. Se cree que los griegos fueron muy buenos sistematizadores y compendiadores de la cultura desarrollada por pueblos que existían entre el Eufrates y el Tigris.

2. CONCEPTOS PRIMARIOS

Existen algunos conceptos primarios o fundamentales en Geometría que no se definen y que hemos adquirido en nuestras actividades diarias por intuición. Entre estos conocimientos básicos están el punto, la recta, el espacio y el plano.

Un *punto* es esto · o esto ∗; podemos decir que la punta de un alfiler es un punto, que una estrella es un punto en el Universo, que la intersección de dos »rayitas« determinan un punto, etc.

Los puntos los designaremos con letras mayúsculas. Así tendremos un punto A, un punto P, etc. Pero todos ellos son adimensionales, es decir, no tienen tamaño y, por lo tanto, no tienen ni largo, ni ancho ni alto. El punto sólo tiene *posición,* o sea, ubicación con respecto a »algo«.

Si se pide marcar un punto P en la pizarra o en el cuaderno, el problema tiene infinitas soluciones. Por esta razón y para evitar la indeterminación y fijar la posición de un punto se hace necesario indicar algunas condiciones.

Por ejemplo: A) marque en una hoja de su cuaderno un punto que esté a 3 cm del margen de la izquierda. ¿Cuántas soluciones existen? B) marque en su cuaderno un punto que esté a 2 cm del borde inferior. ¿Cuántas soluciones encontró? C) Marque en su cuaderno un punto que *simultáneamente* esté a 3 cm del margen izquierdo y a 2 cm del borde inferior. ¿Cuántos puntos reúnen estas dos condiciones al mismo tiempo? D) Marque en su cuaderno un punto que esté a 3 cm de otro punto fijo P dado. ¿Cuántos puntos encontró? E) Indique aproximadamente con la punta de un lápiz un punto que esté a 4 metros del pizarrón, a 3 metros de la pared de la ventana y a 1,5 metro del suelo.

Estos ejemplos y muchos más hacen ver que para fijar la posición de un punto debe darse un »sistema de referencia« respecto al cual se le debe ubicar, o bien, deben indicarse las condiciones necesarias y suficientes que eviten la ambigüedad de su ubicación o de su posición.

3. LINEA

Cuando un punto se traslada cambiando en cada instante su dirección se engendra una LINEA CURVA (Fig. 3) y si el punto se traslada sin cambiar de dirección se engendra una LINEA RECTA o simplemente una RECTA (Fig. 4). Una recta se designa generalmente con una L o R. LINEA MIXTA es la que está formada por partes rectas y otras curvas (Fig. 5).

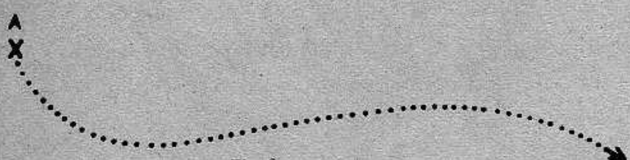


Fig. 3

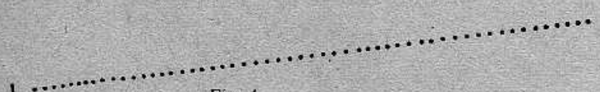


Fig. 4

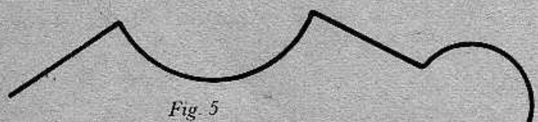


Fig. 5

4. ESPACIO = E

En general llamamos *espacio* a todo lo que nos rodea, donde nos desenvolvemos para efectuar nuestras actividades diarias, etc. Pero, en Geometría, ESPACIO es el conjunto Universo de esta Ciencia y en él podemos marcar los puntos, trazar líneas, dibujar superficies, construir y ubicar los cuerpos. Podemos decir que el espacio geométrico E es un conjunto no vacío cuyos elementos son puntos.

Siendo A y B dos puntos del espacio E, al unirlos puede trazarse por ellos *una sola recta L* (Fig. 6). Por lo tanto, bastan sólo dos puntos

Fig. 6

distintos para determinar o dibujar una recta. En términos conjuntistas podemos escribir:

$$\text{Si } A \wedge B \in E \ \exists !\, L \mid A \in L \wedge B \in L$$

En cambio, por un punto P del espacio pueden trazarse infinitas rectas que forman lo que se llama un »haz de rectas« (son rectas concurrentes). (Fig. 7).

$$L \cap L' \cap L'' \cap L''' \cap \ldots = \{P\}$$

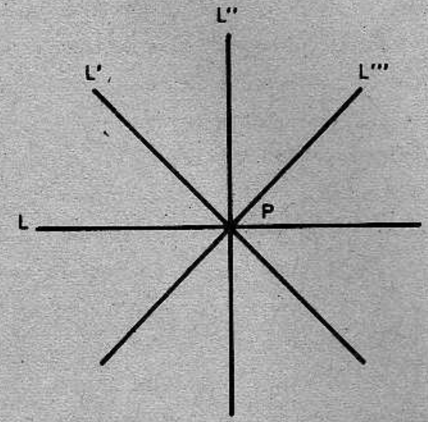


Fig. 7

5. SUPERFICIE

Podemos decir que »superficie« es el límite que separa a un cuerpo del espacio que lo rodea. Distinguiremos la superficie curva y la superficie plana o simplemente plano.

Cuando una recta L se traslada en torno a un punto fijo P del espacio apoyándose sobre una curva C se engendra lo que se llama una *superficie curva* (Fig. 8).

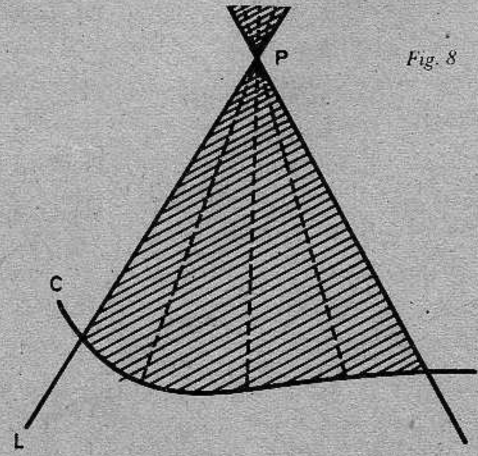


Fig. 8

En cambio, cuando una recta L gira en torno a un punto fijo P del espacio apoyándose sobre otra recta L' se engendra lo que se llama *superficie plana* o simplemente *plano*. Se denota por (P) (Fig. 9).

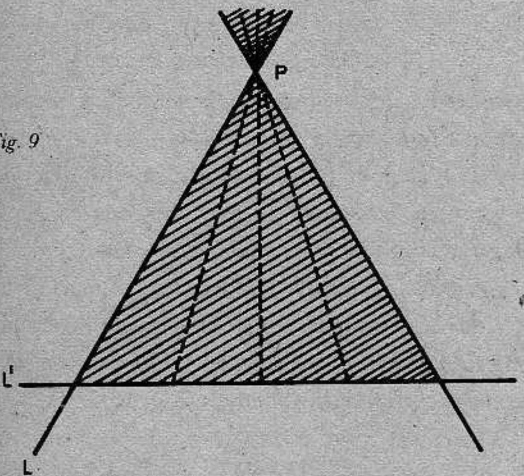


Fig. 9

La recta L que se traslada y engendra la superficie se llama *generatriz* y la curva C o recta L' sobre la cual se apoya se llama *directriz*.

Al considerar y unir dos puntos cualesquiera de una superficie se determina una recta. Si todos los puntos de esta recta pertenecen a la superficie, ésta es plana. No sucede esto en una superficie curva a excepción de las *generatrices* (recta que engendra la superficie curva).

Los carpinteros y otros »maestros« para comprobar si una superficie es plana colocan en distintas posiciones una regla de »canto« sobre la superficie a examinar y comprueban si la luz atraviesa o no la parte en contacto.

En una hoja de cuaderno o en el pizarrón se puede representar sólo una porción del plano pues éste es ilimitado, infinito.

Como en la práctica lo que más vemos comúnmente son porciones de planos rectangulares (una pared, una hoja de cuaderno, las tapas de un libro, las caras de una caja de fósforos, etc.), se elige al rectángulo para representar a un plano, pero que, visto en perspectiva, aparece como un paralelógramo. El plano se denota con dos letras mayúsculas M y N colocadas respectivamente en dos vértices opuestos, o bien, con una letra (P) (Fig. 10).

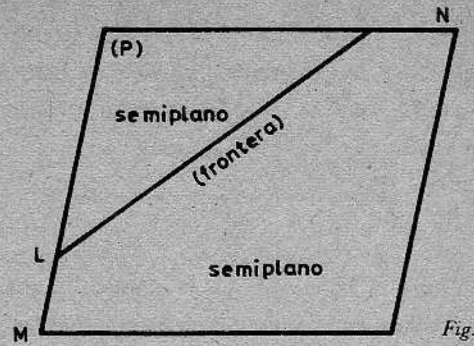


Fig. 10

Por lo tanto: plano (MN) = (P).

Semiplano: Una recta divide siempre a un plano en dos partes y cada una de estas partes constituye un *semiplano*. La recta hace las veces de »frontera« y no pertenece a ninguno de ellos (Fig. 10).

Observación: Los temas que trataremos a continuación serán desarrollados en el plano. Para mayor comprensión consideraremos como el plano a la hoja del cuaderno o al pizarrón y por esta razón no dibujaremos el plano (P), salvo cuando sea necesario hacerlo.

6. LA RECTA

Se considera formada por un conjunto infinito de puntos que se prolongan ilimitadamente en ambos sentidos.

Además de designarla con la letra L o R una recta también puede denotarse considerando dos puntos de ella, por ejemplo A y B, escribiéndose (Fig. 11):

$$\text{recta } L = \overleftrightarrow{AB} \Rightarrow A \in L \wedge B \in L$$

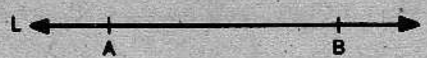


Fig. 11

Semirrecta: cuando se marca un punto P sobre una recta se obtiene una partición de ella compuesta de dos semirrectas y el punto P. El punto P no pertenece a ninguna de las dos semirrectas y hace las veces de frontera (Fig. 12).

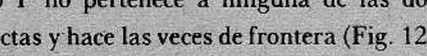


Fig. 12

Rayo: es la recta que parte de un punto. El punto del cual parte es el origen del rayo y pertenece al rayo (Fig. 13). Por lo tanto, semirecta y rayo son diferentes. Se designa por OA. Cuando al rayo se le asigna una dirección, un sentido y un tamaño fijo se le llama *vector.*

Fig. 13

Trazo o segmento: es la porción de recta comprendida entre dos puntos de ella. Se denota $\overline{AB}$ o simplemente con una letra minúscula colocada entre sus extremos. Por ejemplo: trazo $a = \overline{AB}$ (Fig. 14).

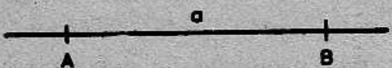


Fig. 14

Podemos decir, también, que el trazo $\overline{AB}$ es la figura geométrica formada por el conjunto de puntos comprendidos entre A y B, incluidos los extremos A y B.

La longitud de la distancia correspondiente entre A y B es la medida del trazo $\overline{AB}$. La medida del trazo $\overline{AB}$ se designa por $m\overline{AB}$, o más simplemente, por AB. Adoptaremos esta última notación.

Por lo tanto, AB es una longitud y está representada por un número positivo que es la medida del trazo $\overline{AB}$.

Luego: dos trazos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ serán iguales cuando tengan la misma medida, es decir: AB = CD.

Además podemos escribir que: AB = BA y CD = DC.

Resumiendo e insistiendo en los conceptos anteriores diremos que (Fig. 15): 1)-2)-3) 4)-5)).

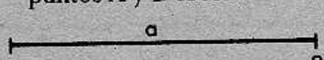
Fig. 15

1) 

La recta que pasa por A y B es $\overleftrightarrow{AB}$.

2) 

El trazo determinado por los puntos A y B es $\overline{AB}$.

3) 

La medida del trazo $\overline{AB}$ es AB = a (es un número positivo).

4) 

El rayo que parte de A (el origen) y que pasa por B es $\overrightarrow{AB}$; no tiene límites más allá de B.

5) 

El *vector* de origen A y extremo B es $\overrightarrow{AB}$; a diferencia del rayo, la longitud del vector es bien definida y corresponde a la distancia entre el origen A y el extremo B. Esta longitud se designa por $|\overrightarrow{AB}|$. Por lo tanto, un vector es un *trazo dirigido* con una longitud, dirección y sentido bien precisos.

Además, se pueden distinguir:

Vertical: es toda recta que sigue la dirección del »hilo a plomo«. (Recordemos que los cuerpos en el vacío caen verticalmente.) (Fig. 16 y 17).

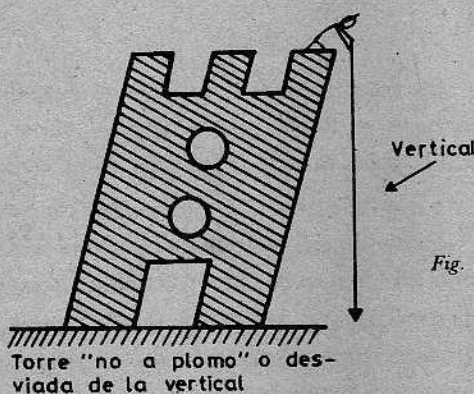


Fig. 16

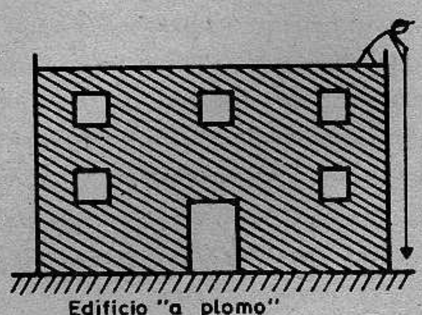


Fig. 17

Horizontal: es toda recta que sigue la dirección de las »aguas en reposo«. Por ejemplo, el agua contenida en un vaso, pero no el agua del mar o de un río (Fig. 18).

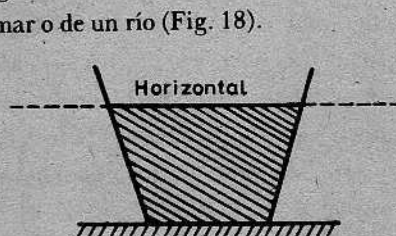


Fig. 18

Rectas coplanares: son las que pertenecen al mismo plano.

Rectas concurrentes: son las que se cortan entre sí y, por lo tanto, tienen sólo un punto común (Fig. 19).

$L \cap L' = \{A\}$

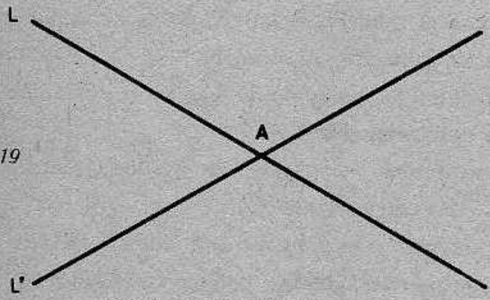


Fig. 19

Rectas concurrentes

Rectas paralelas: son rectas de un mismo plano que son equidistantes entre sí. Al prolongarlas su intersección es el conjunto vacío:

$L_1 \cap L_2 = \phi$; $L_1 // L_2$ (Fig. 20)

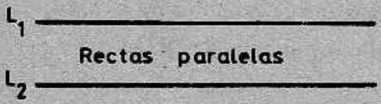


Fig. 20

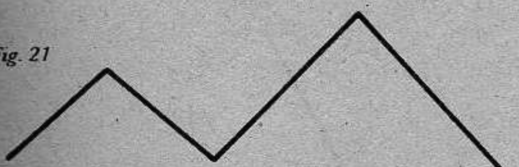
Por ejemplo: las líneas del ferrocarril, las líneas de un cuaderno de composición, etc.

Rectas cruzadas: son rectas que están en planos diferentes y que al prolongarlas no se cortan. Por ejemplo: una recta dibujada de norte a sur en el techo de la sala y otra de este a oeste en el suelo.

7. *POLÍGONAL*

Es una recta que se »quiebra« periódicamente. Por eso se la llama también línea »quebrada« o zigzag (Fig. 21).

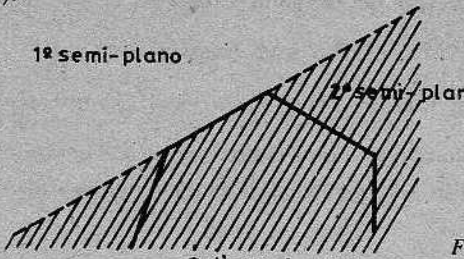
Fig. 21



Poligonal

Una poligonal puede ser convexa o cóncava.

Poligonal convexa: es aquella que al prolongar cualesquiera de sus segmentos, toda la poligonal pertenece al mismo semiplano (Fig. 22).

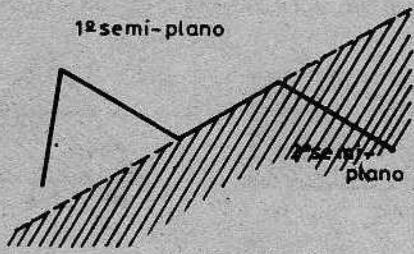


Poligonal convexa

Fig. 22

Poligonal cóncava o no convexa: es aquella que al prolongar cualesquiera de sus segmentos no toda la poligonal queda en el mismo semiplano (Fig. 23).

Fig. 23



Poligonal cóncava

8. *POLIGONO*

Es la figura geométrica en un plano formada por una poligonal cerrada (Fig. 24).

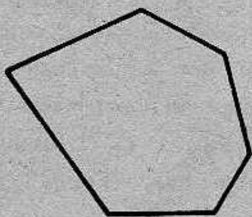


Fig. 24

Polígono

Cada segmento de esta poligonal es un *lado* del polígono y la intersección de dos segmentos vecinos o lados es un *vértice* de él.

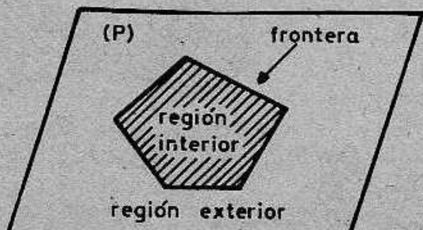


Fig. 25

El polígono efectúa una partición del plano en tres subconjuntos (Fig. 25): la región interior, la región exterior y la frontera que está formada por los lados del polígono. Entonces:

$\{\text{región interior}\} \cap \{\text{región exterior}\} = \phi$

$\{\text{región interior}\} \cup \{\text{región exterior}\} \cup \{\text{frontera}\} = (P)$

Dominio de un polígono: es la unión del conjunto »región interior« con el conjunto »frontera«:

Dom = región interior $\cup$ frontera

Este dominio puede ser convexo o cóncavo (no convexo) y de aquí que los polígonos pueden ser convexos o cóncavos.

Polígono convexo: es el formado por una poligonal cerrada y convexa (Figs. 26, 27, 28).

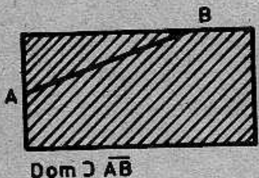


Fig. 26

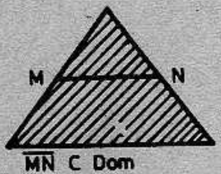


Fig. 27

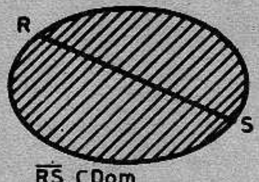


Fig. 28

En estos polígonos el segmento que se determina al unir dos puntos cualesquiera de su frontera pertenece enteramente al dominio.

Polígono cóncavo: es el formado por una poligonal cóncava cerrada (Figs. 29, 30, 31).

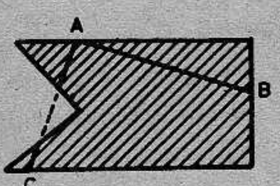


Fig. 29

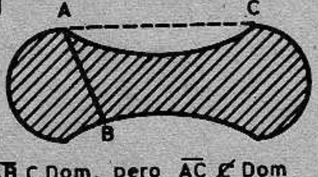


Fig. 30

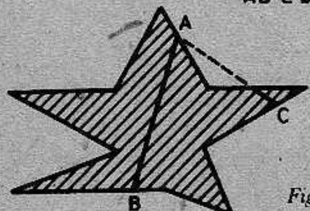


Fig. 31

En estos polígonos el segmento que se determina al unir dos puntos cualesquiera de su frontera no siempre es subconjunto del dominio. (Más adelante volveremos sobre estos polígonos.)

9. POLIGONOS ESPECIALES

Según el número de lados que tenga el polígono recibe un nombre especial:

triángulo = polígono de 3 lados (es la unión de tres segmentos).
cuadrilátero = polígono de 4 lados (es la unión de cuatro segmentos).
pentágono = es polígono de 5 lados
exágono o hexágono = polígono de 6 lados
eptágono o heptágono = polígono de 7 lados
octógono = polígono de 8 lados
nonágono o eneágono = polígono de 9 lados
decágono = polígono de 10 lados
endecágono = polígono de 11 lados
dodecágono = polígono de 12 lados
pentadecágono = polígono de 15 lados
icoságono = polígono de 20 lados

Los que no tienen un nombre especial se designan por el número de lados que poseen. Por ej., polígono de 28 lados.

10. ANGULO

Es la figura geométrica que forman dos rayos que parten de un mismo punto. El punto común es el *vértice* del ángulo y las semirrectas que lo forman son los *lados* de él.

Un ángulo se designa con tres letras mayúsculas dejando al medio la correspondiente al vértice. En la figura 32 el ángulo formado se denota:

$\measuredangle$ AOB, o bien, $\measuredangle$ BOA

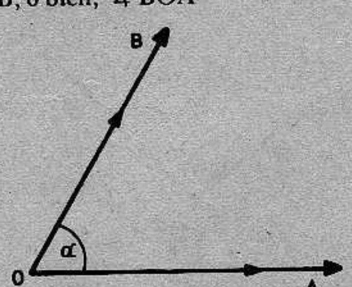


Fig. 32

La medida del ángulo AOB es un número real. Se indica por m $\measuredangle$ AOB o, más simplemente, por una letra griega o un número colocado entre sus lados.

Por ejemplo:

$m \measuredangle AOB = \alpha$

$m \measuredangle PQS = \measuredangle 1$

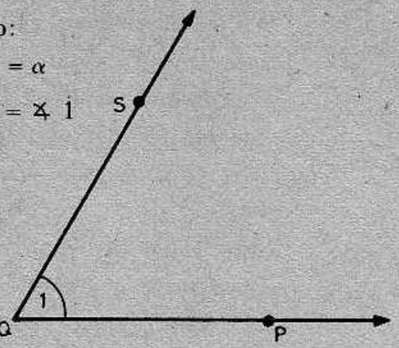


Fig. 33

La suma de los ángulos AOC y COB se indica (Fig. 34):

$m \measuredangle AOC + m \measuredangle COB = m \measuredangle AOB$

o más simplemente:

$\measuredangle AOB = \alpha + \beta$

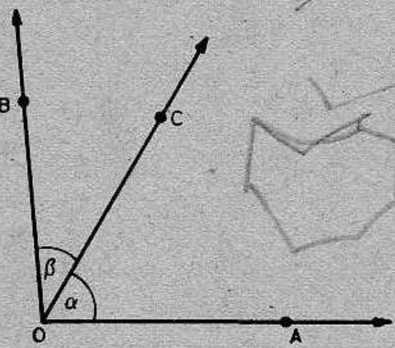


Fig. 34

Análogamente, la diferencia entre estos dos ángulos es: $\alpha - \beta$.

Aunque un ángulo no es un polígono efectúa, del mismo modo que éste, una partición en el plano (P): la región interior, la región exterior y la frontera. La frontera está constituida por el ángulo, es decir, por los infinitos puntos que están situados en los dos rayos que parten del origen común o vértice. Entonces (Fig. 35):

$$\text{semirrecta } \overline{OA} \cap \text{ semirrecta } \overline{OB} = \phi$$

$$\text{rayo } \overrightarrow{OA} \cap \text{ rayo } \overrightarrow{OB} = \{O\}$$

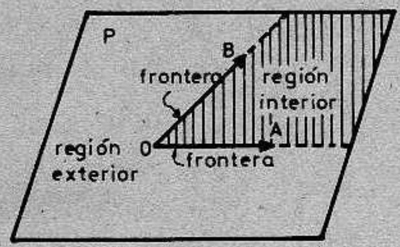


Fig. 35

11. TEST DE VERDADERO O FALSO

Coloque dentro de los paréntesis una V si el aserto es verdadero o una F si es falso.

Las preguntas 1 a 10 se refieren a la figura 1. (No aparecen vectores.)

Fig. 1

1. ( ) $\overline{AB} \subset \overline{AD}$
2. ( ) $\overline{AB} \cap \overline{AC} = \overline{AB}$
3. ( ) $\overline{AB} \cup \overline{AC} = \overline{BC}$
4. ( ) rayo $\overrightarrow{AB} \subset$ rayo $\overrightarrow{AD}$
5. ( ) $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = \overrightarrow{AD}$
6. ( ) $\overrightarrow{AC} \cap \overrightarrow{DA} = \overline{BC}$
7. ( ) $\overrightarrow{CB} \cap \overrightarrow{CD} = \phi$
8. ( ) $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{DC} = \overline{BC}$
9. ( ) $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{DC} = \overline{AD}$
10. ( ) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$
11. ( ) En la Fig. 2: $\measuredangle BOA > \measuredangle COD$

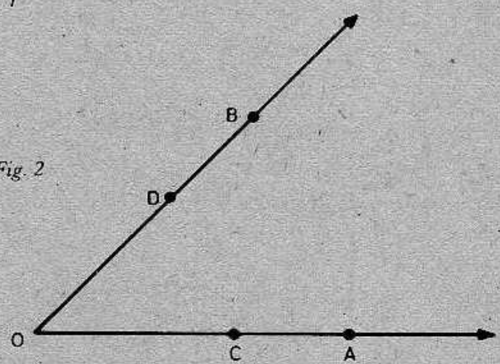


Fig. 2

12. ( ) En la Fig. 2: $\measuredangle AOB \cong \measuredangle COD$
13. ( ) Un ángulo es la unión de dos rayos no colineales que tienen el mismo origen.
14. ( ) Angulos congruentes son los que tienen la misma medida.

15. ( ) Si los lados exteriores de dos ángulos que tienen un lado común son rayos opuestos, los ángulos son suplementarios.

16. ( ) La región interior de un ángulo es la intersección de los dos semiplanos que determinan sus lados.

17. ( ) Un triángulo es la unión de tres segmentos determinados por tres puntos no colineales.

18. ( ) Todo plano es un conjunto convexo, pues al unir dos puntos cualesquiera de él se obtiene siempre una recta que pertenece enteramente al plano.

19. ( ) Toda recta de un plano lo divide en dos semiplanos constituyendo cada uno de ellos, por separado, un conjunto convexo.

20. ( ) Todo plano divide al espacio en dos semiespacios que constituyen cada uno de ellos, un conjunto convexo.

12. CIRCUNFERENCIA Y CIRCULO

Definición: »La circunferencia es una línea curva cerrada que pertenece a un plano y cuyos puntos tienen la propiedad de equidistar de un punto que se llama centro«.

En cambio, *círculo* es la superficie plana limitada por la circunferencia.

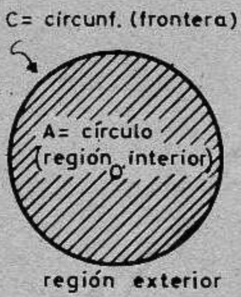


Fig. 1

También se produce en este caso una partición del plano en tres subconjuntos (Fig. 1): la región exterior, la región interior que es el círculo y la frontera que está constituida por la circunferencia. Por lo tanto, debemos insistir que no es lo mismo circunferencia, que es una línea, y círculo que es una superficie.

En este caso el dominio es convexo y está formado por la unión de la circunferencia y el círculo. Designando por C = circunferencia y por A = círculo, se tiene:

a) Dom $= \{C\} \cup \{A\}$

b) Si O = centro, $O \in A \wedge O \notin C$

13. ELEMENTOS PRINCIPALES (Figs. 2 y 3)

En símbolos la circunferencia se indica $\odot$.

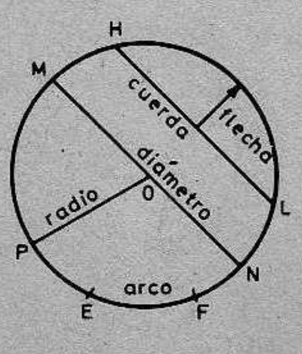


Fig. 2

Radio: es el segmento que une el centro del círculo con un punto de la circunferencia. Corresponde a la distancia constante a que están todos los puntos de la circunferencia del centro. Se designa por »r«.

Para indicar simbólicamente que se ha dibujado una circunferencia de centro O y radio »r« se escribe: $\odot$ (O, r) ó $\odot$ (O, $\overline{OP}$).

Arco: es una parte de la circunferencia comprendida entre dos puntos de ella. En nuestro dibujo se indica $\widehat{EF}$. Por lo tanto:

$$\widehat{EF} \subset \odot (O, r)$$

Cuerda: es el segmento que se determina al unir dos puntos de la circunferencia. En nuestro ejemplo, HL es una cuerda.

Flecha o sagita: es el segmento comprendido entre el punto medio de una cuerda y el punto medio del arco comprendido menor. (Es perpendicular en el punto medio de la cuerda y su prolongación pasa por el centro del círculo.)

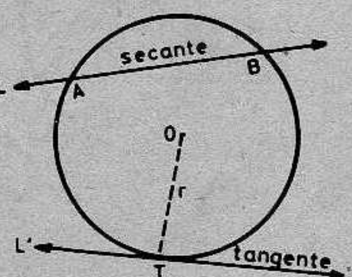


Fig. 3

Diámetro: es la cuerda mayor. Por lo tanto, es la cuerda que pasa por el centro y equivale, en longitud, al doble del radio. Se le designa por »d«. Luego: d = 2r.

Secante: es la recta que pasa por dos puntos de la circunferencia (la corta en dos puntos). En nuestro ejemplo, la secante es L = $\overleftrightarrow{AB}$.

Tangente: es la recta que »toca« a la circunferencia en un único punto. En nuestro ejemplo, la tangente es la recta L' y el »*punto de tangencia*« es T, que es el único punto común de la tangente con la circunferencia.

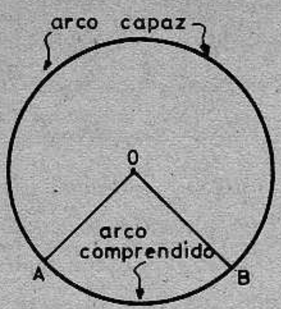


Fig. 4

El »*radio de contacto*« es el que une el centro con el punto de tangencia y es perpendicular a la tangente. (Figs. 3 y 5).

Angulo del centro: es el ángulo formado por dos radios. Por ejemplo, el ∡ AOB (Figs. 4 y 5).

Angulo inscrito: es el ángulo formado por dos cuerdas que parten de un mismo punto de la circunferencia. Por ejemplo el ángulo ACB (Fig. 5).

Angulo semiinscrito: es el ángulo formado por una cuerda y el rayo tangente en uno de sus extremos. En nuestro ejemplo es el ∡ BAT o el ∡ BAT' (Fig. 5).

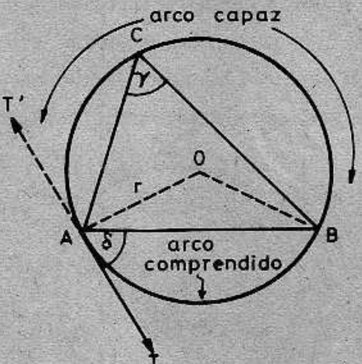


Fig. 5

Arco comprendido por un ángulo: es el arco que queda entre los lados del ángulo del centro o inscrito o semiinscrito. Este arco se suele llamar también »arco subtendido«, que en nuestro ejemplo es el arco $\widehat{AB}$ tanto para el ángulo inscrito ACB como para el semiinscrito TAB y para el ángulo del centro AOB. En cambio, para el ángulo semiinscrito T'AB es el arco ACB (Fig. 5).

Arco capaz: es el arco que queda de la circunferencia descontado el arco comprendido por el ángulo. Por ej.: para el ángulo inscrito ACB el arco capaz es el arco $\widehat{ACB}$; lo es también para el ángulo semiinscrito TAB (Fig. 5).

Arcos supletorios: son los que sumados dan la circunferencia completa. Así, el arco comprendido y el arco capaz de un ángulo son arcos supletorios.

Sector circular: es la parte del círculo comprendida entre dos radios y el arco comprendido por ellos (Fig. 6).

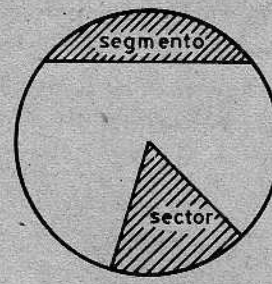


Fig. 6

Segmento circular: es la parte del círculo comprendida entre una cuerda y el arco que comprende (Fig. 6).

Semicircunferencia: es el arco equivalente a la mitad de la circunferencia (Fig. 7).

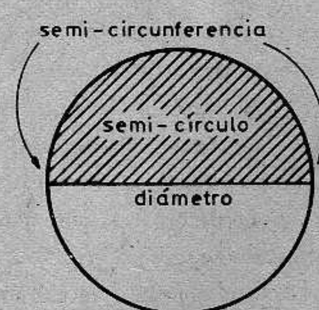


Fig. 7

Semicírculo: es la mitad del círculo y, por lo tanto, la parte del círculo comprendida entre un diámetro y la semicircunferencia correspondiente (Fig. 7).

Corona circular o *anillo circular:* es la parte del círculo comprendida entre dos círculos concéntricos (Fig. 8).

corona = círculo (O, R) − círculo (O, r)

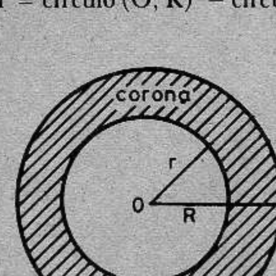


Fig. 8

14. TANGENTE Y NORMAL A UNA CURVA

Sea L una secante que pasa por los puntos P y A de una curva C. Al hacer girar esta secante en torno al punto P tomará las posiciones PA', PA" ..., observándose que los puntos A y P tienden a confundirse en uno solo. Cuando A coincide con P la secante $\overleftrightarrow{PA}$ se transforma en la tangente $\overleftrightarrow{PT}$ a la curva en el punto P de ella. De acuerdo con lo anterior podemos decir que la *tangente* en un punto P de una curva es el límite a que tiende una secante que pasa por él cuando al girar en torno a este punto los dos puntos de intersección de la secante con la curva coinciden en P (Fig. 9).

Normal en un punto de una curva es la perpendicular a la tangente en ese punto de la curva. En la figura 9, la normal es la perpendicular $\overleftrightarrow{PN}$ a la tangente $\overleftrightarrow{PT}$.

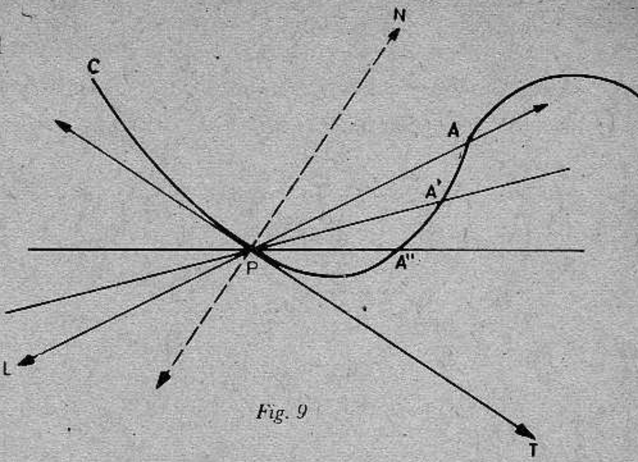
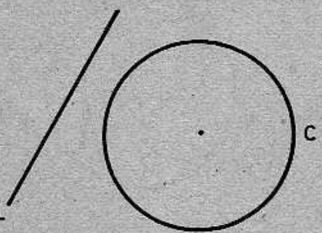


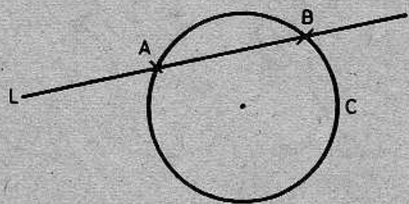
Fig. 9

15. EJERCICIOS

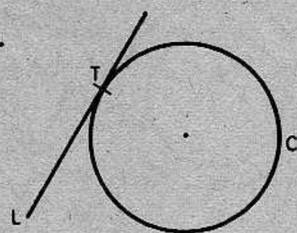
1. Designando por C una circunferencia y por L una recta, completar las siguientes igualdades correspondientes a cada figura:



$L \cap C = \ldots$

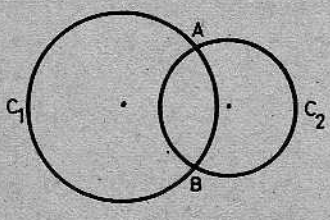


$L \cap C = \ldots$

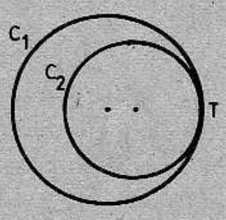


$L \cap C = \ldots$

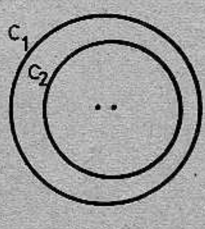
2. Se tienen dos circunferencias C_1 y C_2. Completar las igualdades siguientes que corresponden a cada figura:



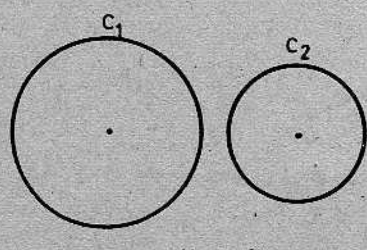
$C_1 \cap C_2 = \ldots$



$C_1 \cap C_2 = \ldots$

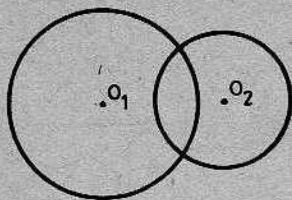


$C_1 \cap C_2 = \ldots$

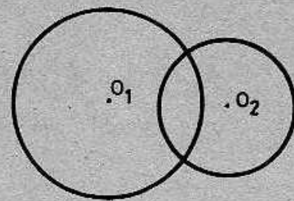


$C_1 \cap C_2 = \ldots$

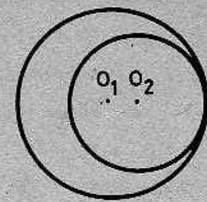
3. Se tienen dos círculos $O_1 \wedge O_2$. Entonces, en las figuras siguientes "sombree" lo que se pide en cada una de ellas:



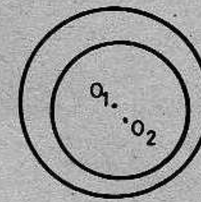
$O_1 \cap O_2$



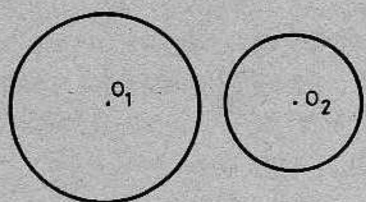
$O_1 \cup O_2$



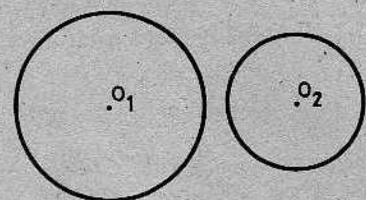
$O_1 \cap O_2$



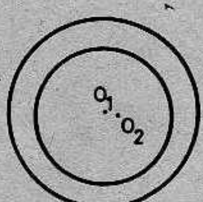
$O_1 \cup O_2$



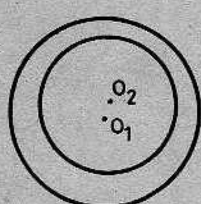
$O_1 \cap O_2$



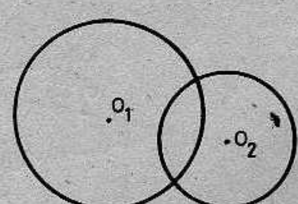
$O_1 \cup O_2$



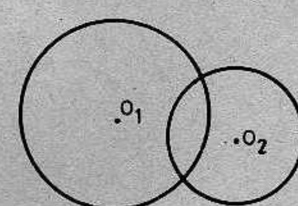
$O_1 \cap (O_2)'$



$(O_1)' \cap O_2$



$O_1 - O_2$



$O_2 - O_1$

Medida de los ángulos. Sistema absoluto, sexagesimal y centesimal. Transportador. Clasificación de los ángulos. Angulos complementarios y suplementarios. Angulos adyacentes. Angulo recto. Rectas perpendiculares.

16. MEDIDA DE LOS ANGULOS

Sabemos que »*medir una magnitud* es compararla con otra magnitud de la misma especie que se elige como *unidad de medida*«. Por lo tanto, para medir un ángulo se debe elegir otro ángulo que se elige como unidad.

Existen para este objeto varios caminos o sistemas para la medición de ángulos.

A) *Sistema circular o absoluto*

Se puede elegir como »ángulo unitario« al ángulo del centro que comprenda entre sus lados un arco de la misma longitud que el radio de la circunferencia. El ángulo que cumple con esta condición se llama *un radián,* que lo abreviaremos *1 rad* (Fig. 1).

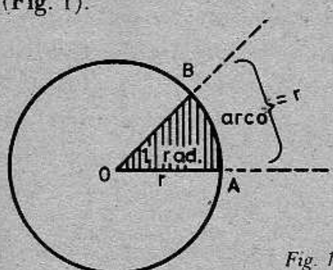


Fig. 1

Por lo tanto, para medir un ángulo en radianes basta calcular las veces que el radio cabe en el arco de la circunferencia cuyo centro coincide con el vértice. De este modo obtenemos (Fig. 2):

$$\measuredangle AOB = \frac{a}{r} \text{ (rad)}$$

La medida de un ángulo la expresaremos con una letra griega colocada entre sus lados.

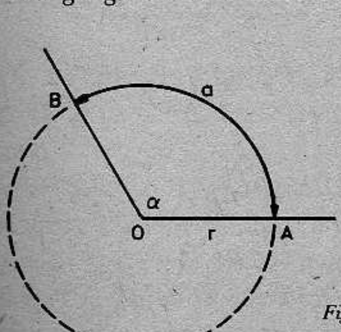


Fig. 2

Entonces, la medida del $\measuredangle$ AOB en radianes es:

$$\alpha = \frac{\text{arco}}{\text{radio}} \Longrightarrow \boxed{\alpha = \frac{a}{r} \text{ (radianes)}}$$

17. EJERCICIOS

1) En una circunferencia de 50 cm de radio se considera un arco de 75 cm. ¿Cuántos radianes mide el ángulo del centro respectivo?

Solución: Datos: r = 50 cm; a = 75 cm.
Incógnita: α = x (rad)

$$\alpha = \frac{a}{r} = \frac{75 \cancel{cm}}{50 \cancel{cm}} = 1{,}5 \text{ (rad)}$$

Obs.: Este ejercicio hace ver que el radián es adimensional, es un número abstracto (sin especie).

2) En una pista circular de 40 m de radio se marca un ángulo del centro de 2,45 radianes. ¿Cuántos metros de pista mide el arco comprendido?

Solución: Datos: r = 40 m; α = 2,45 rad.
Incógnita: a = x (m)
a = $\alpha \cdot$ r = 2,45 (rad) · 40 (m) = 98 m.

3) ¿Cuánto mide el radio de una circunferencia si a un ángulo del centro de 1,25 (rad) le corresponde un arco de 50 cm?

Solución: $r = \frac{a}{\alpha} = \frac{50 \text{ cm}}{1{,}25} = 40 \text{ cm}$

B) *Sistema sexagesimal*

Es el más antiguo y conocido.

En una circunferencia se trazan dos diámetros de modo que el círculo quede dividido en cuatro partes iguales (cada una se llama *cuadrante*). Por lo tanto, resulta la circunferencia

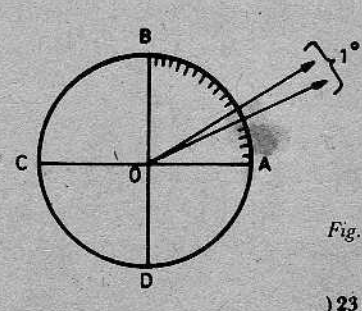


Fig. 3

dividida en cuatro partes iguales. Luego (Fig. 3):

$$\text{arco } \widehat{AB} = \text{arco } \widehat{BC} = \text{arco } \widehat{CD} = \text{arco } \widehat{DA}$$

Entonces, los cuatro ángulos del centro son también iguales, miden lo mismo:

$$\measuredangle\, AOB = \measuredangle\, BOC = \measuredangle\, COD = \measuredangle\, DOA$$

Cuando se cumple esta igualdad se dice que cada uno de estos ángulos es *un ángulo recto.*

Cuando dos rectas se cortan formando un ángulo recto se dice que son *perpendiculares.* Por lo tanto, los dos diámetros $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son perpendiculares (Fig. 3).

Si el arco correspondiente a un ángulo recto se divide en 90 partes iguales y se unen los puntos de división con el centro del círculo, se obtienen 90 ángulos iguales y cada uno de ellos se llama »ángulo de un grado sexagesimal« ó simplemente »ángulo de un grado«. Entonces: »un grado sexagesimal es el ángulo que le corresponde un arco entre sus lados igual a la 90 ava parte del arco correspondiente al ángulo recto«. O bien, comparado con toda la circunferencia se le puede definir como »el ángulo cuyo arco corresponde a la 360 ava de la circunferencia respectiva«.

A veces en ciertas ciencias y técnicas como la Astronomía, Geodesia, Topografía, etc., es necesario medir ángulos menores que un grado. Para esto se usan los submúltiplos del grado llamados »minuto« y »segundo« angulares. Así, cada grado se divide en 60 partes iguales llamadas »minutos sexagesimales«; a su vez, cada minuto se divide en 60 partes iguales llamadas »segundos sexagesimales«. Se abrevian:

1 minuto sexagesimal $= 1'$

1 segundo sexagesimal $= 1''$

Resumiendo tenemos las siguientes equivalencias:

$$1 \measuredangle \text{ recto} = 90^\circ$$
$$1^\circ = 60' = 3600''$$
$$1' = 60''$$

C) *Sistema centesimal*

Los franceses trataron también de introducir el sistema decimal en la medición de ángulos, pero en este sentido no es mucho lo que se ha progresado. Es el sistema sexagesimal el más tradicional por su antigüedad ya que era conocido por los antiguos egipcios y babilonios. En Física, en cambio, es de gran utilidad expresar los ángulos en radianes. Por ejemplo, la velocidad angular se expresa en radianes/seg.

En el Sistema Centesimal el ángulo recto se divide en 100 partes iguales y, por consiguiente, »un grado centesimal es el ángulo equivalente a un centésimo de un ángulo recto«. Se abrevia el grado centesimal con la letra »g« colocada como exponente. Así, por ejemplo, 28 grados centesimales $= 28^g$.

A su vez, el grado centesimal se divide en 100 minutos centesimales (cg) y cada minuto centesimal en 100 segundos centesimales (ccg). Por consiguiente:

$$1 \measuredangle \text{ recto} = 100^g$$
$$1^g = 100^{cg} = 10000^{ccg}$$
$$1^{cg} = 100^{ccg}$$

Obs.: Más adelante demostraremos que un ángulo recto mide aproximadamente 1,57 radianes. Entonces:

$$1 \measuredangle \text{ recto} = 90^\circ = 100^g = 1{,}57 \text{ radianes}$$

18. EJERCICIOS

1) Escribir 28 grados centesimales 12 minutos centesimales 62 segundos centesimales en una sola expresión numérica.
2) Idem. 21 grados centesimales 2 minutos centesimales 69 segundos centesimales.
3) Idem. 4 minutos centesimales 8 segundos centesimales.
4) Expresar en grados, minutos y segundos centesimales $15^g,106$.
5) Idem $204^g,078$.
6) Expresar 72 grados sexagesimales en radianes.

Resp.: 1) $28^g,1262$; 2) $21^g,0269$; 3) $0^g,0408$; 4) $15^g 10^{cg} 60^{ccg}$; 5) $204^g 7^{cg} 80^{ccg}$; 6) 1,256 rad.

19. MEDIDORES DE ANGULOS

Los aparatos que sirven para medir ángulos se llaman *goniómetros* (del griego: gonia = ángulo, metron = medida). El *teodolito* también se usa para medir ángulos. Ambos instrumentos son de uso corriente en Ingeniería y Topografía para el levantamiento de planos como, asimismo, por los astrónomos para medir la altura de un astro, etcétera.

Pero nosotros para medir ángulos no usaremos aparatos tan complicados, precisos y costosos como los anteriores sino que recurriremos al *transportador*. Este instrumento consiste en un semicírculo de metal, madera o plástico graduado en grados desde 0° hasta 180°. (También hay modelos circulares que abarcan desde 0° hasta 360°; como asimismo los hay graduados en grados centesimales desde 0^g hasta 400^g.)

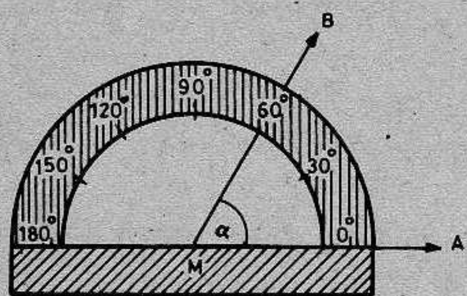


Fig. 4

Para medir un ángulo con este sencillo aparato se hacen coincidir el punto medio M del diámetro del transportador con el vértice del ángulo a medir y el lado $\overline{MA}$ del ángulo con la dirección $\overline{M0^\circ}$. Finalmente, basta leer con qué número de la escala coincide el otro lado $\overline{MB}$ del ángulo. (En el dibujo: $\alpha = 60°$.)

20. EJERCICIOS

1) Mida el ángulo α (Fig. 5).
2) Mida el ángulo β (Fig. 5).

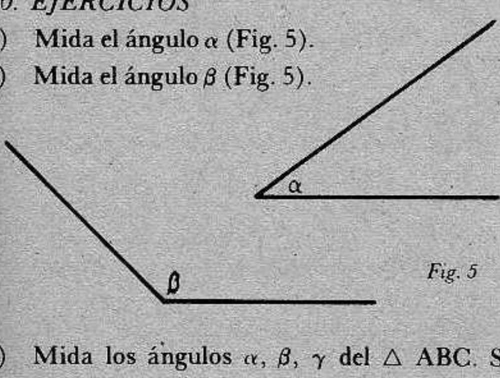


Fig. 5

3) Mida los ángulos α, β, γ del $\triangle$ ABC. Súmelos (Fig. 6).

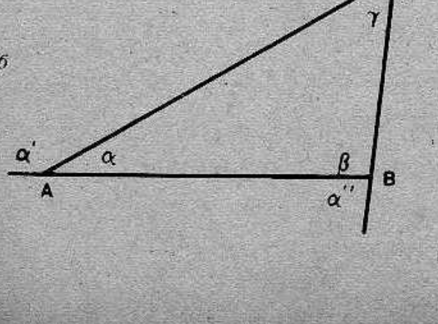


Fig. 6

4) Mida los ángulos α, β, γ, δ del cuadrilátero ABCD. Súmelos (Fig. 7).

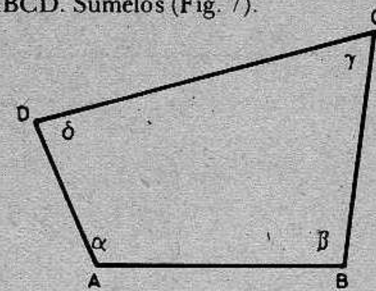


Fig. 7

5) En el $\triangle$ABC medir los ángulos exteriores α' (se lee: »alfa prima«), α'' (se lee: »alfa segunda«) y α''' (se lee: »alfa tercera«) (Fig. 6). En seguida, determine la suma $\alpha' + \alpha'' + \alpha'''$ de ellos.
6) Con la ayuda de un transportador dibujar un ángulo de 72°.
7) Con la ayuda de un transportador dibujar un ángulo que mida 148°.
8) Dibujar un triángulo en el cual uno de sus ángulos mida 20° y otro 110°. Una vez construido el triángulo determine la medida del tercer ángulo.
9) Sin usar el transportador ni ningún instrumento goniométrico, dibujar »a ojo« en el cuaderno o en el pizarrón un ángulo de 30°, de 45°, de 100° y de 150°. Después comprobar su medida con el transportador.

21. CLASIFICACION DE LOS ANGULOS

Atendiendo a la medida de los ángulos éstos reciben distintos nombres:

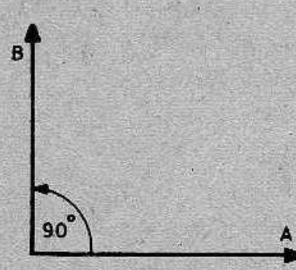
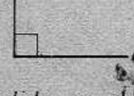


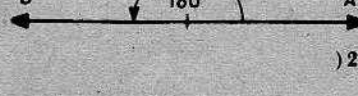
Fig. 8

a) *Angulo recto* (Fig. 8): es el que mide 90°. Es común en los dibujos indicar un ángulo recto del modo siguiente:



b) *Angulo extendido:* es el que mide 180° (Fig. 9).

Fig. 9



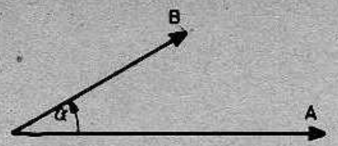


Fig. 10

c) *Angulo agudo:* es el que mide entre 0° y 90° (Fig. 10).

Ejemplo: $0° < \alpha < 90°$

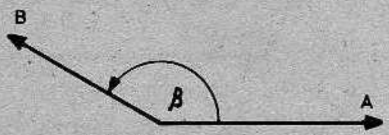


Fig. 11

d) *Angulo obtuso:* es el que mide más de 90° y menos de 180° (Fig. 11).

Ejemplo: $90° < \beta < 180°$

e) *Angulo cóncavo:* es el que mide menos de 180°.

Por lo tanto, el ángulo agudo, el recto y el obtuso son ángulos cóncavos (Figs. 8, 10 y 11).

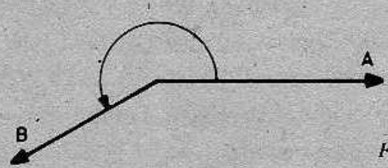


Fig. 12

f) *Angulo convexo*:* es el que mide más de 180° y menos de 360° (Fig. 12).

Ejemplo: $180° < \gamma < 360°$

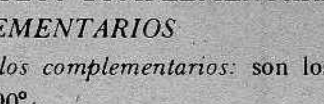


Fig. 13

g) *Angulo completo:* es el que mide 360° (Fig. 13).

22. ANGULOS COMPLEMENTARIOS Y SUPLEMENTARIOS

1) *Angulos complementarios:* son los que suman 90°:
   Por ejemplo:
   un ∡ de 30° con uno de 60°; 40° con 20° y 30°;
   un ∡ de 75° con uno de 15°; etc.
2) *Complemento de un ángulo:* es lo que le falta a un ángulo para completar 90°. Por ejemplo:
   El complemento de 20° es 70°;
   el complemento de 70° es 20°;
   si $\alpha < 90°$ el complemento de α es $90° - \alpha$;
   etcétera.
3) *Angulos suplementarios:* son los que suman 180°. Por ejemplo:
   un ángulo de 60° con uno de 120°; 50° con 100° y 30°;
   un ángulo de 179° con uno de 1°;
   un ángulo de x° con uno de 180° − x°; etc.
4) *Suplemento de un ángulo:* es lo que le falta para completar 180°. Ejemplo:
   el suplemento de 150° es 30°;
   el suplemento de 10° es 170°;
   el suplemento de α es $180° - \alpha$; etc.

*El nombre de ángulos *cóncavos* o *convexos* se refiere al número asociado con la medida del ángulo y no al dominio de su región interior o exterior.

23. EJERCICIOS

1) Calcular el complemento del ángulo que mide 62°28'.

   Solución: basta efectuar la diferencia:

   90° − (62°28'). Luego:

$$-\left\{\begin{array}{l}90°\\62°28'\end{array}\right. \Longrightarrow -\left\{\begin{array}{l}89°60'\\62°28'\end{array}\right.$$

   luego: 27°32'

2) ¿Cuál es el suplemento del ángulo de 75°48'36"?

   Solución:
$$-\left\{\begin{array}{r}179°59'60''\\75°48'36''\end{array}\right.$$
   luego: 104°11'24"

3) Calcular el complemento y el suplemento de 57°17'44".

   Resp.: compl. = 32°42'16"
   supl. = 122°42'16"

4) ¿Cuál es el complemento del suplemento de 145°25'?

   Resp.: 55°25'

5) ¿Cuál es el suplemento del complemento de de 50°20'?

   Resp.: 140°20'

6) Si $\alpha < 90°$, ¿cuál es el suplemento del complemento de α?

   Resp.: $90° + \alpha$

24. ANGULOS ADYACENTES

Si se pide dibujar dos ángulos que tengan un lado común pueden darse varios casos como los indicados en A, B, C o D. Pero, si se agrega la condición de que, además, los otros dos lados estén sobre una misma recta será sólo el caso D el que cumple con las dos condiciones. Es este caso el que nos interesa y el que estudiaremos ahora.

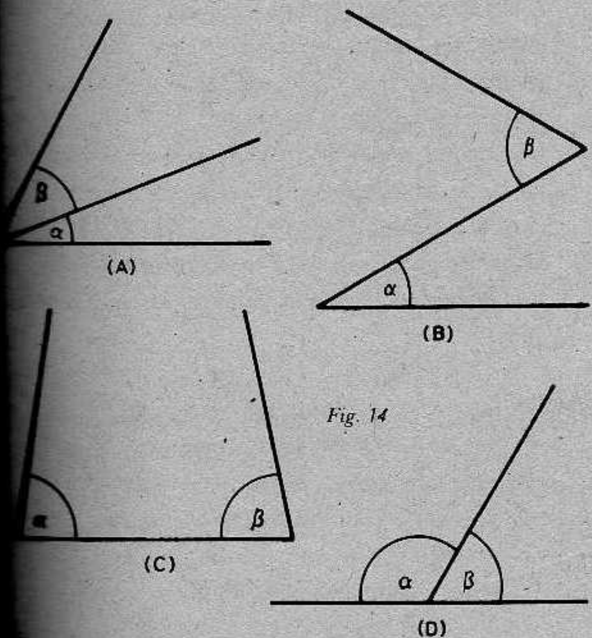


Fig. 14

Definición: »Angulos adyacentes son dos ángulos que tienen un lado común y los otros dos están sobre una misma recta«. (También, se dice que los ángulos adyacentes forman un »par lineal«.)

Tienen la propiedad de ser suplementarios. (Por esta propiedad a estos ángulos se les llama también »ángulos adyacentes suplementarios«.)

Entonces:

$$\boxed{\alpha + \beta = 180^\circ} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 180^\circ - \beta \\ \beta = 180^\circ - \alpha \end{cases}$$

Por lo tanto, en este caso cada ángulo es el suplemento del otro, es decir, α es el suplemento de β y recíprocamente.

25. ANGULO RECTO. RECTAS PERPENDICULARES

En los tres casos A, B y C, los ángulos α y β son ángulos adyacentes. En A se tiene $\alpha > \beta$,

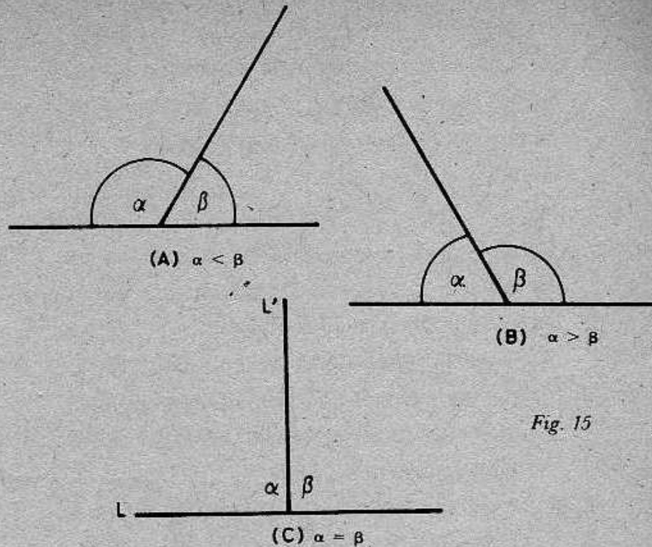


Fig. 15

en B es $\alpha < \beta$ y en C'los dos ángulos son iguales, o sea, el $\measuredangle\ \alpha$ es igual a su adyacente β.

Anteriormente, ya hemos dicho cuándo un ángulo es recto. Ahora podemos decir también que: »ángulo recto es el ángulo que es igual a su adyacente«.

Cuando dos rectas se cortan en ángulo recto decimos que las rectas son *perpendiculares*. El signo $\perp$ significa »perpendicular a«. Por lo tanto, para indicar que las rectas L y L' son perpendiculares, se escribe: L $\perp$ L' (Fig. 15-C).

Si las rectas se cortan en un ángulo distinto a 90°, se dice que son *oblicuas*.

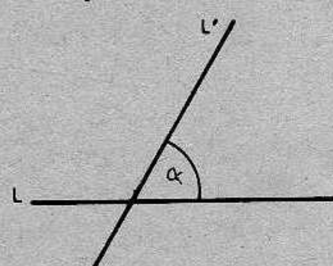


Fig. 16

En el dibujo L y L' son oblicuas, pues $\alpha \neq 90^\circ$ (Fig. 16).

26. EJERCICIOS

1) En la figura 1 las rectas L y L' son perpendiculares; del punto de intersección de ellas sale el rayo L''. Entonces, la medida del ángulo x es:

A) $90^\circ - \alpha$
B) 45°
C) $180^\circ - 2\alpha$
D) α
E) otro valor.

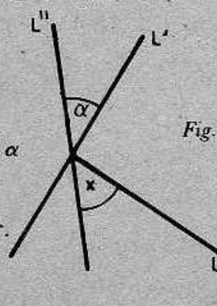


Fig. 1

2) Si una semicircunferencia se divide en 12 partes iguales y los puntos obtenidos se unen con el centro, cada ángulo del centro mide:

A) 30° B) 20°
C) 15° D) 12°
E) 18°

3) Marque la proposición correcta:

A) »ser perpendicular a« es una relación de equivalencia.

B) »ser $\measuredangle\ \alpha$ mayor que $\measuredangle\ \beta$« es una relación de orden.

C) »ser paralela a« es una relación de equivalencia.

D) »ser enemigo de« es una relación de orden.

E) »ser hijo de« es una relación de equivalencia.

4) Cuando son las 12 M. en Greenwich (Londres), ¿qué hora es en Combarbalá (Chile) si su longitud es 71° oeste?

Solución: Se sabe que 1 día = 1.440 min que corresponde a 360°. Luego, entre grado y grado existe una diferencia de 1.440: 360 = 4 min.

Por lo tanto, a 71° le corresponden
4 min. 71 = 284 min = 4h 44 min.

Entonces, cuando en Londres es medio día en Combarbalá son las 7 h 16 min.

5) Un radioaficionado de Hanga Roa (isla de Pascua) desea conocer la latitud de este lugar. Para esto sintoniza la BBC de Londres y encuentra que cuando el Bing Ben está dando las campanadas del medio día en Londres en Hanga Roa son las 4 h 45 min. ¿Cuál es la latitud de este lugar?

6) Un ángulo mide 78°45'. Determinar el valor de su complemento y de su suplemento en grados centesimales y en radianes.

7) Si dos ángulos son a la vez suplementarios y congruentes, ¿cuánto mide cada uno de ellos?

Resp.: 1) A; 2) C; 3) C; 5) (=) 109° latitud oeste; 6) compl. = $12^g 50^{cg}$ = 0,1963 rad; supl. = $112^g 50^{cg}$ = 1,7668 rad; 7) 90°.

4ª UNIDAD

Construcciones geométricas fundamentales (1ª parte). Trazado de paralelas y de perpendiculares. Simetral. Bisectriz.

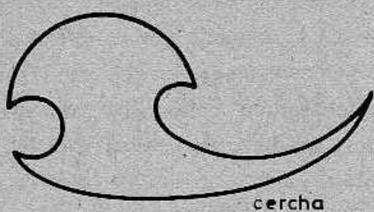
---

27. ESCUADRA

En las *construcciones geométricas* deben usarse sólo la *regla y el compás.* Cuando se emplean otros aparatos como la escuadra, cercha, etc., se habla de *construcciones mecánicas.*

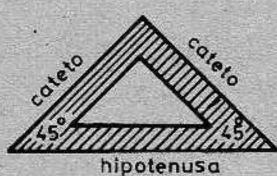
La *cercha* permite dibujar curvas como parábolas, elipses, hipérbolas, etc., y su uso es común en los dibujantes de planos (Fig. 1).

Fig. 1



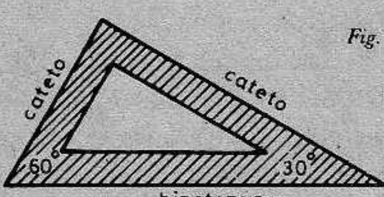
Con la *escuadra* se dibuja sin dificultades un ángulo recto. Hay dos tipos de escuadra: la »escuadra de 45°« y la »escuadra de 60°«. En cualquiera de ellas los lados que forman el ángulo recto se llaman *catetos.* El lado opuesto al ángulo recto se llama *hipotenusa* (es el lado mayor).

Fig. 2



La »escuadra de 45°« (Fig. 2) se llama así porque cada uno de sus ángulos agudos mide 45°. Además, tiene sus catetos de igual medida.

Fig. 3



En la »escuadra de 60°« el ángulo agudo mayor mide 60° (el otro ángulo agudo mide 30°) (Fig. 3). Además, la hipotenusa de esta escuadra mide el doble que el cateto menor. Entonces, con esta escuadra se pueden dibujar fácilmente los ángulos de 30°, 60° y 90°. ¿Qué otros ángulos puede dibujar fácilmente con ella? ¿Qué otros ángulos puede dibujar con la escuadra de 45°?

28. PROBLEMA FUNDAMENTAL

Por un punto P situado fuera de una recta L, trazar la paralela a esta recta (Fig. 4).

Fig. 4

1ª construcción: por *Traslación paralela*

Para esta construcción se necesita el empleo de una regla y una escuadra, es, por lo tanto, una construcción mecánica (Fig. 5).

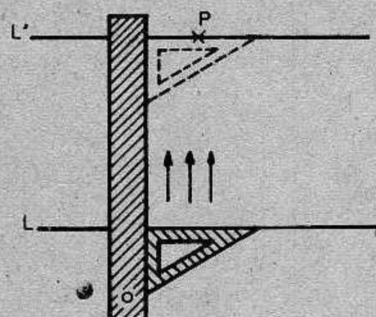


Fig. 5

1°. Se hace coincidir un cateto de la escuadra con la recta L dada.

2°. Se apoya la regla contra el otro cateto.

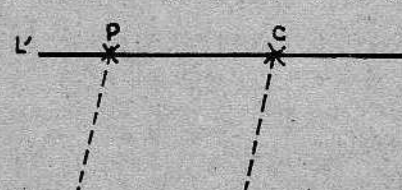
3°. Se mantiene fija y firme la regla y se traslada la escuadra sin despegarse de la regla.

4°. El traslado se efectúa hasta que el otro cateto coincida con el punto P dado.

5°. Basta, finalmente, trazar con el lápiz la recta L' que es paralela a L por »traslación paralela«.

2ª construcción: Método del paralelogramo (rombo)

Es una construcción geométrica y, por consiguiente, se usa sólo regla y compás (Fig. 6).



1°. Se une el punto dado P con un punto cualquiera A de la recta dada L.

2°. Con centro en A se mide con el compás la distancia AP y se marca el punto B de modo que $\overline{AB} = \overline{AP}$.

3°. Con la misma abertura $\overline{AP}$ del compás se hace centro en B y P trazándose dos arcos de circunferencia que se cortan en C. Es decir: $\odot(P, \overline{PA}) \cap \odot(B, \overline{PA}) = \{C\}$.

4°. Al unir P con C se obtiene la paralela pedida.

3ª construcción

Usando sólo la escuadra y trazando una *directriz* D auxiliar. La directriz puede coincidir con la hipotenusa de la escuadra o con un cateto (Figs. 7 y 8).

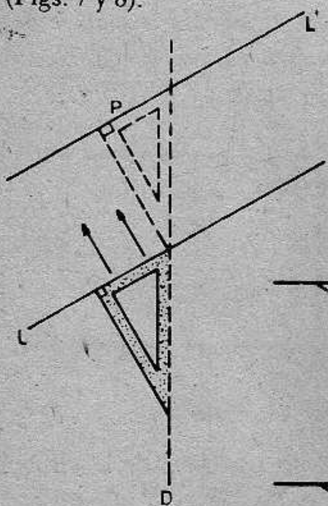


Fig. 7

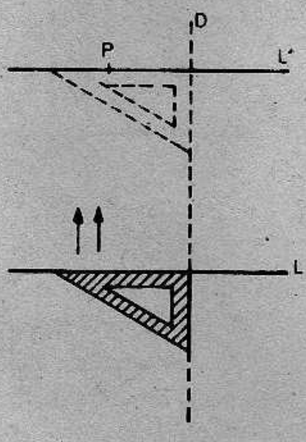
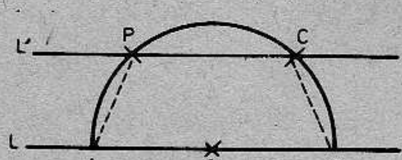


Fig. 8

4ª construcción

Método del trapecio isósceles (Fig. 9).

Fig. 9



1) Se elige un punto O de la recta L y se dibuja la semicircunferencia de centro O y radio $\overline{OP}$, la cual determinan el diámetro $\overline{AB}$.

2) Con el compás se mide $\overline{AP}$ que se aplica desde B lo que determina C.

3) $\overline{PC}$ es la paralela a L por P.

29. PROBLEMA FUNDAMENTAL

En un punto P situado en una recta L trazar la perpendicular a la recta en este punto (Fig. 10).

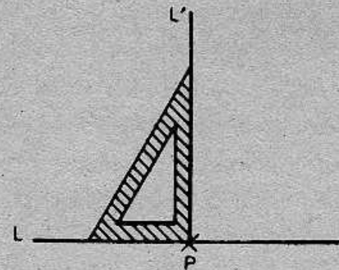


Fig. 10

1ª construcción mecánica

Sólo basta la escuadra.

1) Se hace coincidir un cateto de la escuadra con la recta L de modo que el vértice del ángulo recto coincida, a su vez, con el punto P (Fig. 10).

2) Conseguida estas dos coincidencias el otro cateto nos da la perpendicular en P.

2ª construcción (geométrica): con regla y compás (Fig. 11).

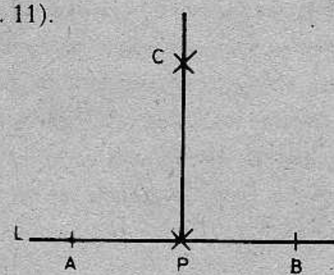


Fig. 11

1) Con centro en P se marca con cualquier radio (abertura del compás) dos puntos A y B equidistantes de P, o sea:

$\overline{PA} = \overline{PB}$.

2) Con un radio un poco mayor al anterior, se hace centro en A y B dibujándose dos arcos que al cortarse determinan C.

3) Basta unir C con P para obtener la perpendicular pedida en P a la recta L.

30. PROBLEMA FUNDAMENTAL

Desde un punto P situado fuera de una recta L, trazar la perpendicular a esta recta (Fig. 12).

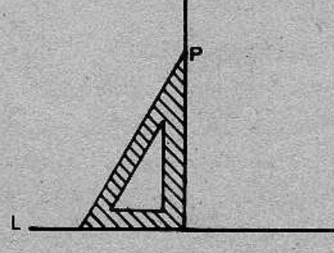


Fig. 12

1ª construcción:
Sólo basta la escuadra.

Se hace coincidir un cateto de la escuadra con la recta L y, al mismo tiempo, el otro cateto con el punto P (véase figura 12).

2ª construcción:
Con regla y compás (Fig. 13).

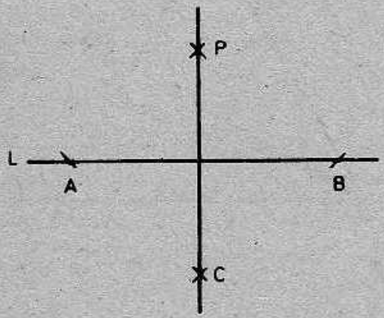


Fig. 13

1) Con centro en P y una conveniente abertura del compás se corta la recta L en dos puntos A y B.

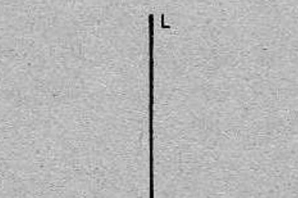
2) En seguida, con el mismo radio anterior, u otro más chico, y con centro en A y B se dibujan dos arcos que al cortarse determinan el punto C.

3) La recta que une P con C es la perpendicular pedida.

31. PROBLEMA FUNDAMENTAL

Trazar la simetral de un trazo dado AB = a (Fig. 14).

Fig. 14



Definición: Simetral de un trazo es la perpendicular en su punto medio.

1ª construcción (aproximada): con compás y escuadra.

1) Se hace centro en A y B con una abertura del compás cercana o aproximada a lo que se estime sea la mitad del trazo AB, con lo cual se determina un trazo $\overline{CD}$ más pequeño que $\overline{AB}$.

2) En seguida, se marca »a ojo« el punto medio del trazo $\overline{CD}$ que también lo es del $\overline{AB}$ (Fig. 14).

3) Se traza con la escuadra la perpendicular en M tal como se hizo en el (29-1).

2ª construcción: con regla y compás (Fig. 15).

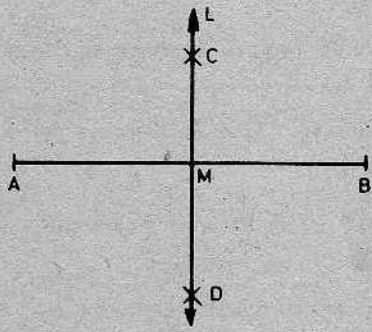


Fig. 15

1) Con una abertura del compás un poco mayor que la mitad del trazo $\overline{AB}$, se dibujan dos arcos de centro A y dos arcos de centro B cuya intersección determinan, respectivamente, los puntos C y D.

3) La unión de C con D es la simetral L del trazo $\overline{AB}$. Por lo tanto se tiene:

$$\overline{MA} = \overline{MB} \quad \text{y} \quad L \perp \overline{AB}$$

32. PROBLEMA FUNDAMENTAL

Dimidiar un trazo dado $\overline{AB}$. (*Dimidiar* un trazo consiste en determinar su punto medio, o sea, dividirlo en dos partes iguales).

Solución: Puede recurrirse a la 1ª construcción del problema anterior (31), que es más rápida y práctica, o bien, a la 2ª construcción que es más exacta.

33. PROBLEMA FUNDAMENTAL

Trazar geométricamente la bisectriz de un ángulo.

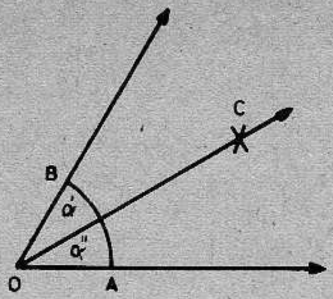
Definición: Bisectriz de un ángulo es la recta que lo divide en dos partes iguales. (El verbo correspondiente es bisecar o bisectar.)

1ª construcción: con regla y compás.

1) Se dibuja cualquier arco AB de centro en el vértice del ángulo (Fig. 16).

2) Con la misma abertura del compás u otra distinta se trazan dos arcos del mismo radio

Fig. 16



de centro A y B; su intersección determina el punto C.

3) El rayo $\overrightarrow{OC}$ es la bisectriz del ∡ AOB. Es decir:

∡ AOC = ∡ BOC $\Rightarrow$ $\alpha' = \alpha''$

Obs.: ver ejercicios A, B y C de pág. 128.

2ª construcción: sólo con la escuadra.

1) Se hace $\overline{OA} = \overline{OB}$ (Fig. 17).

2) Se une A con B.

3) Desde O, con la escuadra, se traza la perpendicular a $\overline{AB}$. Esta perpendicular es la bisectriz del ∡ AOB.

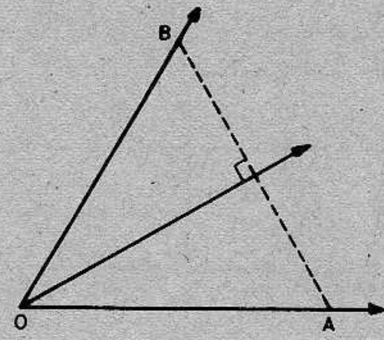


Fig. 17

Construcciones geométricas fundamentales (2ª parte). Adición y sustracción de trazos. Copiar ángulos. Adición y sustracción de ángulos. División de un trazo.

34. PROBLEMA: SUMAR TRAZOS

Dados dos trazos »a« y »b« construir un trazo »x« equivalente a la suma de ellos, es decir: x = a + b.

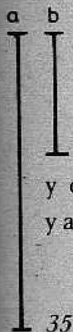


Fig. 1

Solución: A partir del origen O de un rayo y con la ayuda de un compás, se copia $a = \overline{OA}$ y a continuación $b = \overline{AB}$ (Fig. 1).

Resulta: $\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB} \Rightarrow x = a + b$

35. PROBLEMA

Dado un triángulo ABC de lados a, b, c determinar geométricamente un trazo »x« equivalente a su *perímetro*. (El *perímetro* de una figura es la suma de todos sus lados.)

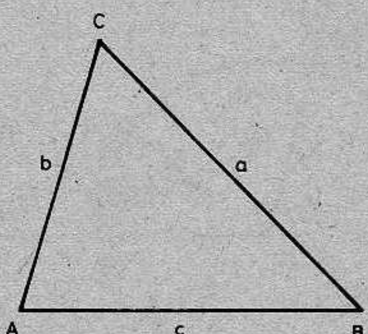


Fig. 2

Solución: A partir del origen de un rayo se copian, sucesivamente, los lados del triángulo (Hágalo usted).

36. PROBLEMA: RESTAR TRAZOS

Dados dos trazos »a« y »b«, siendo a > b, determinar el trazo »x« equivalente a la diferencia de ellos tal que x = a − b.

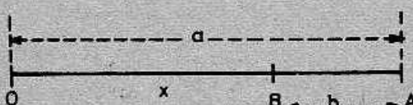


Fig. 3

Solución: Se copia en un rayo O el trazo $a = \overline{OA}$ al cual se le resta $b = \overline{AB}$ (Fig. 3).

Resulta: $\overline{OB} = \overline{OA} - \overline{AB}$

$\therefore x = a - b$

37. PROBLEMA

Dados tres trazos a, b y c, determinar un trazo »x« tal que x = 3a + 2b − c.

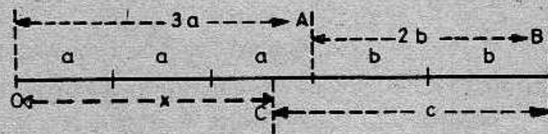


Fig. 4

Solución: $\overline{OA} = 3a$, $\overline{AB} = 2b$,
$\overline{BC} = c$, resulta $\overline{OC} = x$ (Fig. 4)

38. PROBLEMA

Dado un trazo »a« dividirlo en dos partes iguales.

Solución: Basta trazar la simetral (según 31). Si $\overline{AB} = a$ resulta $\overline{MA} = \overline{MB} = \frac{1}{2}$ a (Fig. 5)

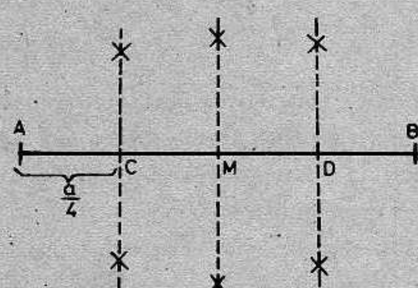


Fig. 5

39. PROBLEMA

Dado un trazo »a« dividirlo en cuatro partes iguales.

Solución:

1) se traza la simetral de AB (según 31).

2) se traza la simetral de cada mitad, resultando: $\overline{AC} = \overline{CM} = \overline{MD} = \overline{DB} = \frac{a}{4}$ (Fig. 5)

40. PROBLEMA

Dividir un trazo en tres partes iguales.

Solución: 1) Se forma un ángulo con vértice en A (o en B) (Fig. 6).

2) Sobre el lado libre $\overline{AL}$ se aplica una unidad (puede ser 1 cm o una abertura conveniente del compás) tres veces.

3) El último punto E se une con el otro extremo B del trazo dado.

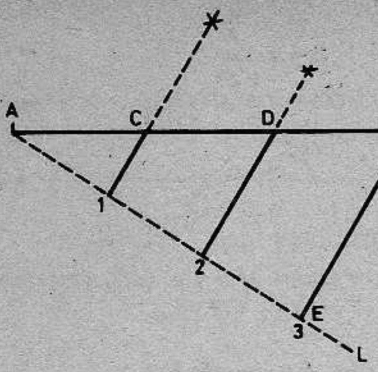


Fig. 6

4) Por los otros puntos (1 ∧ 2) se trazan las paralelas a $\overline{EB}$, por el método del paralelogramo.

Resulta: $\overline{AC} = \overline{CD} = \overline{DB} = \frac{a}{3}$ (Fig. 6)

41. PROBLÈMA

Determinar las $\frac{3}{5}$ partes de un trazo dado »a«.

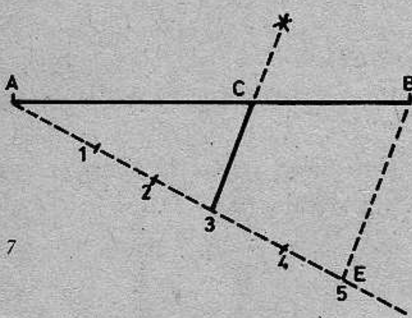


Fig. 7

Solución: 1) Se forma un ángulo con vértice en A y sobre su lado libre se aplica una unidad (una abertura del compás) cinco veces (Fig. 7).

2) Se unen los extremos B y E.

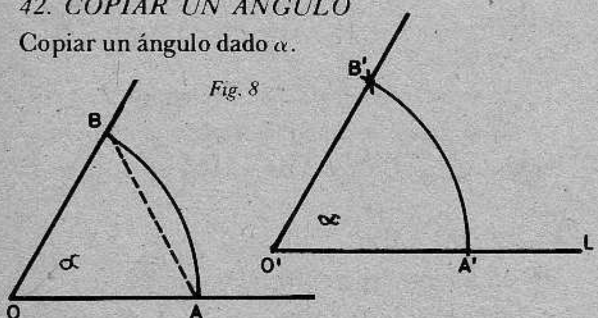
3) Por el punto »3« se traza la paralela a $\overline{EB}$ (por método del #).

Resulta: $\overline{AC} = \frac{3}{5} \cdot \overline{AB} = \frac{3}{5} \cdot a$

42. COPIAR UN ANGULO

Copiar un ángulo dado α.

Fig. 8



I. *Solución:* 1) Se traza un rayo $\overline{O'L}$ (Fig. 8).

2) Se dibuja un arco $\widehat{AB}$ entre los lados del ángulo dado y con el *mismo radio* un arco de centro O'.

3) Con el compás se mide la cuerda $\overline{AB}$ correspondiente al arco $\widehat{AB}$ y con esta magnitud se corta el arco de centro O' desde A' con lo que se determina el punto B'.

4) Se une finalmente, O' con B'.

Resulta: $\measuredangle$ A'O'B' = $\measuredangle$ AOB = α.

II. *Solución:* con el transportador. (Hágalo usted).

43. SUMAR ANGULOS GEOMETRICAMENTE

Dados los ángulos α y β, determinar el ángulo equivalente a la suma de ellos, es decir: $\alpha + \beta$.

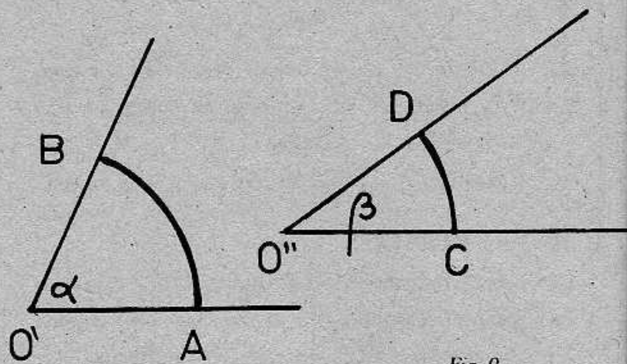
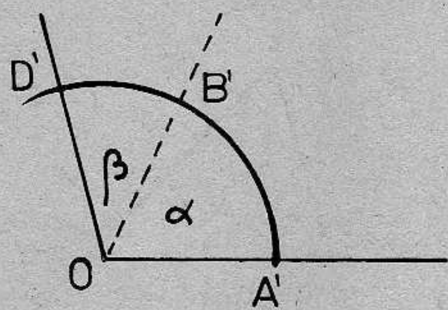


Fig. 9



Solución: 1) Se dibujan, con un mismo radio, arcos entre los lados de los ángulos dados y en el origen del rayo O donde se van a sumar (Fig. 9).

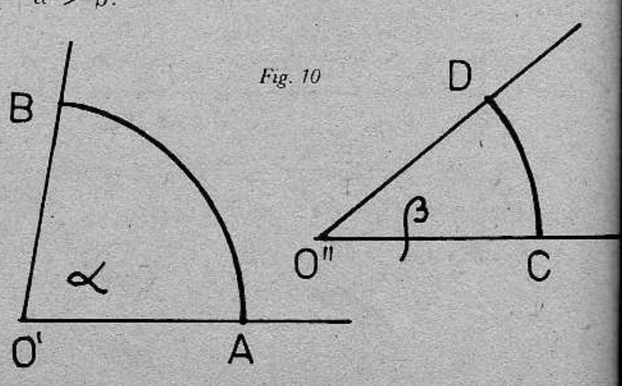
2) Se copia el ángulo α = $\measuredangle$ A'OB' y a continuación β = $\measuredangle$ B'OD'.

Resulta: $\measuredangle$ A'OD' = $\alpha + \beta$

44. RESTAR ANGULOS

Dados dos ángulos α y β, restarlos siendo $\alpha > \beta$.

Fig. 10



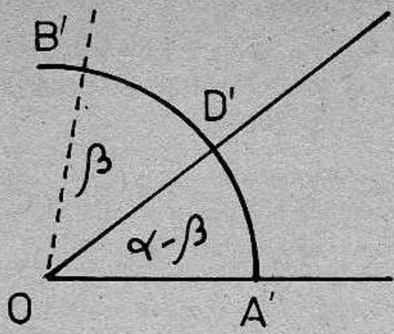


Fig. 10-a

1) Con el mismo radio se dibujan arcos de centro O, O' y O'' (Figs. 10 y 10a).

2) Se copia $\alpha = \measuredangle A'OB'$ al cual se le resta β desde B'.

Resulta: $\measuredangle A'OD' = \alpha - \beta$

45. PROBLEMA

Triplicar la medida de un ángulo α dado.

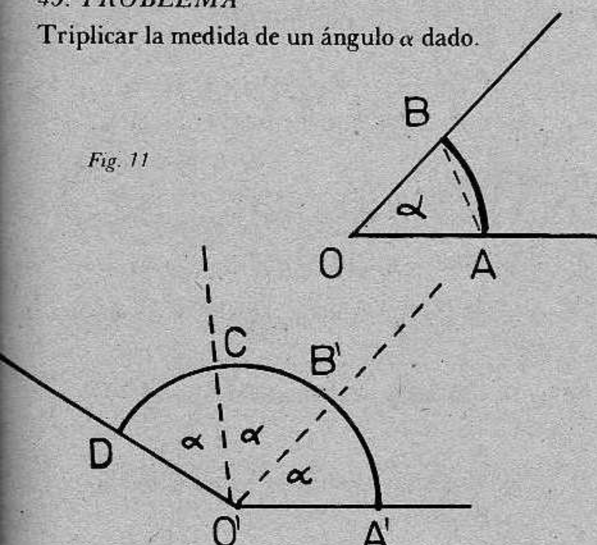


Fig. 11

Solución: 1) Con un mismo radio se dibujan arcos entre los lados del ángulo dado y en el origen del rayo donde se va a copiar (Fig. 11).

2) Se mide con el compás la cuerda AB y esta abertura se la aplica tres veces consecutivas a partir de A' de modo que:

$\widehat{A'B'} = \widehat{B'C} = \widehat{CD} = \widehat{AB}$

Resulta: $\measuredangle A'O'D = 3\,\alpha$

46. Dibujar un triángulo y sumar geométricamente sus tres ángulos.

47. Sumar los cuatro ángulos interiores de un cuadrilátero cualquiera.

48. Dados tres ángulos α, β, γ determinar un ángulo »x« tal que:

$x = 3 \cdot \alpha + \beta - 2 \cdot \gamma$

OBSERVACIONES

1) En un Sistema Cartesiano de Coordenadas (Sistema Ortogonal) un ángulo está ubicado en *posición normal* (o »standard«) cuando su vértice coincide con el origen del sistema, teniendo su *lado inicial* coincidiendo con el semieje positivo de las abscisas (o semieje de las X) y el *lado terminal* en uno de los cuadrantes del Sistema (Fig. 12).

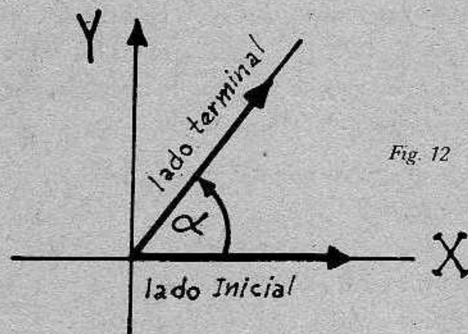


Fig. 12

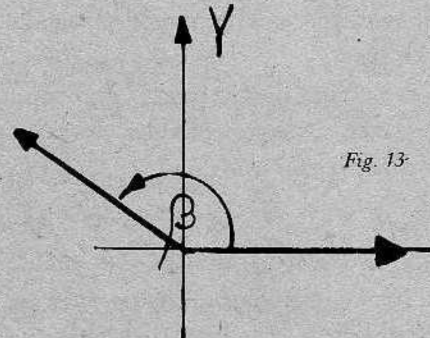


Fig. 13

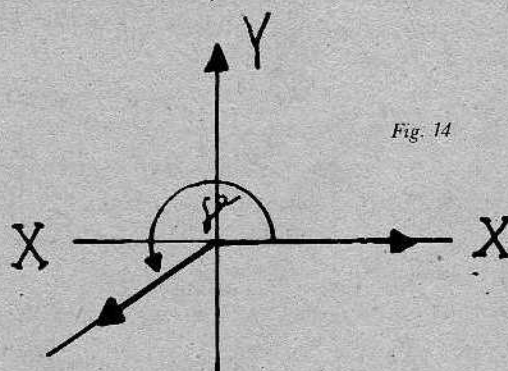


Fig. 14

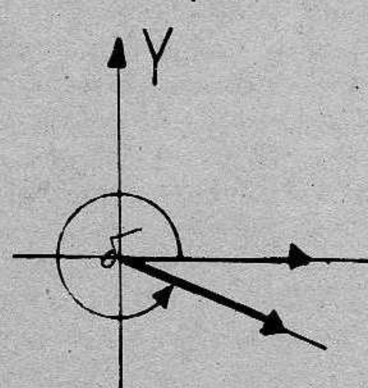


Fig. 15

2) Un ángulo pertenece al cuadrante en que queda su *lado terminal* estando el ángulo en posición normal.

De esta manera:

$\alpha \in 1^{er}$ cuadrante pues $0° < \alpha < 90°$

$\beta \in 2°$ cuadrante pues $90° < \beta < 180°$

$\gamma \in 3°$ cuadrante pues $180° < \gamma < 170°$

$\delta \in 4°$ cuadrante pues $270° < \delta < 360°$

3) *Angulo cuadrangular* (o cuadrantil): es el que mide 0°, 90°, 180°, 360° y todos los ángulos que son múltiplos de 90°. Por lo tanto, un ángulo α es cuadrangular cuando mide:

$\alpha = n \cdot 90°$ siendo $n \in \mathbb{Z}$

Ejercicios:

a) ¿Puede ser n = 0, n = 10, n = −5?

b) ¿Puede ser n = 1,5?

c) ¿A qué cuadrante pertenece el ángulo de de 90°?

d) ¿Puede decirse que un ángulo es cuadrangular cuando sus lados coinciden con los semiejes del Sistema Cartesiano?

4) *Angulo positivo:* es el que se engendra cuando el lado terminal gira en el sentido antihorario (sentido levógiro). *Angulo negativo* es el que se engendra cuando el lado terminal gira en el sentido horario (sentido dextrógiro).

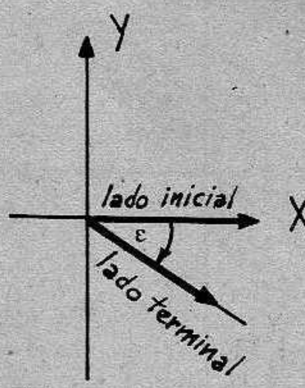


Fig. 16

Los ángulos α, β, γ, δ dibujados anteriormente son los cuatro positivos; en cambio, ϵ es un ángulo negativo (Fig. 16).

5) *Angulos coterminales:* son dos ángulos de distinta medida que tienen el mismo lado inicial y el mismo lado terminal (Fig. 17).

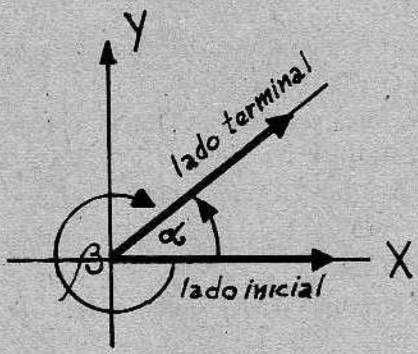


Fig. 17

EJERCICIOS

1) $\alpha = 20° \wedge \beta = -340°$. ¡Dibújelos y márquelos!

2) $\alpha = 20° \wedge \beta = +380°$. ¡Dibújelos y márquelos!

3) $\alpha = -20° \wedge \beta = -380°$. ¡Dibújelos y márquelos!

4) $\alpha = -20° \wedge \beta = +340°$. ¡Dibújelos y márquelos!

5) ¿Cuáles de los siguientes ángulos son coterminales entre sí?

$\alpha_1 = 125°$; $\alpha_2 = 955°$; $\alpha_3 = -235°$

6) ¿Cuáles de los siguientes ángulos son coterminales entre sí?

$\beta = -225°$; $\beta_2 = 1215°$; $\beta_3 = -585°$

7) ¿Cuáles de los siguientes ángulos son cuadrantiles?

$\alpha = 2160°$; $\beta = -3240°$; $\gamma = 3180°$; $\delta = -1440°$

49. DEFINICION

Ya hemos usado varias veces el término *definición* y ahora podemos decir que »es una proposición en la cual se enuncian las propiedades o características del definido« (objeto abstracto o concreto).

Es fundamental que las definiciones sean claras, completas y lo más breve posible.

50. AXIOMA

»Es una verdad evidente por sí misma«.

Veamos algunos ejemplos:

A) »El todo es mayor que cada una de sus partes«.

Así: a) Si un fundo se divide en cuatro parcelas, es obvio que cada parcela es menor que todo el fundo.

b) El peso de una rueda de un automóvil es menor que el peso de todo el automóvil.

c) 1 centímetro es menor que 1 metro.

B) »La suma de las partes es igual al todo«.

Por ejemplo: a) El conjunto de todas las piezas de un rompecabezas es igual al rompecabezas.

b) La suma de todas las provincias chilenas es igual a todo el territorio de nuestra patria.

C) »Toda cantidad es igual a sí misma«. (Reflexividad.)

D) »Una cantidad puede reemplazarse por otra igual«.

Por ejemplo: 1 metro puede sustituirse por 100 cm.

Si $\alpha + x = 180° \wedge x = \beta \Longrightarrow \alpha + \beta = 180°$.

E) »Dos cantidades iguales a una tercera son iguales entre sí«.

Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} 1 \text{ metro} = 100 \text{ cm} \\ 1 \text{ metro} = \ \ 10 \text{ dm} \end{array}\right\} \Longrightarrow 100 \text{ cm} = 10 \text{ dm}$$

Si $\alpha = 30° \wedge 30° = \beta \Longrightarrow \alpha = \beta$

Las relaciones que cumplen con este axioma se dice que son transitivas y la propiedad se llama *transitividad*.

F) »Si a cantidades iguales se les suma, resta, multiplica o divide por cantidades iguales, los resultados son también iguales«. (En la división el divisor debe ser distinto de cero.)

$$+\left\{\begin{array}{l} 100 = 60 + 40 \\ \ \ 30 = 30 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{c} \hline 100 + 30 = 60 + 40 + 30 \\ 130 = 130 \end{array}$$

$$-\left\{\begin{array}{l} 100 = 60 + 40 \\ \ \ 30 = 30 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{c} \hline 100 - 30 = 60 + 40 - 30 \\ 70 = 70 \end{array}$$

51. POSTULADO

»Es una proposición que se acepta sin demostración«.

Por ejemplo:

1) »Dos triángulos son congruentes cuando tienen iguales dos lados y el ángulo comprendido por ellos«.

2) »Dos triángulos que tienen dos ángulos iguales son semejantes«.

3) Si dos puntos de una recta están en un plano, entonces la recta pertenece al plano.

4) Existen por lo menos tres puntos de un plano que no son colineales.

5) Existen por lo menos cuatro puntos en el espacio que no son coplanarios.

6) Si una recta no pertenece a un plano, entonces la intersección de ambos es máximo un punto.

7) Tres puntos cualesquiera no colineales determinan un plano.

8) Por un punto pasan infinitas rectas.

9) Dos rectas al cortarse lo hacen máximo en un punto.

10) »Por un punto fuera de una recta puede trazarse sólo una paralela a ella«.

Este último postulado, que ya vimos al comienzo de este libro, se conoce como *5° Postulado de Euclides* y es la base de la Geometría Euclidiana.

Aceptado este Postulado se puede demostrar una serie de proposiciones que, una vez probada su validez, son aceptadas como verdaderas. A estas proposiciones que para aceptarse como ciertas debe probarse su validez se les llama *Teoremas*.

Por lo tanto, los teoremas deben probarse y para ello es conveniente seguir un orden:

I) *La Hipótesis* (se abrevia Hip. o H.). Esta parte está formada por lo que se sabe o por los datos indicados en el enunciado del teorema.

II) *La Tesis* (se abrevia Tes. o T.). Está formada por lo que se va a probar.

III) La *Demostración* (se abrevia Dem. o D.). Es la parte más difícil ya que para probar la validez del teorema debe razonarse recurriendo a definiciones, a axiomas y a teoremas demostrados anteriormente.

En las demostraciones que haremos desde este momento, en lo posible, distinguiremos estos tres pasos y seguiremos el orden indicado. Cuando no sea necesario escribir la Hipótesis la omitiremos o la dejaremos en forma tácita.

Además, como frecuentemente en la demostración de un teorema tendremos que recurrir a teoremas ya demostrados con anterioridad, le asignaremos a cada teorema un número romano con el objeto de facilitar la escritura y el orden en el razonamiento a seguir.

Nuestro razonamiento será esencialmente *deductivo* que es típico de las Ciencias y, sobre todo, es básico en la Geometría. En el *método deductivo* se relacionan y encadenan conocimientos ya adquiridos y verdaderos para obtener, por medio de un razonamiento lógico, nuevos conocimientos. En el caso concreto de la Geometría obtendremos nuevos teoremas.

52. OBSERVACION

Hay autores que no hacen distingos entre axiomas y postulados considerando a todos como axiomas. Creo que existe una diferencia entre estos dos términos ya que, para mí, los axiomas vienen a ser verdades de »perogrullo«, es decir, demasiado evidentes para dudar de su validez. En cambio, »los postulados son verdades que se proponen y se aceptan sin discutir su validez«. Así, »no cabe dudas de que el todo es mayor que cada una de sus partes«. En cambio, el famoso 5° Postulado de Euclides no es tan evidente y de su no aceptación o negación nacieron las geometrías no-euclídeas de Lobatschewsky y de otros.

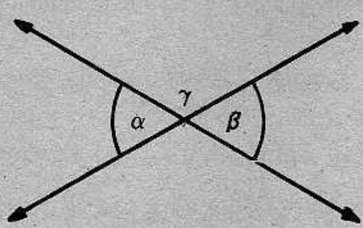
Aún algo más. Supongamos que con las cartas de un naipe (elementos de un conjunto) deseamos sacar un »solitario«, jugar al »póker«, a la brisca u otro juego que pueda desarrollarse con el naipe. Para esto necesitamos conocer, primeramente, el juego al cual vamos a dedicarnos y, en seguida, establecer las »reglas del juego« indicando lo que es lícito hacer con las cartas y lo que no debe hacerse.

En Matemáticas (y en otras Ciencias) a estas »reglas del juego« se les llama *postulados* y deben aceptarse sin demostrarlos; son como reglas particulares que servirán de base a un sistema que se construirá a partir de ellos. Los postulados son como axiomas que se aplican a materias más restringidas o específicas. En cambio, el axioma en sí es mucho más general o universal.

53. TEOREMA I

»Los ángulos opuestos por el vértice son iguales entre sí«.

Definición: »Dos ángulos son *opuestos por el vértice* cuando los lados de los ángulos se forman prolongando los lados del otro, es decir, sus lados son colineales« (Sus lados son rayos opuestos.)



H.) α y β son ángulos opuestos por el vértice (es lo que se sabe).

T.) $\alpha = \beta$ (es lo que se quiere probar).

D.) Se sabe que:

$\alpha + \gamma = 180°$ (pues son ∡ adyacentes)
$\beta + \gamma = 180°$ (igual motivo)

$\therefore\ \alpha + \gamma = \beta + \gamma$ (por Ax. E)

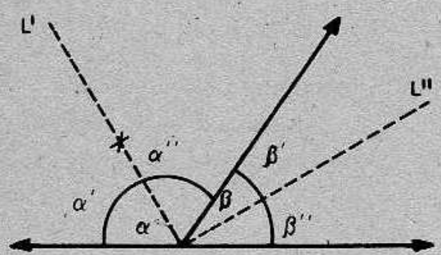
Si en ambos miembros se resta γ se obtiene:

$\alpha = \beta$ (en virtud Ax. F)

En la demostración de este sencillo teorema nos hemos basado en una definición (la de ángulos adyacentes) y en dos axiomas (el E y F del N° 50).

54. TEOREMA II

»Las bisectrices de dos ángulos adyacentes son perpendiculares entre sí«.



H.) α y β son ángulos adyacentes.
L' es bisectriz de α
L'' es bisectriz de β

T.) L' $\perp$ L''

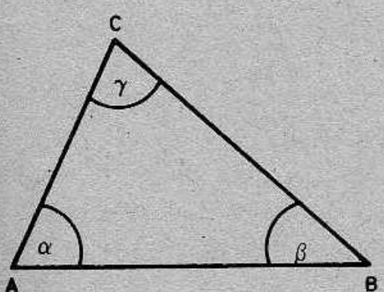
D.) $\alpha + \beta = 180°$ (son $\measuredangle$ adyacentes)

$2\alpha' + 2\beta' = 180°$ (se divide por 2; Ax. F)

$\therefore\ \alpha' + \beta' = 90° \Longrightarrow$ L' $\perp$ L''

55. TEOREMA III

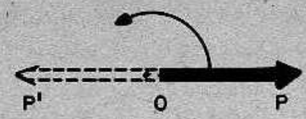
»Los ángulos interiores de un triángulo suman 180°« (se dice también: »dos rectos« en vez de 180°).



H.) α, β, γ son ángulos interiores del $\triangle$ABC

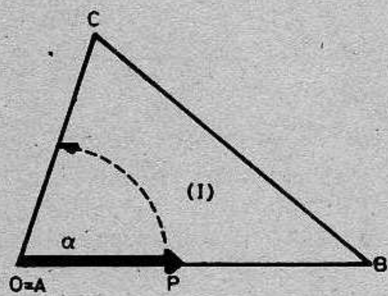
T.) $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

D.) (Por ahora daremos una prueba intuitiva; más adelante, en el Teorema XIV se da una demostración racional).

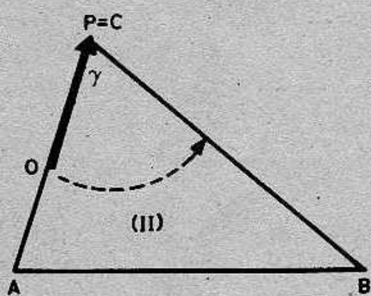


Si se tiene un lápiz OP con la punta hacia la derecha y se le hace girar en torno al extremo O de modo que el extremo P quede a la izquierda en P', el giro del lápiz ha sido en 180°. Recuerde este giro pues lo aplicaremos en el $\triangle$ ABC:

1°. Se coloca el lápiz OP en la posición de la figura I y se lo hace girar en torno a A hasta describir el ángulo α.

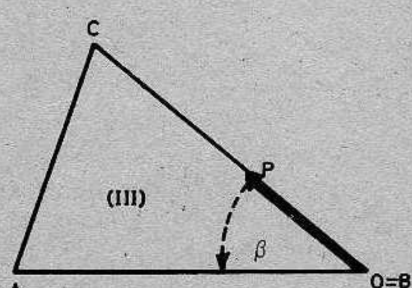


2°. Una vez que el lápiz coincida con la dirección AC se »corre« sobre este lado hasta que P coincida con C (Fig. II).



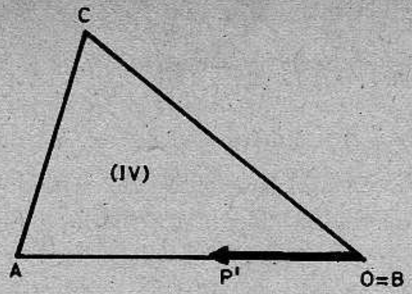
3°. Se hace girar el lápiz en torno a C describiendo el ángulo γ.

4°. Se »corre« el lápiz sobre el lado CB hasta que O coincida con B (Fig. III).



5°. Se hace girar el lápiz en torno a B describiendo el ángulo β quedando el lápiz en la posición OP', indicada en la Fig. IV.

Se observa que con estos tres giros sucesivos el lápiz describió un ángulo de 180°, pues quedó con la punta hacia la izquierda.



Luis Saavedra

7ª UNIDAD

El triángulo. Clasificación. Distancia entre puntos y rectas. Elementos principales y secundarios de un triángulo. Alturas, simetrales, bisectrices, transversales de gravedad, medianas y radios. Circunferencia circunscrita, inscrita y ex inscrita al triángulo. Incentro y circunscentro.

---

56. EL TRIANGULO

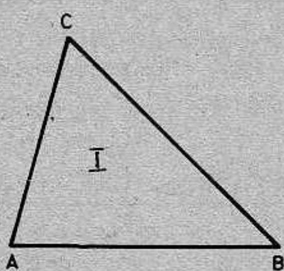
Ya sabemos que es un polígono de tres lados. Existen varios tipos de triángulos y pueden clasificarse de acuerdo a sus lados y de acuerdo a sus ángulos.

A) *Según los lados:*

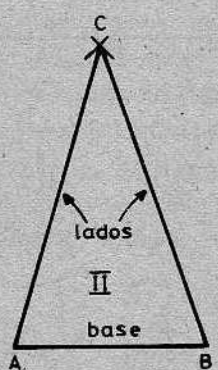
△ escaleno (los 3 lados desiguales)

△ isósceles (2 lados iguales)

△ equilátero (los 3 lados iguales)



△ *escaleno:* es el que tiene sus tres lados desiguales (I).



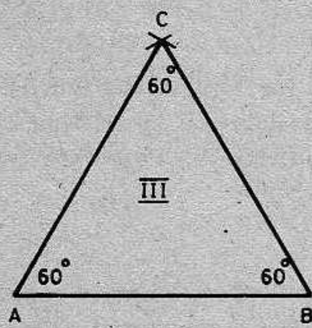
△ *isósceles:* es el que tiene dos lados iguales. En este triángulo los lados iguales se llaman simplemente *lados* y el lado desigual es la *base*. Entonces (II):

$\overline{AC} = \overline{BC}$ (lados del △ isósceles).

$\overline{AB}$ = base del △ isósceles.

△ *equilátero:* es el que tiene sus tres lados iguales. O sea (III):

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}$



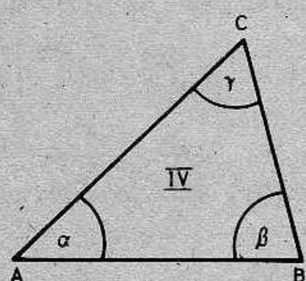
Como los tres ángulos suman 180°, cada ángulo de un triángulo equilátero mide 60°.

B) *Según los ángulos:*

△ acutángulo (los 3 ∡ son agudos)

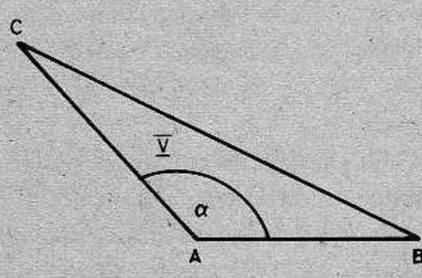
△ obtusángulo (tiene un ∡ obtuso)

△ rectángulo (tiene un ∡ recto)



△ *acutángulo:* es el que tiene sus tres ángulos agudos (IV):

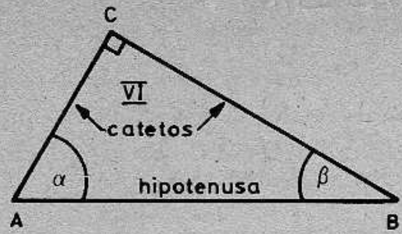
$\alpha < 90°;\ \beta < 90°;\ \gamma < 90°$



△ *obtusángulo:* es el que tiene un ángulo obtuso (uno cualquiera de ellos) (V):

$180° > \alpha > 90°$

¿Puede un triángulo tener dos ángulos obtusos?



$\triangle$ *rectángulo:* es el que tiene un ángulo recto (VI):

Como los tres ángulos interiores suman 180°, quiere decir que los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo suman 90°. Es decir:

$$\alpha + \beta = 90° \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = 90° - \beta \\ \beta = 90° - \alpha \end{cases}$$

O bien: »en un triángulo rectángulo cada ángulo agudo es el complemento del otro«.

Igualmente que en la escuadra los lados que forman el ángulo recto son los *catetos* y el lado opuesto al ángulo recto es la *hipotenusa* (es el lado de mayor longitud de este triángulo).

Se puede combinar un triángulo del grupo A con uno del grupo B y formar, por ejemplo, un triángulo isósceles-rectángulo, un triángulo isósceles-obtusángulo, un triángulo escaleno-rectángulo, etc.

57. EJERCICIOS

1) Combinando un triángulo del grupo A con un triángulo del grupo B se afirma que los triángulos diferentes que se pueden formar por »parejas« son:

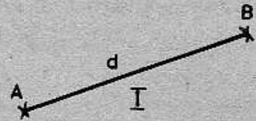
A) 9	B) 8
C) 7	D) 6
E) 5	

2) Dibujar un triángulo isósceles-rectángulo e indicar la medida de sus ángulos agudos.
3) Dibujar tres triángulos isósceles-obtusángulos con el ángulo obtuso en diferentes vértices.
4) Dibujar un triángulo acutángulo-isósceles.
5) Dibujar tres triángulos rectángulos de modo que el ángulo recto esté en A, B o C, respectivamente.

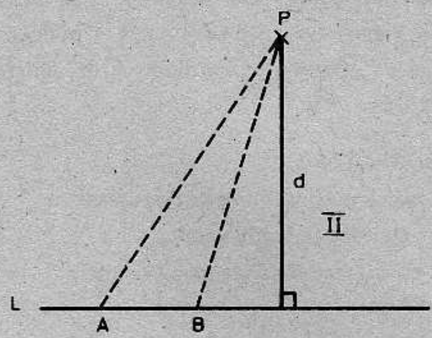
58. DISTANCIA ENTRE PUNTOS Y RECTAS

Se elige en todos los casos que se presente la *menor distancia*.

A) Ya hemos dicho que la menor distancia (Fig. I) entre dos puntos es el trazo que los une (Ax. H).

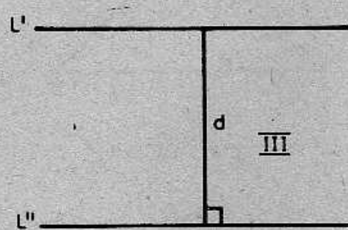


B) La distancia de un punto a una recta es la perpendicular del punto a la recta (II).



Si $d \perp L \Longrightarrow d$ = distancia del punto P a la recta L (menor distancia).

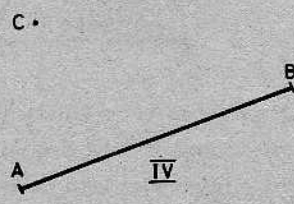
Luego: $\overline{PA} > d$; $\overline{PB} > d$, etc.



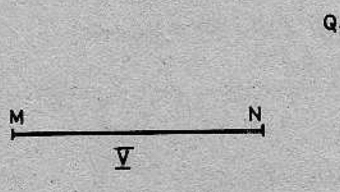
C) La distancia entre dos rectas paralelas es la perpendicular trazada entre ellas (III).

59. EJERCICIOS

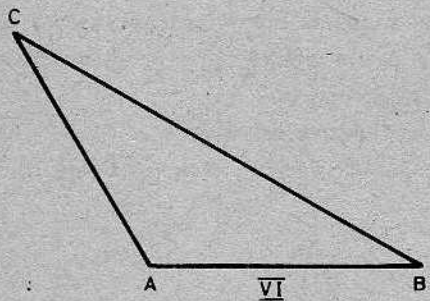
1) Trazar la distancia del punto C al trazo $\overline{AB}$ (IV).



2) Trazar la distancia del punto Q al trazo $\overline{MN}$ (V).



3) Dibujar un ángulo agudo y trazar su bisectriz. Elegir un punto cualquiera O de esta bisectriz y trazar desde este punto las distancias a los lados del ángulo.
4) Dibujar un ángulo obtuso y trazar su bisectriz. Elegir un punto cualquiera O de esta bisectriz y trazar desde este punto las distancias a los lados del ángulo.



5) En el triángulo obtusángulo ABC trazar la perpendicular desde C al lado $\overline{AB}$; también la perpendicular desde B al lado $\overline{AC}$ (VI).

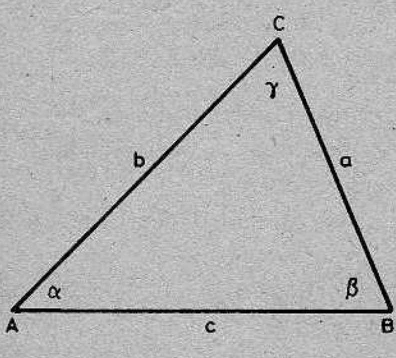
60. ELEMENTOS DE UN TRIANGULO

I) *Elementos principales:* { vértices, lados, ángulos

No puede existir ni dibujarse un triángulo sin estos tres elementos fundamentales.

Los vértices los designaremos con las letras mayúsculas A, B y C; sus lados con las letras minúsculas a, b y c correspondientes a los *vértices opuestos* A, B y C, respectivamente. Los ángulos interiores con las letras griegas α, β, γ (Fig. 1).

Fig. 1



II) *Elementos secundarios:* el triángulo puede existir sin que se dibujen estos elementos que son muchos, por ejemplo: alturas, bisectrices, simetrales, transversales de gravedad, medianas, radios, etc. Veremos algunos de estos elementos.

61. ALTURAS DE UN TRIANGULO

Son las perpendiculares trazadas desde un vértice al lado opuesto. (Corresponde a la distancia desde un vértice al lado opuesto.)

Es más práctico trazarlas con la escuadra.

La altura desde A se designa h_a;

La altura desde B se designa h_b;

La altura desde C se designa h_c.

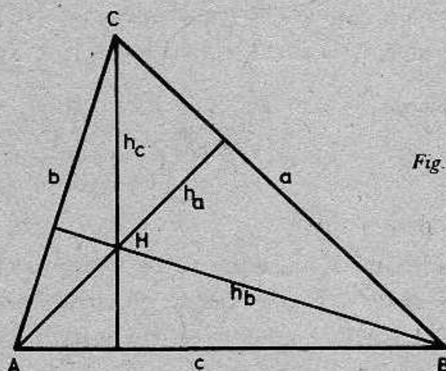


Fig. 2

Las tres alturas se cortan en un mismo punto H que es el *ortocentro* del triángulo. (Se dice también que: las tres alturas concurren al mismo punto llamado ortocentro.) Por lo tanto (Fig. 2):

$h_a \cap h_b \cap h_c = \{H\}$

62. TAREA

1) Trazar las alturas de un triángulo obtusángulo. ¿Dónde queda su ortocentro?
2) Trazar las alturas de un triángulo rectángulo. ¿Tiene ortocentro?

63. SIMETRALES DEL TRIANGULO

Son las perpendiculares trazadas en los puntos medios de sus lados.

Se trazan fácilmente con regla y compás tal como se hizo en el N° 31-II.

La simetral del lado BC = a es S_a

La simetral del lado $\overline{AC}$ = b es S_b

La simetral del lado $\overline{AB}$ = c es S_c

Las tres simetrales concurren a un mismo punto que es el centro O de la *circunferencia circunscrita* al triángulo (pasa por los tres vértices). A este punto se le llama también *circunscentro* o

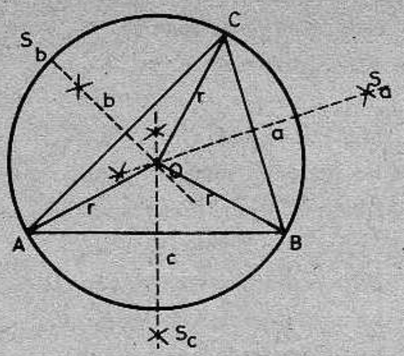


Fig. 3

circuncentro. La distancia »r« desde el circuncentro a cualquiera de los vértices es el radio de la circunferencia circunscrita (Fig. 3).

Luego: $S_a \cap S_b \cap S_c = \{O\}$

$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = r$

64. TAREA

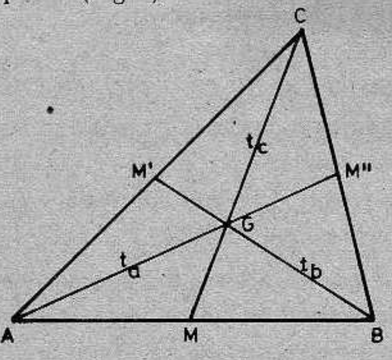
1) Trazar las simetrales de un triángulo obtusángulo. ¿Dónde queda el circunscentro? Dibujar la circunferencia circunscrita a este triángulo.
2) Trazar las simetrales de un triángulo rectángulo. ¿Dónde queda el circunscentro? Dibujar la circunferencia circunscrita. ¿Cuánto mide el radio de esta circunferencia?

65. TRANSVERSALES DE GRAVEDAD

Son los trazos que se obtienen al unir un vértice con el punto medio del lado opuesto.

Los puntos medios de los lados del triángulo conviene determinarlos aproximadamente con el compás (Nº 31-I) y, en seguida, unirlos con el vértice opuesto (Fig. 4).

Fig. 4



La transversal de gravedad de A es $t_a = \overline{AM''}$. La de B es $t_b = \overline{BM'}$ y la de C es $t_c = \overline{CM}$.

Las tres transversales de gravedad de un triángulo se cortan en un mismo punto que es el *centro de gravedad* G (o *baricentro*) del triángulo.

$t_a \cap t_b \cap t_c = \{G\}$

Más adelante demostraremos las propiedades del punto G (Nº 196).

66. BISECTRICES DE LOS ANGULOS INTERIORES

Sabemos que la bisectriz divide a cada ángulo en dos partes iguales y que se trazan fácilmente con regla y compás.

La bisectriz del ángulo α es $b_\alpha = \overline{AR}$; la de β es $b_\beta = \overline{BS}$ y la de γ es $b_\gamma = \overline{CT}$ (Fig. 5).

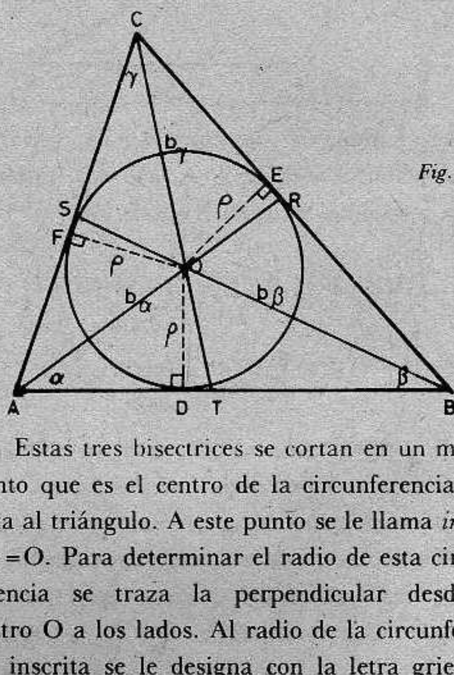


Fig. 5

Estas tres bisectrices se cortan en un mismo punto que es el centro de la circunferencia inscrita al triángulo. A este punto se le llama *incentro* = O. Para determinar el radio de esta circunferencia se traza la perpendicular desde el centro O a los lados. Al radio de la circunferencia inscrita se le designa con la letra griega ρ (ro) (ρ = distancia del incentro a los lados).

Luego: $b_\alpha \cap b_\beta \cap b_\gamma = \{O\}$; $\overline{OD} = \overline{OE} = \overline{OF} = \rho$

67. TAREA

1) Determinar el incentro de un triángulo obtusángulo; trazar el radio y dibujar la circunferencia inscrita.
2) Idem, pero para un triángulo rectángulo.

68. BISECTRICES DE LOS ANGULOS EXTERIORES

Como existen tres ángulos exteriores diferentes, sus bisectrices al cortarse determinan los centros de tres circunferencias llamadas *circunferencias ex inscritas* (Fig. 6), de centros O_a, O_b y O_c;

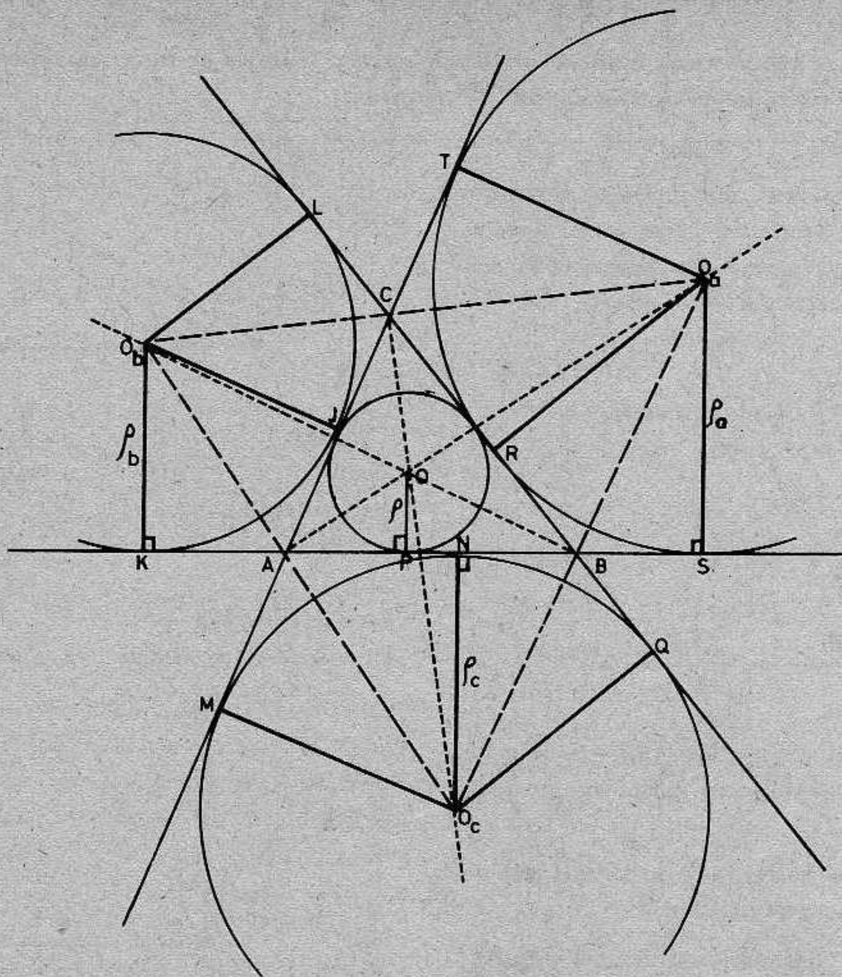


Fig. 6

sus radios son respectivamente ρ_a, ρ_b y ρ_c. Para determinar estos radios se trazan desde los centros O_a, O_b y O_c las perpendiculares a los lados del triángulo y a sus prolongaciones.

69. TAREA

En una hoja de papel tamaño oficio dibujar un triángulo convenientemente elegido (que no sea ni isósceles ni rectángulo). Determinar en la misma figura el ortocentro, el centro de gravedad, el circunscentro, el incentro y los centros de las circunferencias ex inscritas. Además, dibujar todas estas circunferencias.

70. MEDIANAS DE UN TRIANGULO

Son los trazos que se obtienen al unir los puntos medios de dos lados.

Si $\overline{M_1A} = \overline{M_1C}$, $\overline{M_2B} = \overline{M_2C}$ y $\overline{M_3A} = \overline{M_3B}$ las medianas son: $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$ y $\overline{M_2M_3}$.

Las propiedades de las medianas las demostraremos oportunamente más adelante (N° 170).

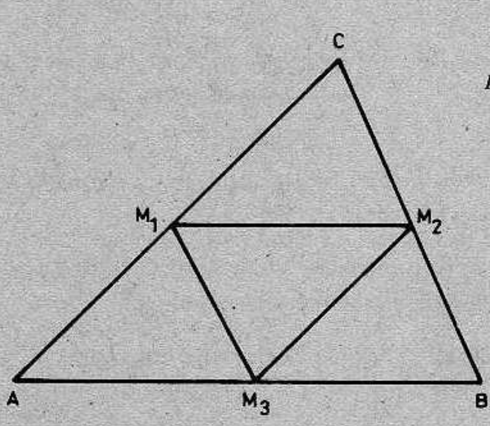


Fig. 7

8ª UNIDAD

Construcciones geométricas fundamentales (3ª parte). Dibujar geométricamente determinados ángulos. Trisección de un ángulo (90°, 45° y »otros«).

Ahora tenemos los conocimientos necesarios para construir geométricamente varios ángulos sin necesidad de emplear el transportador y empleando sólo la *regla y el compás.*

71. *PROBLEMA*

Dibujar geométricamente un ángulo de 60°.

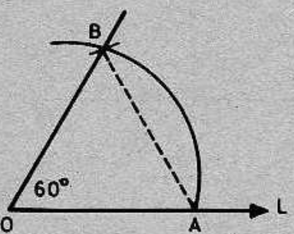


Fig. 1

Solución: 1) Se traza un rayo $\overline{OL}$ (Fig. 1).

2) Se dibuja un arco cualquiera de radio $\overline{OA}$.

3) Con este mismo radio se corta el arco dibujado desde A determinándose B.

4) Se une O con B formándose el ∡ AOB = = 60°, pues el △ OAB es equilátero.

72. *PROBLEMA*

Dibujar geométricamente un ángulo de 120°.

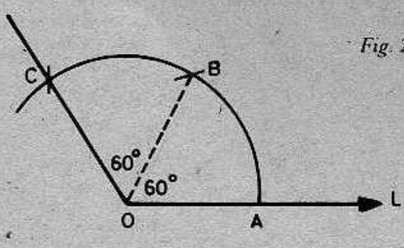


Fig. 2

Solución: 1) Se traza un arco cualquiera de centro O y radio $\overline{OA}$ (Fig. 2).

2) Con el mismo radio se corta el arco desde A y después desde B determinándose C.

3) El ∡ AOC = 120°, pues se compone de 60° + 60° = 120°.

73. *PROBLEMA*

Dibujar geométricamente un ángulo de 30°.

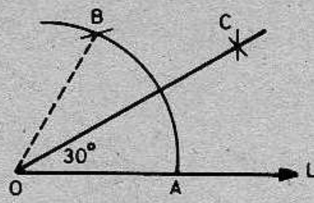


Fig. 3

Solución: Como $30° = \frac{60°}{2}$, basta dibujar un ángulo de 60° = ∡AOB y, en seguida, trazar la bisectriz de este ángulo (Fig. 3).

Resulta: ∡ AOC = 30°

74. *PROBLEMA*

Dibujar geométricamente un ángulo recto.

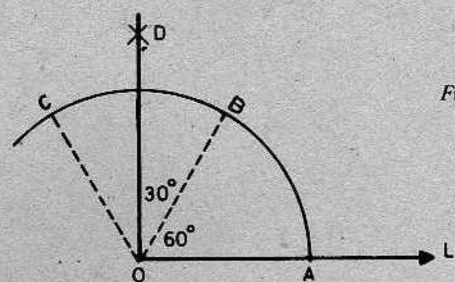


Fig. 4

Solución: Sabemos que: $90° = 60° + \frac{60°}{2}$

Por lo tanto: 1) Se dibuja el ∡ AOB = 60° y el ∡ BOC = 60° (Fig. 4).

2) Se traza la bisectriz $\overline{OD}$ del ∡ BOC.

Luego: ∡ AOD = ∡ AOB + ∡ BOD

∡ AOD = 60° + 30° = 90°

75. *PROBLEMA*

Dibujar geométricamente un ángulo de 45°.

Solución: $45° = \frac{90°}{2}$ por lo tanto, basta dibujar un ángulo de 90°, según el problema anterior (74) y trazar la bisectriz de este ángulo.

76. *PROBLEMA*

Dibujar geométricamente un ángulo de 150°.

Solución: $150° = 180° - \frac{60°}{2}$

1) Con centro O se dibuja una semicircunferencia (Fig. 5).

2) Desde B se corta con el radio de modo que ∡ BOC = 60°.

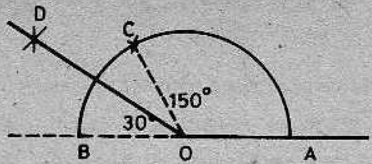


Fig. 5

3) Se traza $\overline{OD}$ = bisectriz del ∡ BOC.

Resulta: ∡ AOB − ∡ BOD = 180° − 30°. = 150° o bien:

∡ AOD = ∡ AOC + ∡ COD = 120° +30° = 150°.

¿Se le ocurre otra solución?

77. PROBLEMA

Dibujar geométricamente un ángulo de 75°.

Solución: $75° = \frac{150°}{2}$. Entonces, se dibuja un ángulo de 150° (según el probl. 76) y se traza la bisectriz.

¿Se le ocurre otra solución?

78. TRISECCION DE UN ANGULO

Desde la antigua Grecia han sido principalmente tres los problemas que han preocupado a los matemáticos de todos los tiempos: 1) trisección del ángulo; 2) cuadratura del círculo; 3) duplicación del cubo. En la resolución de estos problemas debe emplearse *sólo regla y compás.*

En cuanto a la trisección de un ángulo, es fácil resolverlo para ciertos ángulos especiales como 90°, 45° y 180°. Pero ha sido imposible resolverlo en forma general, es decir, para cualquier ángulo.

79. TRISECTAR UN ANGULO RECTO

1) Se dibuja un ángulo recto de acuerdo con el probl. 74.

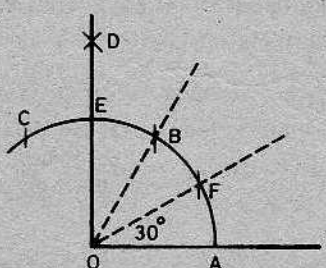


Fig. 6

2) Se traza la bisectriz del ∡ AOB = 60°; o bien, con el mismo radio se corta desde A y desde E (Fig. 6).

Resulta: ∡ AOF = ∡ FOB = ∡ BOE = 30°

80. PROBLEMA

Trisectar un ángulo de 45°.

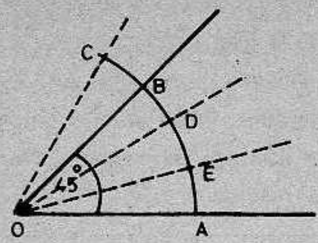


Fig. 7

Solución: Sea ∡ AOB = 45° (Fig. 7).

1) Se dibuja un arco ⊙ (O, $\overline{OA}$).

2) Desde A se corta este arco con el radio $\overline{OA} = \overline{AC}$.

3) Luego, se tiene: ∡ AOC = 60° de donde:

∡ BOC = 60° − 45° = 15°.

4) Se hace arco $\widehat{BC} = \widehat{BD} = \widehat{DE}$, por lo tanto:

∡ BOD = ∡ DOE = ∡ EOA = $15° = \frac{45°}{3}$

81. PROBLEMA

Trisectar cualquier ángulo.

Solución: La siguiente solución da resultados bastante exactos (Fig. 8).

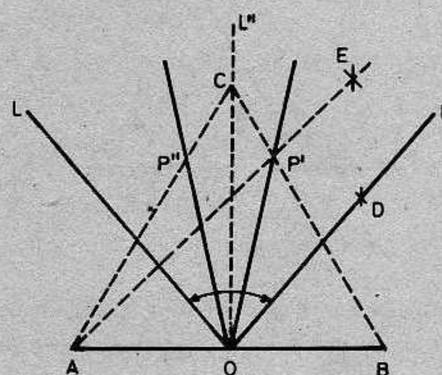


Fig. 8

1) Sea ∡ LOL' el ángulo a trisectar.

2) Se traza la bisectriz OL" de este ángulo.

3) En O se traza la perpendicular a esta bisectriz y se hace $\overline{OA} = \overline{OB}$.

4) Se hace $\overline{CA} = \overline{CB} = \overline{AB}$.

5) Arco ⊙ (A, AC) determina D sobre L'.

6) Con centro en C y D se trazan dos arcos que determinan E.

7) Al unir A con E se determina P'.

8) Se hace $\overline{CP"} = \overline{CP'}$.

Resulta: $\overline{OP'}$ y $\overline{OP"}$ son las trisectrices del ∡ LOL' y, por lo tanto:

∡ LOP" = ∡ P"OP' = ∡ P'OL'

9ª UNIDAD

Rectas paralelas cortadas por una transversal. Angulos correspondientes, alternos, contrarios o conjugados, y del mismo lado de la transversal o colaterales. Angulos de la misma naturaleza y de distinta naturaleza. Demostración indirecta o por reducción al absurdo. Angulos de lados paralelos.

---

82. RECTAS PARALELAS CORTADAS POR UNA TRANSVERSAL

Para ir acostumbrándonos al alfabeto griego usaremos las letras:

α = alfa; β = beta; γ = gama; δ = delta; ϵ = épsilon; φ = fi; ω = omega; η = eta; ρ = ro; μ = mu; π = pi, etc.

Sabemos que L'//L" y que L es la transversal o secante, es decir, que corta a las dos paralelas (Fig. 1).

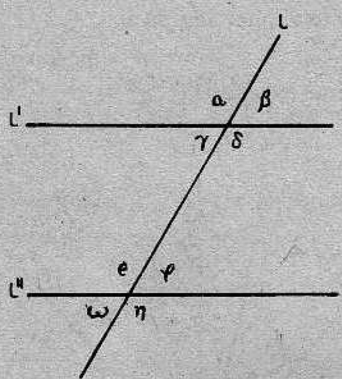


Fig. 1

Si analizamos estos ángulos aisladamente veremos que se han formado ángulos agudos (β, γ, φ, ω) y obtusos (α, δ, ϵ, η).

Si los analizamos por parejas veremos que existen ángulos opuestos por el vértice ($\alpha = \delta$, $\beta = \gamma$, $\epsilon = \eta$, $\varphi = \omega$), ángulos adyacentes ($\alpha + \beta = 180°$, $\alpha + \gamma = 180°$, $\epsilon + \varphi = 180°$, etc.), etcétera.

Pero, ahora, consideraremos y relacionaremos un ángulo del grupo de los cuatro de »arriba« con uno de los cuatro ángulos del grupo de »abajo«. De este modo podremos comparar los siguientes pares: (α, ϵ), (α, φ), (α, ω), (α, η), (β, ϵ), (β, φ), (β, ω), (β, η), etc.

Para poder estudiar las propiedades de los diferentes pares que se pueden formar, los clasificaremos y daremos un nombre especial a cada par:

A) *Angulos correspondientes entre paralelas:* son los que están al mismo lado de las paralelas y al mismo lado de la transversal.

Así, son »correspondientes« los ángulos: α con ϵ (los dos están »sobre« las paralelas y a la »izquierda« de la transversal).

β con φ (los dos están »sobre« las paralelas y a la »derecha« de la transversal).

γ con ω (los dos están »debajo« de las paralelas y a la »izquierda« de la transversal).

δ con η (los dos están »debajo« de las paralelas y a la »derecha« de la transversal).

B) *Angulos alternos entre paralelas:* son los que están a distinto lado de las paralelas y a distinto lado de la transversal.

Así, son »alternos« los ángulos: α con η (α está »sobre« las paralelas y η está »debajo« de ellas; α está a la »izquierda« y η a la »derecha« de la transversal).

Análogamente, lo son: β con ω, γ con φ, δ con ϵ.

Los pares (α, η) y (β, ω) se les llama »ángulos alternos externos« por quedar hacia el lado exterior de las paralelas; y a las parejas (γ, φ) y (δ, ϵ) se les llama »alternos internos« por quedar dentro de las paralelas.

C) *Angulos contrarios o conjugados:* son los que están al mismo lado de las paralelas y a distinto lado de la transversal. Estos son: α con φ; β con ϵ; γ con η; δ con ω.

D) *Angulos colaterales:* son los que están al mismo lado de la transversal y a distinto lado de las paralelas. Estos son:

α con ω; β con η; γ con ϵ; δ con φ.

83. Estas mismas cuatro clases de ángulos se forman también aunque las rectas no sean paralelas (Fig. 2), pero no poseen las propiedades que

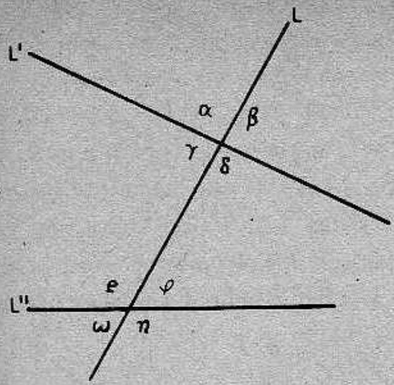


Fig. 2

demostraremos a continuación y que se cumplen *sólo* en el caso que las rectas L' y L'' sean paralelas.

84. TEOREMA IV

»Los ángulos correspondientes entre paralelas son iguales entre sí«.

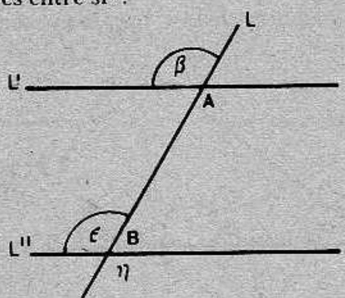


Fig. 3

H.) L'//L''; L = transversal (Fig. 3).
α y ϵ son ángulos correspondientes.

T.) $\alpha = \epsilon$.

D.) La demostración la haremos por traslación paralela.

Se traslada ϵ paralelamente a sí mismo hasta que su vértice B coincida con el vértice A del $\sphericalangle\alpha$. Al mismo tiempo el lado $\overline{BA}$ de ϵ coincide con el lado AL de α. Por lo tanto, al coincidir los lados de α con los lados de ϵ es porque estos ángulos son iguales. Es decir: $\alpha = \epsilon$.

85. TEOREMA V

»Los ángulos alternos entre paralelas son iguales«.

H.) L'//L''; L = transversal (Fig. 3).
α y η son alternos.

T.) $\alpha = \eta$.

D.) Sabemos que:

$\alpha = \epsilon$ (por Teor. IV).
$\underline{\eta = \epsilon}$ ($\sphericalangle$ opuestos vértice)
$\therefore\ \alpha = \eta$ (por Ax. E o transitividad).

86. TEOREMA VI

»Los ángulos contrarios o conjugados entre paralelas son suplementarios«.

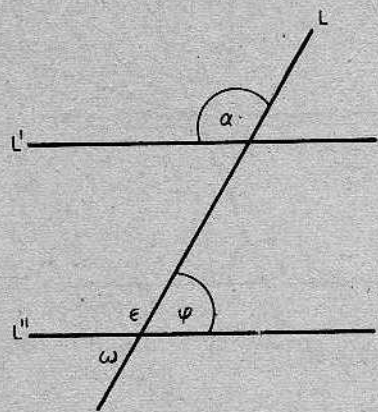


Fig. 4

H.) L'//L''; L = transversal (Fig. 4)
α y φ son ángulos contrarios.

T.) $\alpha + \varphi = 180°$

D.) $\epsilon + \varphi = 180°$ (son $\sphericalangle$ adyacentes).
$\underline{\epsilon = \alpha}$ ($\sphericalangle$ corresp. entre //).
$\therefore\ \alpha + \varphi = 180°$ (por Ax. D)

87. TEOREMA VII

»Los ángulos colaterales de la transversal son suplementarios«.

H.) L'//L''; L = transversal
α y ω son ángulos colaterales (Fig. 4).

T.) $\alpha + \omega = 180°$

D.) $\epsilon + \omega = 180°$ (son $\sphericalangle$ adyacentes).
$\underline{\epsilon = \alpha}$ ($\sphericalangle$ corresp. entre //).
$\therefore\ \alpha + \omega = 180°$ (por Ax. D).

Observación: A todos los ángulos agudos los consideraremos como »ángulos de la misma naturaleza«; análogamente, todos los ángulos obtusos son también de la misma naturaleza. En cambio, cuando consideremos un ángulo agudo y uno obtuso diremos que son »de distinta naturaleza«.

De acuerdo con esta convención podemos enunciar el siguiente

88. TEOREMA VIII

»Al cortarse dos rectas paralelas por una transversal, los ángulos de la misma naturaleza que se forman son iguales entre sí y los ángulos de distinta naturaleza son suplementarios«.

89. TEOREMA IX

»Si una recta corta a otras dos formando ángulos correspondientes iguales, las rectas son paralelas«.

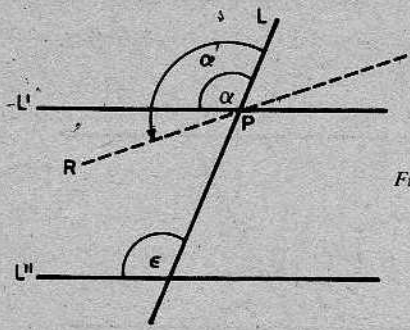


Fig. 5

H.) $\alpha = \epsilon$ (Fig. 5).

T.) L'//L''

D.) Haremos una demostración *por reducción al absurdo* o *demostración indirecta.*

Este método de demostración consiste en negar la tesis para, en seguida, razonando correctamente se llega a un absurdo, lo que obliga a aceptar la tesis como verdadera.

En este teorema al negar la tesis se supone que las rectas L' y L'' no son paralelas. Por lo tanto, de acuerdo con el 5° Postulado de Euclides, por el punto P se puede trazar la recta R paralela a L''. De esta manera tendríamos:

$\alpha' = \epsilon$ (por ser R // L'').

pero $\underline{\alpha = \epsilon}$ (por Hip.)

∴ $\alpha = \alpha'$ lo que es absurdo, pues »el todo no es igual a una de sus partes«. Por lo tanto, para que $\alpha = \alpha'$ debe coincidir R con L', es decir, debe ser L'//L''.

90. TEOREMA X

»Si una recta corta a una de dos paralelas, también corta a la otra«.

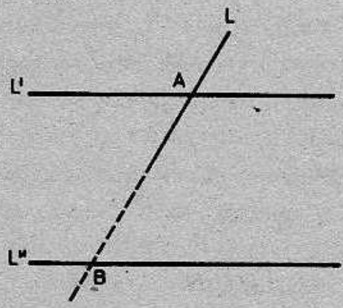


Fig. 6

H.) L' // L'' (Fig. 6)

L ∩ L' = {A}

T.) L ∩ L'' = {B}

D.) Lo demostraremos »por reducción al absurdo« y, por lo tanto, supondremos que L no corta a L''.

Pero si L no corta a L'' significa que L debe ser paralela a L'' y de este modo tendríamos por A dos paralelas a L''. Esta conclusión es un absurdo porque por el punto A existe sólo una paralela a L''. Por lo tanto, L corta también a L''.

91. TEOREMA XI

»Si una recta es perpendicular a una de dos paralelas, también lo es a la otra«.

(Demuéstrelo usted por »reducción al absurdo«).

92. TEOREMA XII

»Dos ángulos de la misma naturaleza que tienen sus lados respectivamente paralelos, son iguales entre sí«.

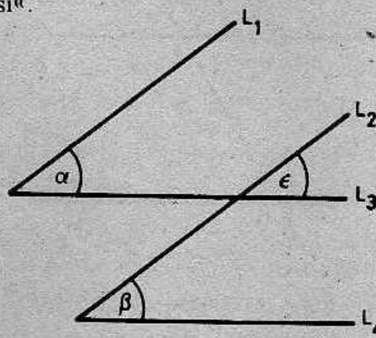


Fig. 7

H.) $L_1 // L_2$ y $L_3 // L_4$ (Fig. 7)

α y β son ángulos de la misma naturaleza (los dos son agudos, pero podrían ser los dos obtusos).

T.) $\alpha = \beta$

D.) $\alpha = \epsilon$ (∡ correspond. entre //)

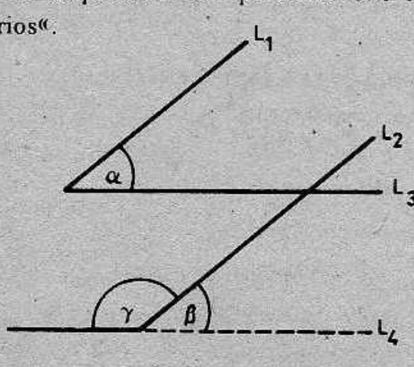
$\underline{\beta = \epsilon}$ (∡ correspond. entre //)

∴ $\alpha = \beta$ (por transitividad o Ax. E)

93. TEOREMA XIII

»Dos ángulos de distinta naturaleza que tienen sus lados respectivamente paralelos son suplementarios«.

Fig. 8



H.) $L_1 // L_2$ y $L_3 // L_4$ (Fig. 8)

α y γ son ∢ de distinta naturaleza.

T.) $\alpha + \gamma = 180°$

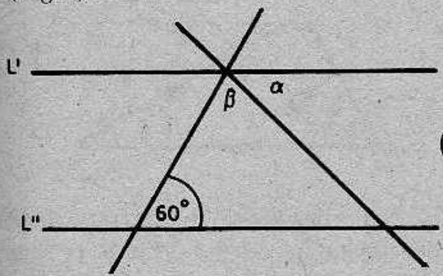
D.) $\beta + \gamma = 180°$ (∢ adyacentes)

$\underline{\beta = \alpha \text{ (Teor. XII)}}$

$\therefore \alpha + \gamma = 180°$ (por Ax. D)

94. *EJERCICIOS*

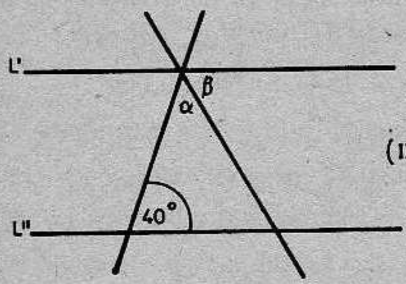
1) Si L' // L'', entonces la medida del ángulo α, sabiendo que β mide la mitad de α, es (Fig. I):



(I)

A) 40°; B) 80°;
C) 60°; D) 90°;
E) 75°.

2) En la figura II, calcular α si $\alpha : \beta = 2:5$ y siendo L' // L'', se obtiene sólo una alternativa correcta:

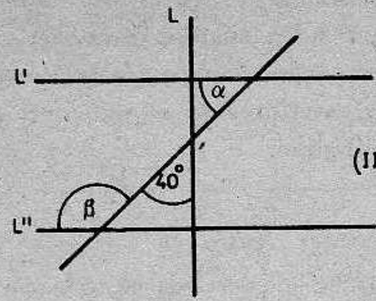


(II)

A) $\alpha = 40°$; B) $\alpha = 100°$;
C) $\alpha = 20°$; D) $\beta = 50°$;
E) $\beta = 120°$.

3) En la figura III la recta L es perpendicular a L' y L''. Entonces, los ángulos α y β satisfacen sólo una de las alternativas siguientes:

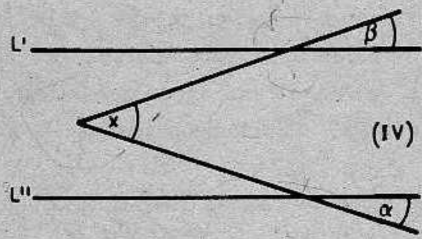
A) $\alpha = 40°, \beta = 140°$;
B) $\alpha = 50°, \beta = 130°$;
C) $\alpha = 40°, \beta = 100°$;



(III)

D) $\alpha = 60°, \beta = 120°$;
E) $\alpha = 20°, \beta = 160°$.

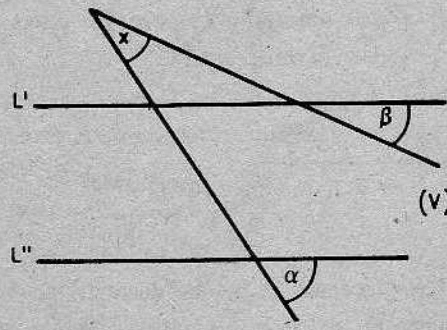
4) En la figura IV las rectas L' y L'' son paralelas. El ángulo »x« en función de α y β mide:



(IV)

A) $\alpha - \beta$; B) $\beta - \alpha$;
C) $\frac{1}{2} \cdot (\alpha + \beta)$; D) $2 \cdot (\alpha - \beta)$;
E) $\alpha + \beta$.

5) En la figura V las rectas L' y L'' son paralelas. Entonces, el ángulo »x« en función de α y β, mide:



(V)

A) $\alpha - \beta$; B) $\beta - \alpha$;
C) $\frac{1}{2} \cdot (\alpha + \beta)$; D) $2 \cdot (\alpha - \beta)$;
E) $\frac{1}{4} \cdot (\alpha + \beta)$.

6) Aprovechando el Teor. IV o V, trazar por un punto P la paralela a una recta L.

Resp.: 1-B; 2-A; 3-B; 4-E; 5-A.

10ª UNIDAD

Teoremas sobre ángulos interiores y exteriores de un triángulo. Corolario. Escolio. Angulos de lados perpendiculares. Angulos interiores de un cuadrilátero. Suma de los ángulos interiores y exteriores de un polígono. Angulo de un polígono regular. Número de diagonales de un polígono.

---

95. TEOREMA XIV

»Los ángulos interiores de un triángulo suman 180°«.

(Ya fue demostrado intuitivamente en el Nº 55).

H.) α, β, γ son ∡ interiores del △ ABC.

T.) $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

D.) Por uno de los vértices del △ ABC se traza la paralela al lado opuesto, por ejemplo, L // $\overline{AB}$. De este modo que forman los ángulos α' y β', obteniéndose (Fig. 1):

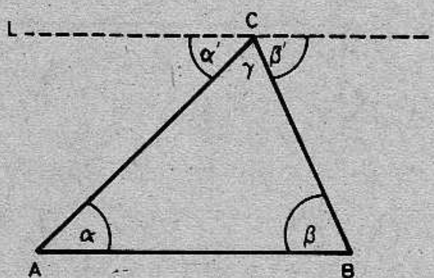


Fig. 1

$\alpha' = \alpha$ (son ∡ alt. entre // siendo $\overline{AC}$ la transversal).

$\beta' = \beta$ (son ∡ alt. entre // siendo $\overline{BC}$ la transversal).

pero

$\alpha' + \beta' + \gamma = 180°$ (forman un ∡ extendido)

$\therefore\ \alpha + \beta + \gamma = 180°$ (por Ax. D)

96. Este teorema lo hemos demostrado en forma general, es decir, es válido para cualquier triángulo. Pero si los aplicamos a triángulos especiales podemos obtener algunas conclusiones particulares, o sea, válidas *sólo* para casos especiales o particulares. Las conclusiones para casos particulares que se deducen de un teorema demostrado en forma general, se llaman *corolarios* (o escolios). Nosotros usaremos el término »corolario«, pues »escolio« debe usarse mejor en el sentido de »observación«.

De acuerdo con lo anterior, del Teorema XIV recién demostrado podemos obtener o deducir los siguientes corolarios:

1) En un triángulo rectángulo los ángulos agudos suman 90°. Es decir: $\alpha + \beta = 90°$ (Fig. 2).

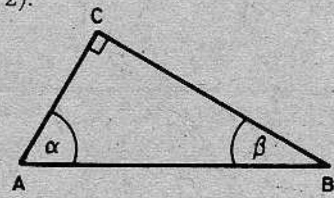


Fig. 2

2) En un triángulo rectángulo isósceles cada ángulo agudo mide 45° (Fig. 3).

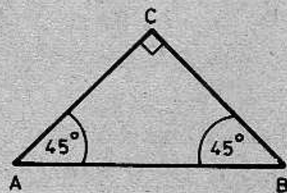


Fig. 3

3) Cada ángulo de un triángulo es el suplemento de la suma de los otros dos.

Si $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, resulta:

$\alpha = 180° - (\beta + \gamma)$; o bien: $\beta + \gamma = 180° - \alpha$

$\beta = 180° - (\alpha + \gamma)$; o bien: $\alpha + \gamma = 180° - \beta$

$\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$; o bien: $\alpha + \beta = 180° - \gamma$.

4) Cada ángulo de un triángulo equilátero mide 60°.

5) Cada ángulo basal α de un triángulo isósceles mide:

$$\alpha = 90° - \frac{1}{2} \cdot \gamma \text{ (Fig. 4).}$$

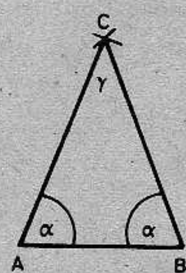


Fig. 4

97. TEOREMA XV

»Dos ángulos de la misma naturaleza y que tienen sus lados respectivamente perpendiculares son iguales entre sí«.

H.) $\overline{AB} \perp \overline{CB}$ y $\overline{AD} \perp \overline{CD}$

α y β son ángulos de la misma naturaleza (los dos son agudos) (Fig. 5).

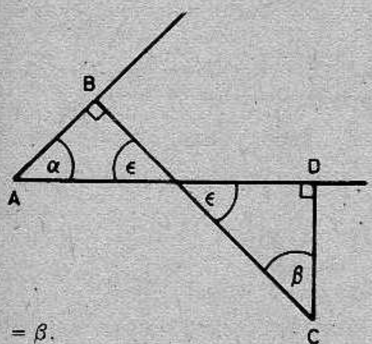


Fig. 5

T.) $\alpha = \beta$.

D.) Los ángulos ϵ son iguales por ser opuestos por el vértice. Además, los triángulos que se forman son rectángulos. Luego (Fig. 5):

$$\begin{array}{l} \alpha = 90^\circ - \epsilon \\ \underline{\beta = 90^\circ - \epsilon} \end{array}$$

$\therefore\ \alpha = \beta$ (transitividad o Ax. E).

98. TEOREMA XVI

»Dos ángulos de distinta naturaleza que tienen sus lados respectivamente perpendiculares son suplementarios« (Fig. 6).

H.) $\overline{AB} \perp \overline{CB}$ y $\overline{AD} \perp \overline{CD}$

α y γ son ángulos de distinta naturaleza (uno es agudo y el otro es obtuso).

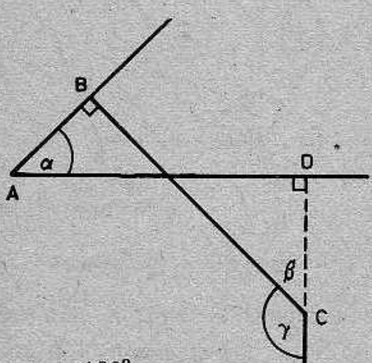


Fig. 6

T.) $\alpha + \gamma = 180^\circ$

D.) $\beta + \gamma = 180^\circ$ (son ∢ adyacentes).

$\underline{\beta = \alpha}$ (por Teor. XV).

$\therefore\ \alpha + \gamma = 180^\circ$ (por Ax. D).

99. TEOREMA XVII

»El ángulo exterior en un vértice de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes con él«.

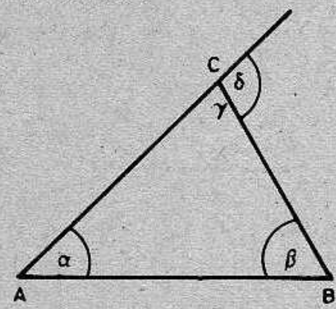


Fig. 7

H.) δ = ∢ exterior en el vértice C del △ ABC (Fig. 7).

T.) $\delta = \alpha + \beta$

D.) $\delta + \gamma = 180^\circ$ (son ∢ adyacentes).

$\underline{\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ}$ (por Teor. XIV).

$\therefore \begin{cases} \delta + \gamma = \alpha + \beta + \gamma & \text{(por transitividad).} \\ \gamma = \gamma & \text{(por Ax. C).} \end{cases}$

$\therefore\ \delta = \alpha + \beta$ (por Ax. F).

Otra demostración (Fig. 8):

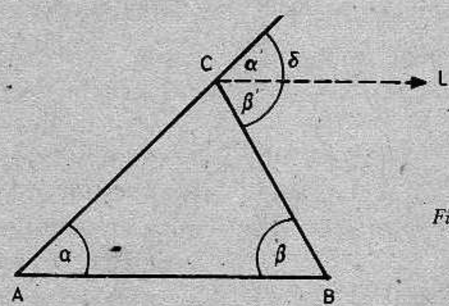


Fig. 8

D.) Por el vértice C se traza el rayo L || $\overline{AB}$. Se obtiene:

$\alpha' = \alpha$ (son ∢ correspond. entre ||).

$\beta' = \beta$ (son ∢ alternos entre ||)

pero $\underline{\delta = \alpha' + \beta'}$ (por Ax. B).

$\therefore\ \delta = \alpha + \beta$ (por Ax. D).

100. COROLARIO DE ESTE TEOREMA (Fig. 9).

»El ángulo exterior en el vértice de un triángulo isósceles es igual al doble del ángulo basal«.

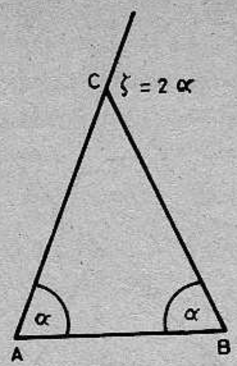


Fig. 9

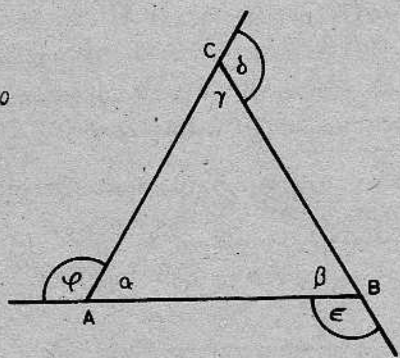
Es decir:

si $\overline{CA} = \overline{CB} \Longrightarrow \delta = 2 \cdot \alpha$.

101. TEOREMA XVIII

»Los ángulos exteriores de un triángulo suman 360°«.

Fig. 10



H.) $\delta, \epsilon, \varphi$ son ángulos exteriores (Fig. 10)

T.) $\delta + \epsilon + \varphi = 360°$

D.)

$$+\left\{\begin{array}{ll} \alpha + \varphi = 180° & \text{(son ∡ adyacentes)} \\ \beta + \epsilon = 180° & \text{(son ∡ adyacentes)} \\ \gamma + \delta = 180° & \text{(son ∡ adyacentes)} \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{∡ int.} + \text{∡ ext.} & = 540° \\ \text{∡ int.} & = 180° \end{array}\right\} -$$

$$\therefore \text{∡ ext.} = 360°.$$

Otra demostración:

$$+\left\{\begin{array}{ll} \delta = \alpha + \beta & \text{(por Teor. XVII)} \\ \epsilon = \alpha + \gamma & \text{(por Teor. XVII)} \\ \varphi = \beta + \gamma & \text{(por Teor. XVII)} \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned} \delta + \epsilon + \varphi &= 2\cdot\alpha + 2\cdot\beta + 2\cdot\gamma \\ &= 2\cdot(\alpha + \beta + \gamma) \\ &= 2 \cdot 180° \\ &= 360°. \end{aligned}$$

102. TEOREMA XIX

»Los ángulos interiores de un cuadrilátero suman 360°«.

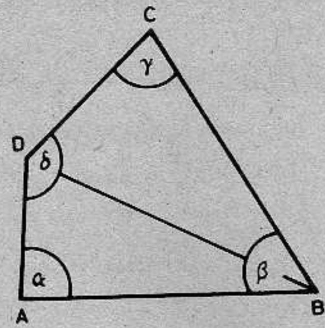


Fig. 11

H.) $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ son ∡ interiores (Fig. 11)

T.) $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$

D.) Se traza una diagonal.

(Diagonal es el trazo que se obtiene al unir dos vértices no vecinos de un polígono). De esta manera se forman dos triángulos en los cuales se verifica:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{ángulos del } \triangle \text{ ABD} & = 180° \\ \text{ángulos del } \triangle \text{ BCD} & = 180° \end{array}\right\} +$$

$$\text{cuadrilátero ABCD} = 360°$$

103. TEOREMA XX

Si un polígono tiene »n« lados, la suma de sus ángulos interiores vale $180° \cdot (n - 2)$.

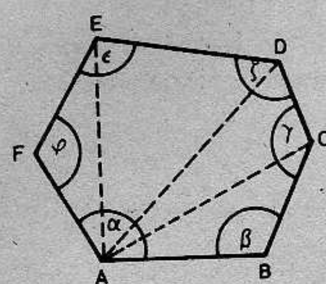


Fig. 12

H.) $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon \ldots =$ ∡ interiores (Fig. 12).

T.) $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon \ldots = 180° \cdot (n - 2)$.

D.) Se descompone el polígono en triángulos por medio de las diagonales que parten de un vértice. Se encuentra que el número de triángulos que se forman es siempre inferior en 2 unidades al número de lados. Por ejemplo:

Si n = 4 (cuadrilátero)	se forman $(4-2)\ \triangle$ =	$2 \cdot \triangle$	$\Longrightarrow 180° \cdot 2$
Si n = 5 (pentágono)	se forman $(5-2)\ \triangle$ =	$3 \cdot \triangle$	$\Longrightarrow 180° \cdot 3$
Si n = 6 (exágono)	se forman $(6-2)\ \triangle$ =	$4 \cdot \triangle$	$\Longrightarrow 180° \cdot 4$
Si n = 12 (dodecágono)	se forman $(12-2)\ \triangle$ =	$10 \cdot \triangle$	$\Longrightarrow 180° \cdot 10$
Si n = n (cualquiera)	se forman $(n-2)\ \triangle$ =	$(n-2) \cdot \triangle$	$\Longrightarrow 180° \cdot (n-2)$.

Como la suma de todos los ángulos de todos los triángulos que se forman equivale a la suma de todos los ángulos del polígono se obtiene:

$$\sum_{n=3}^{n} \measuredangle \text{ (polígonos)} = 180° \cdot (n-2).$$

El símbolo Σ (letra griega: sigma mayúscula) se emplea para indicar *suma* de términos o *sumatoria*.

104. *COROLARIO*

Si el polígono es regular de »n« lados tiene »n« ángulos iguales y, por lo tanto, cada ángulo de un polígono regular mide:

$$\alpha = \frac{180° \cdot (n-2)}{n}$$

Definición: Polígono regular es el que tiene todos los lados y todos los ángulos iguales.

105. *TEOREMA XXI*

»Los ángulos exteriores de cualquier polígono suman 360°«.

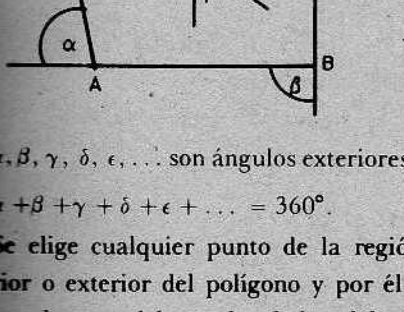


Fig. 13

H.) $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \ldots$ son ángulos exteriores.

T.) $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon + \ldots = 360°$.

D.) Se elige cualquier punto de la región interior o exterior del polígono y por él se trazan las paralelas a los lados del polígono (Fig. 13).

Según el Teor. x se tiene:

$\alpha' = \alpha, \beta' = \beta, \gamma' = \gamma, \delta' = \delta$, etc.

pero $\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' + \epsilon' = 360°$

Por lo tanto: $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon = 360°$.

Trate usted de encontrar otra demostración:

Por ejemplo:

$$-\begin{cases} \measuredangle \text{ int.} + \measuredangle \text{ ext.} = \ldots \\ \measuredangle \text{ int.} \qquad\quad\ = \ldots \end{cases}$$
$$\overline{\qquad \measuredangle \text{ ext.} = \ldots \qquad}$$

106. *EJERCICIOS*

1) Un ángulo agudo de un triángulo rectángulo mide 62°28'. ¿Cuánto mide el otro ángulo agudo?
2) Un ángulo de un triángulo mide 72°54' y otro de sus ángulos mide 52°49'. ¿Cuánto mide el tercer ángulo?
3) La suma de dos ángulos de un triángulo es 145° y la diferencia de ellos es 55°. ¿Cuál es la medida de los ángulos del triángulo?
4) El ángulo del vértice de un triángulo isósceles mide 40°. ¿Cuánto mide cada ángulo basal?
5) Demostrar que si un polígono tiene »n« lados, el total de diagonales que se pueden trazar es:

$$d = \frac{n}{2} \cdot (n-3).$$

6) ¿Cuántas diagonales pueden trazarse en un dodecágono?
7) Si en un polígono se pueden trazar 20 diagonales, ¿cuántos lados tiene?
8) ¿Cuántos lados tiene el polígono convexo en el cual se pueden trazar 90 diagonales?
9) ¿Cuántos lados tiene un polígono regular si cada uno de sus ángulos mide 162°?
10) ¿Cuánto suman los ángulos interiores de un pentadecágono convexo?
11) ¿Cuánto mide el ángulo del decágono regular convexo?
12) Cada ángulo de un polígono regular mide $0{,}9\,\pi$ radianes. ¿Cuántos lados tiene el polígono?

13) Si el ángulo exterior en un vértice de un triángulo es el doble del ángulo adyacente a él, entonces marque la alternativa que *no* es posible:

A) el △ puede ser obtusángulo;

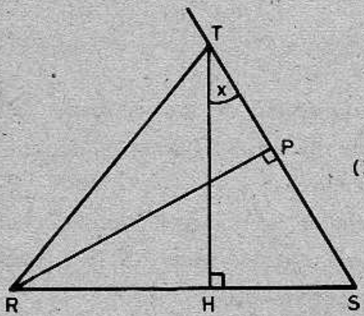
B) puede ser △ rectángulo;

C) puede ser △ acutángulo;

D) puede ser △ isósceles;

E) puede ser △ equilátero.

14) En el triángulo RST se trazan las alturas $\overline{TH}$ y $\overline{RP}$. Si $\overline{RS}$ es el doble de $\overline{SP}$, entonces la medida del ángulo »x« es (Fig. I):



(I)

A) 60°; B) 45°;

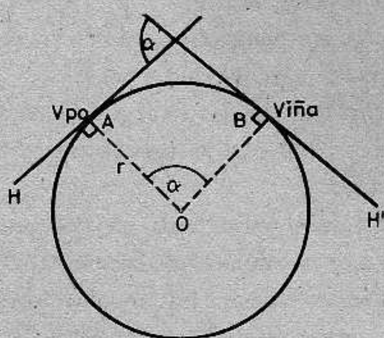
C) 30°; D) 22°,5;

E) 15°.

15) ¿Cuál es el ángulo que forman los horizontes de Valparaíso y de Viña del Mar si estas dos ciudades están a 5 km y el radio terrestre mide 6.370 km?

1ª solución: Sabemos que la vertical de un lugar es perpendicular al plano del horizonte y, por lo tanto:

$\overline{AH} \perp \overline{OA}$ y $\overline{BH'} \perp \overline{OB}$ (Fig. II).



(II)

De acuerdo con el Teor. XV, el ángulo α' formado por los horizontes en Valparaíso y en Viña es igual al ángulo formado por las verticales en estos lugares (son ángulos de lados perpendiculares): $\alpha = \alpha'$

Luego: α (radianes) $= \frac{\text{arco } \widehat{AB}}{\text{radio}} = \frac{5 \text{ km}}{6370 \text{ km}} =$ 0,000785 rad. = 2'41''

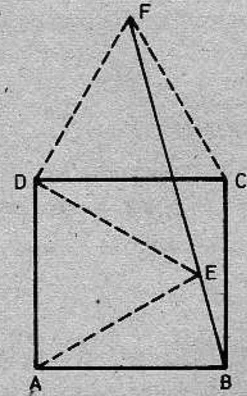
2ª solución:

$$\frac{\text{arco } \widehat{AB}}{2\pi r} = \frac{\alpha}{360^\circ} \Longrightarrow \alpha = \frac{180^\circ \cdot \widehat{AB}}{\pi r}$$

Sustituyendo se obtiene:

$$\alpha = \frac{180^\circ \cdot 5 \text{ km}}{3{,}14 \cdot 6.370 \text{ km}} = 0^\circ{,}044976 = 2'41'',9.$$

16) En el cuadrado ABCD de lado »a« se traza $\overline{AE} = \overline{DE} = \overline{DF} = \overline{CF}$ (Fig. III).



(III)

Demostrar que los puntos B, E y F son colineales, es decir, están sobre la misma recta.

(Indicación: basta demostrar que $\sphericalangle$BEA + $\sphericalangle$AED + $\sphericalangle$DEF = 180°).

17) En la figura III, con las mismas condiciones del problema anterior, calcular la medida del $\sphericalangle$ DFB.

18) En la figura III calcular la medida del ángulo CBF.

19) En la figura III calcular la medida del $\sphericalangle$FDB (fórmelo usted).

20) En la figura III demostrar que

$\sphericalangle$ CFB : $\sphericalangle$ BFD = 1 : 3.

Resp.: 1) 27°32'; 2) 54°17'; 3) 100°; 45°; 35°; 4) 70°; 6) 54; 7) 8; 8) pentadecágono; 9) icoságono; 10) 2.340°; 11) 144°; 12) 20; 13) D; 14) C; 17) 45°; 18) 15°; 19) 105°.

107. TESTS

1) El ángulo exterior en un vértice de un triángulo es el doble de su ángulo adyacente. Entonces, el triángulo es:

A) equilátero; B) isósceles;
C) rectángulo; D) escaleno;
E) falta mayor información.

2) El ángulo exterior en un vértice de un triángulo es el doble de su ángulo adyacente. Entonces, ¿cuál de los siguientes triángulos *no* puede ser?
A) equilátero; B) isósceles;
C) rectángulo; D) escaleno;
E) obtusángulo.

3) Si $\overline{TH}$ es altura del $\triangle$ SRT, entonces el ángulo »x« mide (Fig. 1):
A) 20°;
B) 35°;
C) 45°;
D) 30°;
E) 70°.

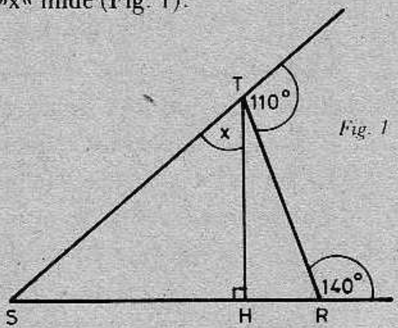
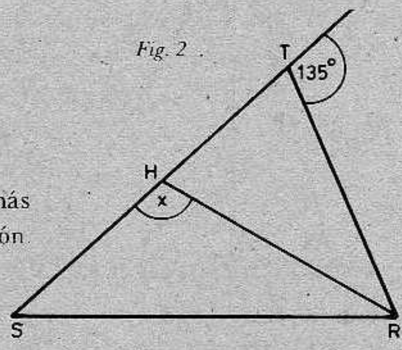


Fig. 1

4) En la figura 2, $\overline{RH}$ es bisectriz del ángulo SRT. Entonces, la medida del ángulo »x« es:
A) 35°;
B) 20°;
C) 45°;
D) 90°;
E) falta más información

Fig. 2


5) En el $\triangle$ SRT (Fig. 3), se sabe que $\overline{TS} = \overline{TR}$ y ∢ STR = 36°. Además, el ángulo β es el doble del ángulo α. Entonces, la medida del ángulo »x« es:
A) 72°;
B) 60°;
C) 96°;
D) 84°;
E) 108°.

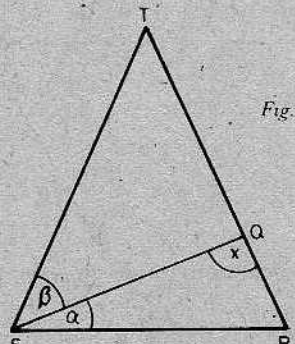


Fig. 3

6) Las bisectrices en S y R (Fig. 4), se cortan formando un ángulo »x«. Si L_1 // L_2, entonces la medida de »x« es:

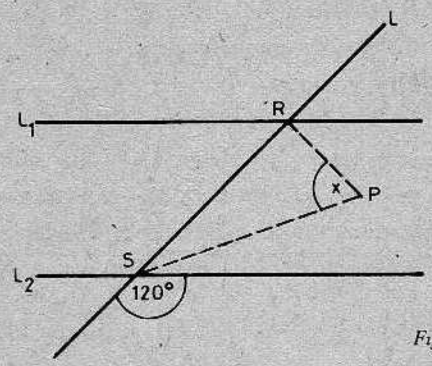


Fig. 4

A) 100°; B) 50°;
C) 40°; D) 75°;
E) 90°.

7) Por el punto de tangencia de dos circunferencias (Fig. 5), se trazan dos rectas que forman un ángulo »x«. Entonces, »x« equivale a:

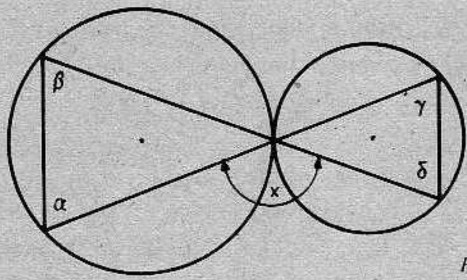


Fig. 5

A) $\alpha + \beta + \gamma + \delta$;
B) $2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta$;
C) $\frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma + \delta)$;
D) $(\alpha + \beta) - (\gamma + \delta)$;
E) otro valor.

8) El ángulo exterior en el vértice de un triángulo es el triple de su ángulo adyacente. Entonces, el triángulo *no* puede ser:
A) isósceles;
B) obtusángulo;
C) rectángulo;
D) isósceles-rectángulo;
E) equilátero.

9) El ángulo exterior en un vértice de un triángulo es la tercera parte de su ángulo

interior adyacente. Entonces, el triángulo *no* puede ser:

A) escaleno;
B) isósceles;
C) obtusángulo-isósceles;
D) acutángulo;
E) obtusángulo-escaleno.

10) Dos rectas paralelas L_1 y L_2 son cortadas por otra recta L. Las bisectrices de los ángulos en R y S se cortan determinando un ángulo »x« que mide (Fig. 6):

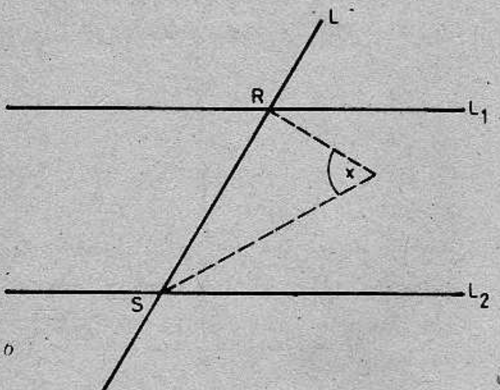


Fig. 6

A) cualquier valor menor que 180°;
B) cualquier valor entre 90° y 180°;
C) cualquier valor entre 45° y 90°;
D) 90°
E) falta más información.

11) En el triángulo isósceles STQ se traza $\overline{SV} \perp \overline{TQ}$ y $\overline{VM} \perp \overline{ST}$. Siendo 40° la medida del ángulo QSV, entonces »x« mide (Fig. 7):

A) 40°;
B) 20°;
C) 50°;
D) 25°;
E) 30°.

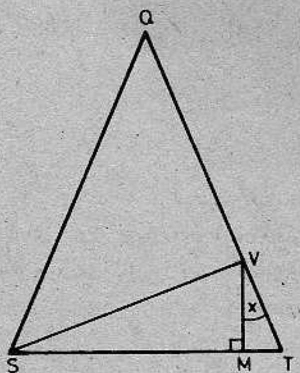


Fig. 7

12) Si x = 45°, y = 135°, entonces el triángulo STQ es (Fig. 8):

I) isósceles;
II) obtusángulo;
III) rectángulo.

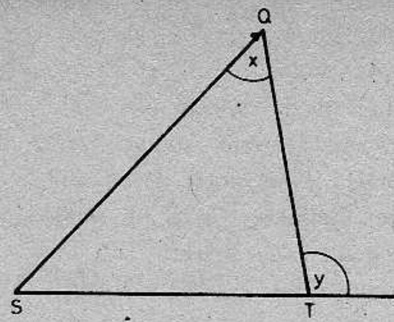


Fig. 8

De estas afirmaciones son verdaderas sólo:

A) I; B) II;
C) III; D) I y II;
E) I y III.

13) En el triángulo RST se traza la altura $\overline{TH}$ y las bisectrices de los ángulos en H y en S. La medida d. l ángulo »x« que forman estas bisectrices es (Fig. 9):

A) β; B) 60°;
C) $\alpha - \beta$; D) $\frac{1}{2}\alpha$;
E) 75°.

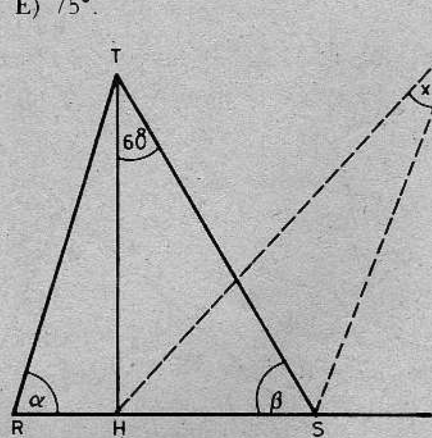


Fig. 9

14) Si las rectas L_1 y L_2 son paralelas, el ángulo »x« que forman las otras dos rectas al cortarse, mide (Fig. 10):

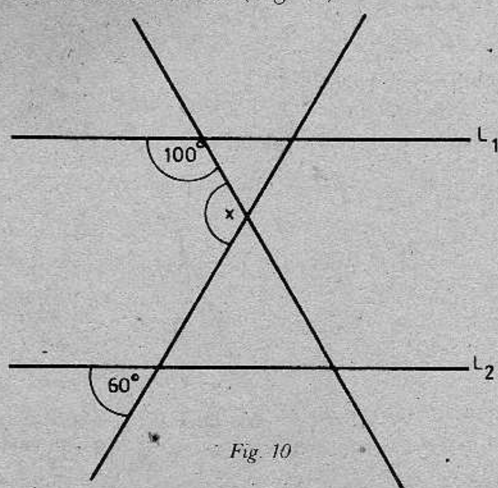


Fig. 10

A) 120°; B) 140°;
C) 150°; D) 160°;
E) 80°.

15) En el cuadrado RSTQ se hace $\overline{QV}$ igual a la diagonal $\overline{QS}$. Entonces, el ángulo »x« mide (Fig. 11):

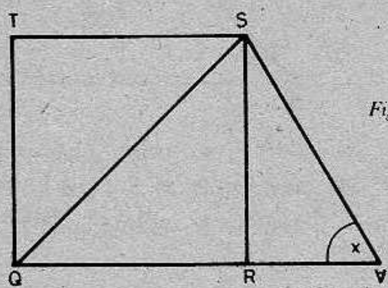


Fig. 11

A) 30°; B) 45°;
C) 60°; D) 22°30';
E) 67°30'.

16) En un triángulo uno de los ángulos es el 50% de uno de los otros dos y el $33\frac{1}{3}$% del tercero. Entonces, el ángulo menor de los tres mide:

A) 15°; B) 30°;
C) 45°; D) 60°;
E) ninguno de estos valores.

17) El triángulo del problema anterior es:

A) isósceles-rectángulo;
B) obtusángulo;
C) acutángulo;
D) equilátero;
E) rectángulo-escaleno.

18) En el triángulo SRT se traza $\overline{RL}$ // $\overline{ST}$. Entre los ángulos »x« e »y« se cumple una de las siguientes relaciones (Fig. 12):

A) x = y; B) x + y = s + t;
C) r + x = y; D) s + r = x + y;
E) x + y = s + r − t.

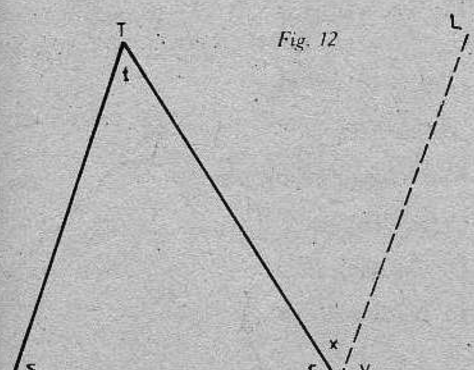
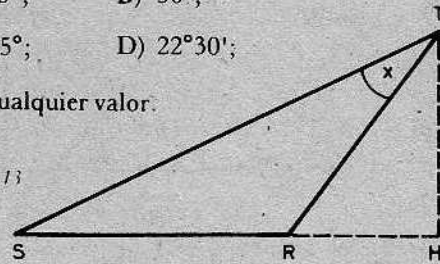


Fig. 12

19) En el triángulo isósceles SRT se traza la altura $\overline{TH}$. Para que resulte $\overline{RH}$ = $\overline{TH}$ el ángulo »x« debe medir (Fig. 13):

A) 15°; B) 30°;
C) 45°; D) 22°30';
E) cualquier valor.

Fig. 13



20) En el triángulo QRT se tiene $\overline{TQ}$ = $\overline{TR}$. La medida del ángulo »x« es (Fig. 14):

A) 40°;
B) 20°;
C) 80°;
D) 100°;
E) 50°.

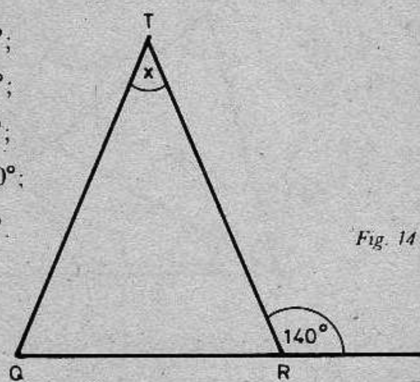


Fig. 14

21) En el triángulo SRT la transversal $\overline{TL}$ es bisectriz del ángulo en T. Entonces, el triángulo SRT es (Fig. 15):

A) isósceles;
B) rectángulo-isósceles;
C) equilátero;
D) obtusángulo;
E) rectángulo.

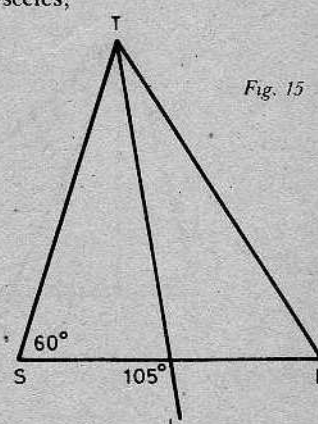


Fig. 15

22) Desde un punto P se trazan las perpendiculares a los lados del △ SRQ en el cual α = 35° y β = 45°. Marque cuál de las siguientes relaciones es la correcta (Fig. 16):

A) $y - x = 65°$;

B) $x + y = 100°$;

C) $xy = 180°$;

D) $x : y = 9 : 20$;

E) $y - 2x = 0°$.

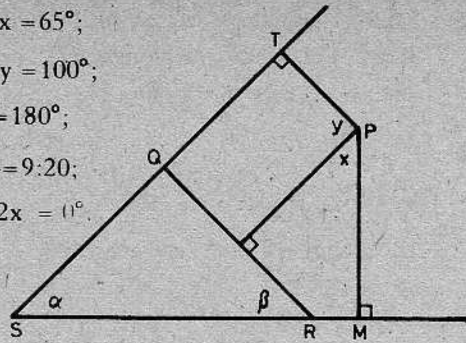


Fig. 16

23) En el triángulo SRT se traza la bisectriz $\overline{SL}$ del ángulo α. La medida de este ángulo es (Fig. 17):

A) 30°;

B) 60°;

C) 50°;

D) 65°;

E) 75°

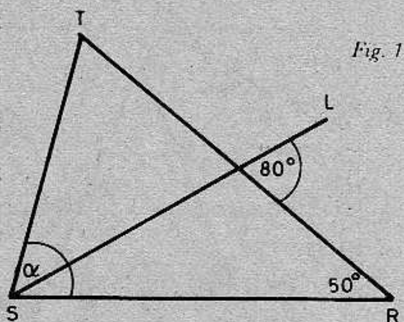


Fig. 17

24) Si un polígono regular tiene doce lados, cada uno de sus ángulos mide:

A) 60°; B) 75°;
C) 105°; D) 120°;
E) 150°.

25) En el triángulo SRT la transversal $\overline{TL}$ es la bisectriz del ángulo STR (Fig. 18).

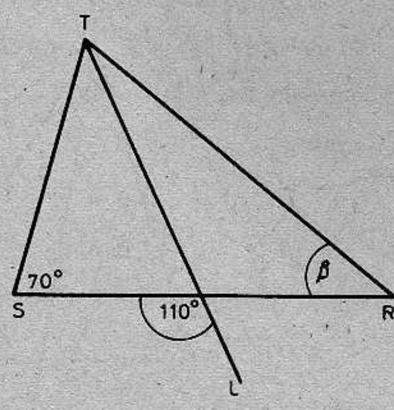


Fig. 18

Entonces, el ángulo β mide:

A) 30°; B) 60°;
C) 50°; D) 65°;
E) 40°.

26) En el cuadrilátero SRTQ se cumple una de las siguientes alternativas (Fig. 19):

A) $\delta = 180° - \gamma$;

B) $\alpha + \beta = \gamma + \delta$;

C) $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$.

D) $\alpha + \beta = \delta - \gamma$

E) $\delta = 180° - \alpha$

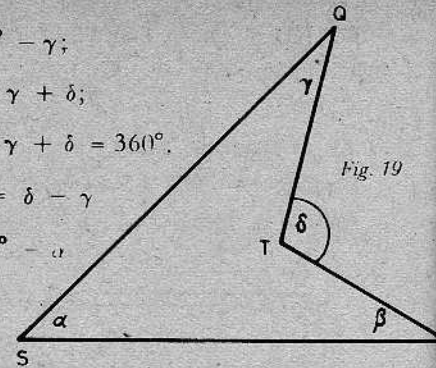


Fig. 19

27) En el $\triangle$ SRT se traza una transversal $\overline{TQ}$ de modo que el ∡ TQR = 120°. Entonces, el ángulo »x« mide (Fig. 20):

A) 20°

B) 40°;

C) 60°;

D) 30°;

E) 80°.

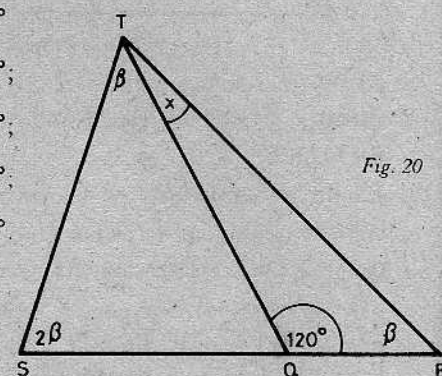


Fig. 20

28) En el triángulo QRT el valor del ángulo »z« es (Fig. 21):

A) 15°;

B) 20°;

C) 25°;

D) 30°;

E) 40°.

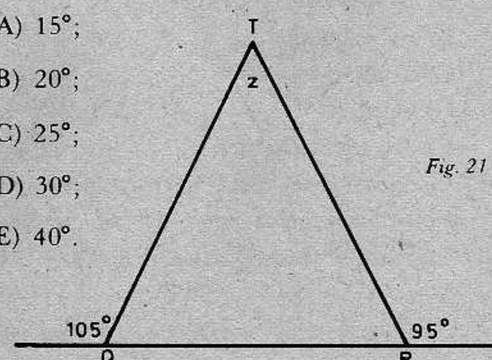


Fig. 21

29) En el triángulo MNP se verifica que: $y = 2x$, $z = x + y$. Entonces, este triángulo es (Fig. 22):

A) isósceles;

B) rectángulo-isósceles;

C) equilátero;

D) obtusángulo;

E) rectángulo.

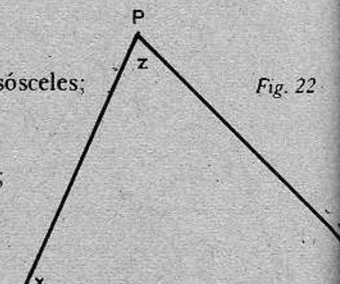


Fig. 22

30) Los ángulos interiores de un triángulo son x, y, z. Se sabe de estos ángulos que $x:y:z = 2:3:4$. Se afirma que entre ellos existen las siguientes relaciones (Fig. 22):

I) $x + y = 100°$;

II) $x - y = 20°$;

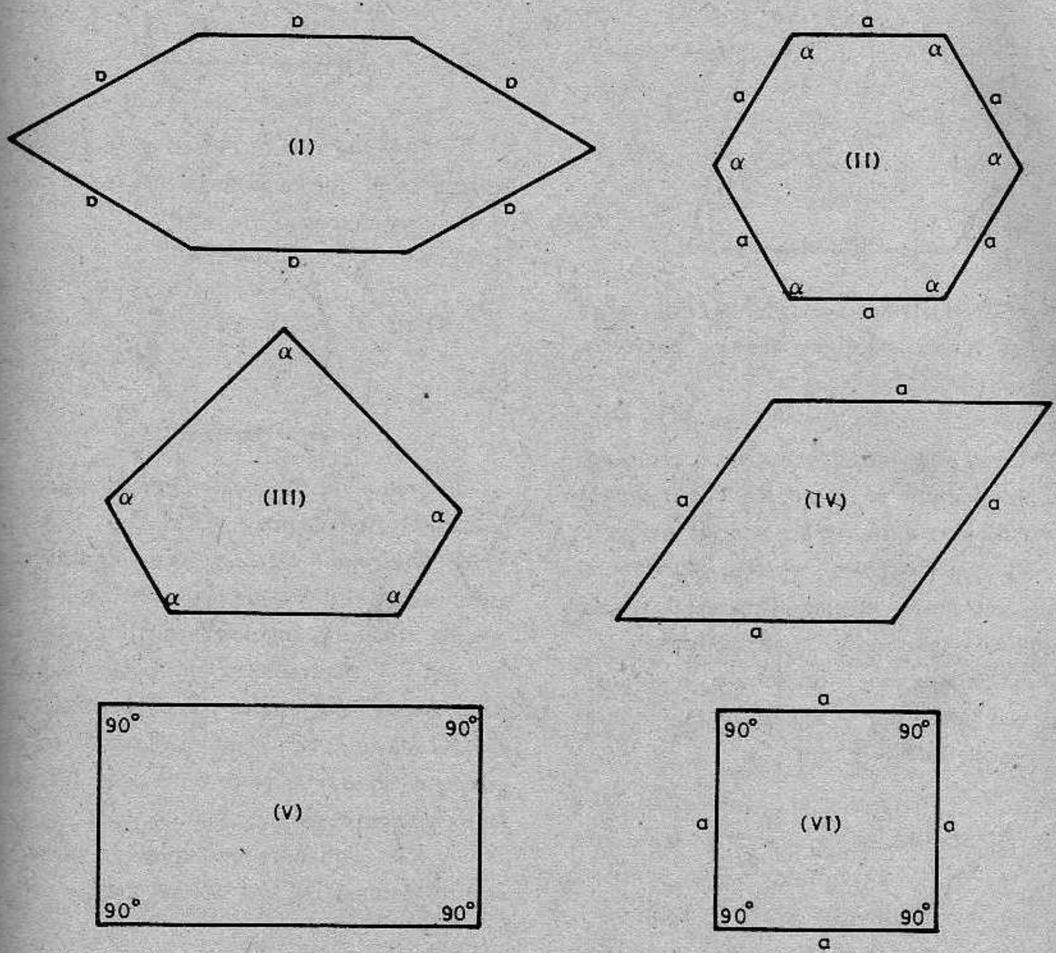
III) $z - y = 20°$.

De estas relaciones son verdaderas sólo:

A) I; B) II;
C) III; D) I y II;
E) I y III.

Resp.: 1) E; 2) B; 3) A; 4) E; 5) D; 6) E; 7) C; 8) E; 9) D; 10) E; 11) D; 12) E; 13) A; 14) B; 15) E; 16) B; 17) E; 18) B; 19) D; 20) D; 21) E; 22) D; 23) B; 24) D; 25) A; 26) D; 27) A; 28) B; 29) E; 30) E.

EJERCICIOS



Indique dentro del paréntesis el o los números romanos correspondientes a los polígonos pedidos:

1.( ) ¿Cuáles de estos polígonos son sólo equiláteros?

2.( ) ¿Cuáles son sólo isógonos?

3.( ) ¿Cuáles son equiláteros e isógonos al mismo tiempo?

4.( ) ¿Cuáles son regulares?

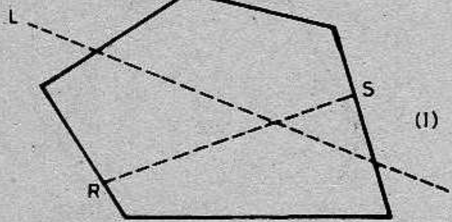
5.( ) ¿Cuáles son polígonos rectangulares?

Construcciones geométricas fundamentales (4ª parte). Polígonos inscritos y circunscritos. Construcción de polígonos regulares. Polígonos estrellados.

Completaremos, ahora, lo que ya hemos adelantado más atrás sobre los polígonos. De ellos existen diversas clases diferentes, no sólo por el número de lados, sino por la manera cómo están formados. Así podemos distinguir:

108. A) POLIGONOS IRREGULARES

Son los que tienen sus lados y ángulos desiguales (Fig. I).

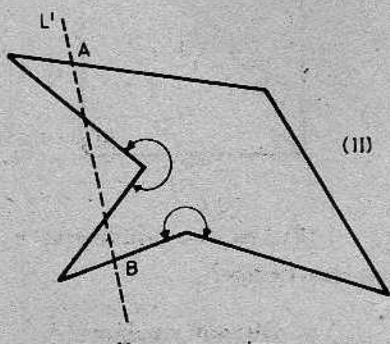


(I)

B) *Polígonos convexos* (Fig. I). Son aquéllos en los cuales todos los ángulos interiores miden menos de 180°.

Al unir dos puntos cualesquiera de la frontera de estos polígonos (perímetro o contorno) se obtiene siempre un trazo $\overline{RS}$ cuyos puntos pertenecen todos a la región interior del polígono (salvo los extremos); o bien, al cortar el polígono por medio de una transversal L ésta corta como máximo a dos lados del polígono.

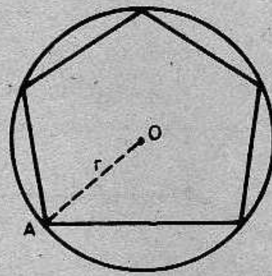
C) *Polígonos cóncavos* (o no convexos). Son los que tienen por lo menos un ángulo interior mayor que 180° (Fig. II).



(II)

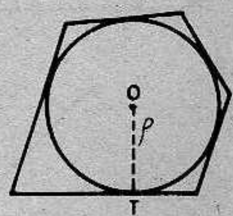
En estos polígonos existen transversales que cortan a más de dos lados, tal como L'. Además, los puntos del trazo $\overline{AB}$ que determina esta transversal no pertenecen todos a la región interior del polígono.

D) *Polígono inscrito* en una circunferencia es el que tiene *todos sus vértices* sobre ella. El radio de la circunferencia circunscrita al polígono se designa por $r = \overline{OA}$ (Fig. III).



(III)

E) *Polígono circunscrito* a una circunferencia es el que tiene *todos los lados tangentes* a la circunferencia (Fig. IV).



(IV)

El radio de la circunferencia inscrita al polígono se designa por $\rho = \overline{OT}$.

F) *Polígono regular.* Ya dijimos más atrás que es el que tiene todos los lados de igual medida y todos los ángulos de igual medida.

Así, el cuadrado es un polígono regular (tiene los 4 lados iguales y los 4 ángulos iguales a 90° cada uno). En cambio, el rombo no es un polígono regular porque tiene sólo los cuatro lados iguales pero no sus ángulos.

A todo polígono regular se le puede inscribir o circunscribir una circunferencia.

109. CICLOTOMIA

Se refiere a la división de una circunferencia en »n« partes iguales y, por lo tanto, equivale a dividir el ángulo de 360° en »n« partes iguales o a construir un polígono regular de »n« lados.

A continuación nos dedicaremos a la construcción de algunos polígonos regulares y más adelante (33ª Unidad) calcularemos la longitud de sus lados en función del radio »r«.

110. *CONSTRUCCION DE POLIGONOS REGULARES*

Problema 1) Construir un cuadrado inscrito en una circunferencia (Fig. 1).

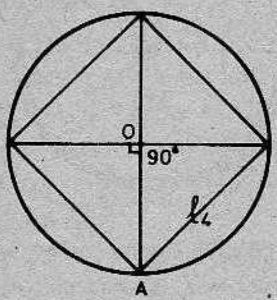


Fig. 1

Solución: Basta trazar dos diámetros perpendiculares y unir sus extremos.

Designando por l_4 el lado del cuadrado, resulta: $\overline{AB} = l_4$. El ángulo del centro AOB mide 90°.

Problema 2) Construir un octógono regular inscrito en una circunferencia.

Solución: 1) Se trazan dos diámetros perpendiculares (Fig. 2).

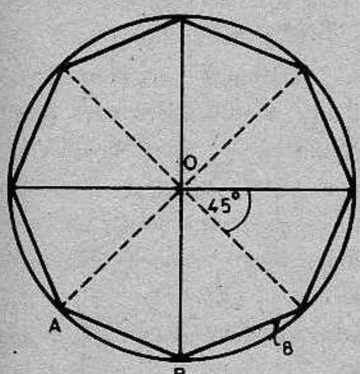


Fig. 2

2) Se trazan las bisectrices de los ángulos del centro de 90°.

3) Se unen sucesivamente los puntos obtenidos sobre la circunferencia, resultando $\overline{AB} = l_8$ el lado del octógono. En este polígono el ángulo del centro mide 45°.

Así podríamos seguir construyendo el polígono de 16, 32, 64 ... lados. Es lo que se conoce como la *serie del cuadrado:*

4, 8, 16, 32 ... $= 4 \cdot 2^n$ siendo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$.

Problema 3) Construir, un exágono regular inscrito en una circunferencia.

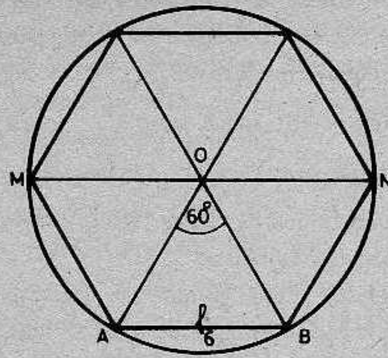


Fig. 3

Solución: 1) Se traza un diámetro $\overline{MN}$ (Fig. 3).

2) Se trisecta el $\measuredangle$ MON = 180° para lo cual basta cortar con el radio desde M y N. Se obtiene: AB $= l_6$ que es el lado del exágono.

El ángulo del centro es $\measuredangle$ AOB = 60°.

Problema 4) Construir un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia.

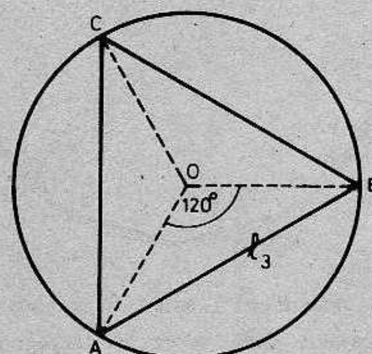


Fig. 4

Solución: 1) Se procede igual que en el exágono aplicando el radio sucesivamente como cuerda (Fig. 4).

2) Al unir »punto por medio« se obtiene el triángulo equilátero inscrito de lado $\overline{AB} = l_3$ y ángulo del centro AOB = 120°.

Problema 5) Construir el dodecágono regular inscrito en una circunferencia.

Solución: 1) Se procede igual que en el exágono obteniéndose seis ángulos del centro de 60° c/u.

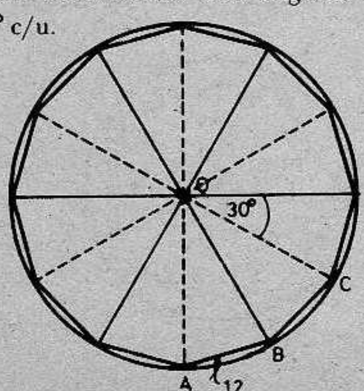


Fig. 5

2) Se **trazan las bisectrices de** estos ángulos y se **unen sucesivamente** los puntos obtenidos **en la circunferencia.** Resulta (Fig. 5):

$\measuredangle AOB = 30° \Longrightarrow \overline{AB} = l_{12}$.

Otra construcción:

1°) Se marcan los extremos A,B,C y D de dos diámetros perpendiculares.

2°) Desde estos puntos se corta la circunferencia con una magnitud igual al radio.

3°) Se unen sucesivamente los puntos obtenidos resultando al dodecágono regular.

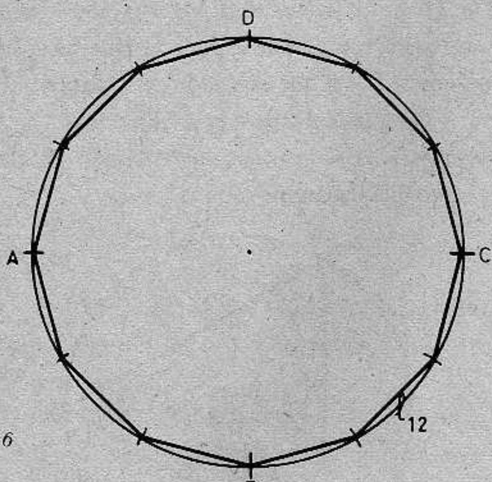


Fig. 6

Así podríamos seguir construyendo lo que se conoce como »serie del triángulo o del exágono« que representa a los polígonos de 3, 6, 12, 24... lados $= 3 \cdot 2^n$ siendo $n \in \mathbb{N}$ y $n \geq 0$.

Problema 6) Construir un pentágono regular inscrito en una circunferencia.

Solución: La construcción más simple y rápida consiste en dibujar, con la ayuda de un transportador, un ángulo del centro de 72° puesto que $\alpha = 360° : 5 = 72°$.

Por lo tanto, resulta: $\overline{AB} = l_5$ (Fig. 7).

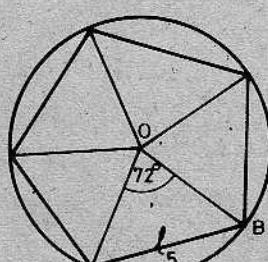


Fig. 7

Problema 7) Construir un decágono regular inscrito en una circunferencia.

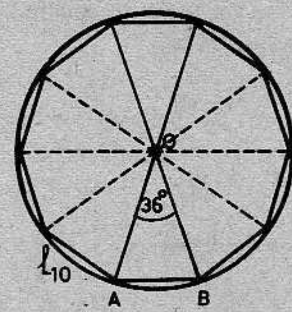


Fig. 8

Solución: Análogamente como se hizo en el pentágono bastaría dibujar con el transportador un ángulo del centro de 36° puesto que $360° : 10 = 36°$. Entonces: $\overline{AB} = l_{10}$ (Fig. 8). (Más adelante, en la 33ª Unidad, veremos y demostraremos otras construcciones para l_5 y l_{10}).

Podríamos seguir con polígonos de 20, 40, 80, ... lados y obtener la »serie del pentágono«: $5, 10, 20, \ldots = 5 \cdot 2^n$ siendo $n \in \mathbb{N}$ y $n \geq 0$.

Problema 8) Construir un polígono regular de »n« lados siendo $n > 4$.

Solución: Daremos un método bastante aproximado que es útil tanto para dibujar un polígono regular como para dividir una circunferencia en arcos iguales. Tomemos, por ejemplo, $n = 9$, es decir, dibujar un nonágono regular o, bien, dividir una circunferencia en 9 arcos iguales.

a) Se trazan dos diámetros perpendiculares (Fig. 9).

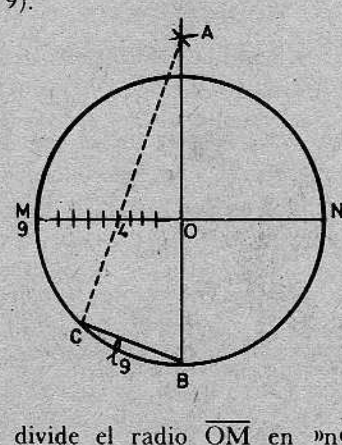


Fig. 9

b) Se divide el radio $\overline{OM}$ en »n« partes iguales que, en nuestro ejemplo, son 9 partes iguales.

c) Con centro en M y radio $\overline{MN}$ se corta la prolongación del otro diámetro determinándose el punto A.

d) Se une A *siempre* con la 4ª división del radio y se prolonga hasta cortar la circunferencia en un punto C.

e) La cuerda $\overline{BC}$ es el lado del polígono regular pedido. Con el compás se mide esta cuerda y se la aplica sucesivamente a partir de B o C cortando la circunferencia.

En nuestro ejemplo se tiene:

f) cuerda $\overline{BC} = l_9$.

g) arco $\widehat{BC} = \frac{1}{9}$ de la circunferencia.

Problema 9) En una circunferencia de centro O se aplica como cuerda y a partir de un punto A una magnitud igual al lado del exágono regular ($\overline{AB} = l_6$), en seguida, el lado del cuadrado ($\overline{BC} = l_4$) y a continuación el lado del dodecágono ($\overline{CD} = l_{12}$). Demostrar que los puntos A, O y D son colineales.

Problema 10) Construcción aproximada del heptágono regular. 1) A partir de un punto A de la circunferencia se aplica el radio como cuerda dos veces sucesivas: $\overline{AB} = \overline{BC} = r$ (Fig. 10).

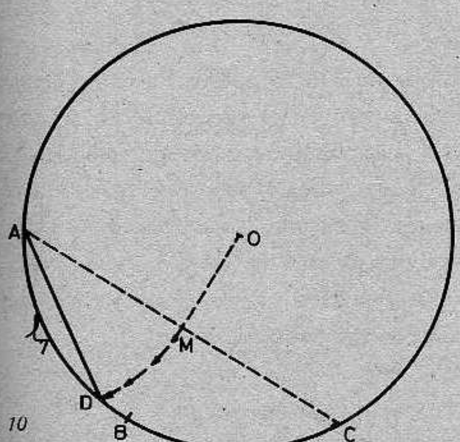


Fig. 10

2) Se une A con C determinándose $\overline{AC} = l_3$.

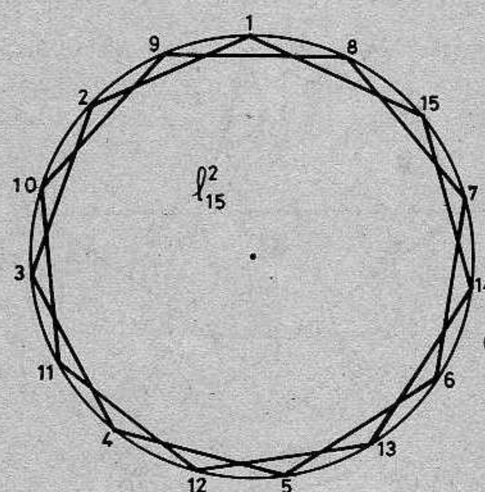
3) Se une O con B determinándose el punto medio M de $\overline{AC}$.

4) Resulta $\overline{AM} = l_7$, muy aproximadamente, el lado del heptágono (equivale aproximadamente a la mitad del lado l_3 del triángulo).

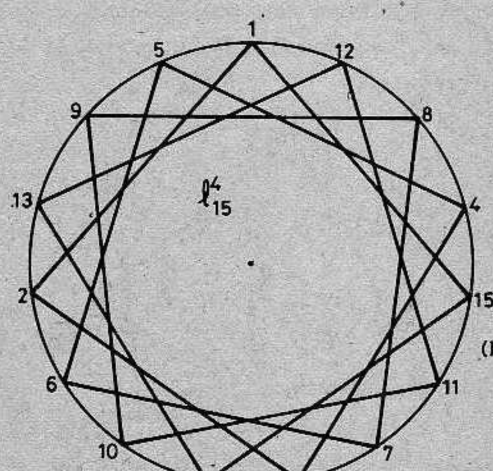
$\overline{AD} = \overline{AM} = l_7$.

111. POLIGONOS ESTRELLADOS

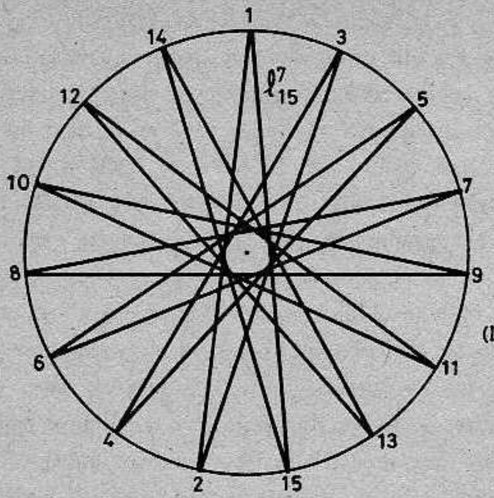
Son los que se obtienen al dividir la circunferencia en determinado número de partes iguales y unir los puntos obtenidos de 2 en 2, de 3 en 3, etc., de modo que se *cierre el polígono* en el punto de partida. No siempre esto es posible. Por ejemplo, un caso interesante en este aspecto es el pentadecágono regular convexo que se obtiene al unir sucesivamente los 15 puntos que se obtienen al dividir la circunferencia en 15 partes iguales. Pero, si ahora se unen los puntos de dos en dos se obtiene el polígono estrellado que muestra la figura I cuyo lado se designa l^2_{15}; si se unen los puntos de 4 en 4 se obtiene otro polígono estrellado (figura II), cuyo lado se designa l^4_{15}; y si, finalmente, unimos los puntos de 7 en 7 se obtiene el polígono estrellado de lado l^7_{15} de la figura III. No hay más pentadecágonos estrellados.



(I)

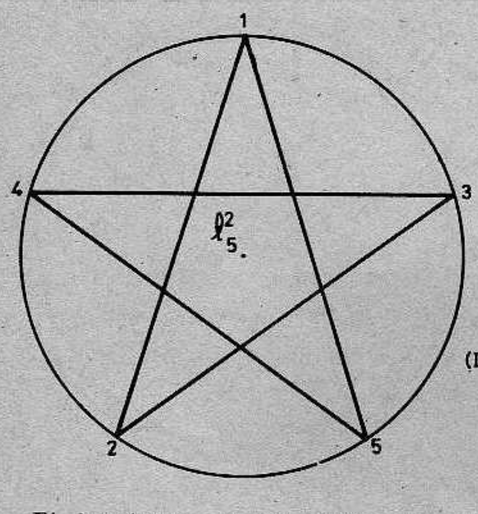


(II)



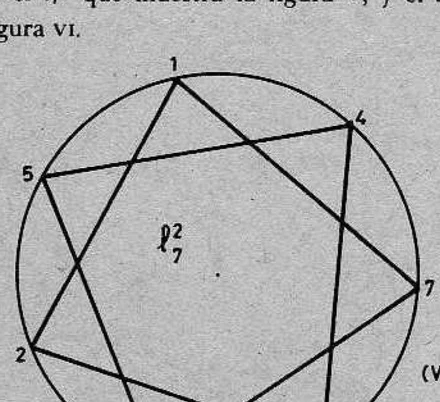
(III)

Para nosotros el polígono estrellado más conocido es la estrella de cinco puntas, ya que forma parte de nuestro emblema patrio y se obtiene al unir punto por medio (de 2 en 2) los vértices del pentágono regular convexo. Su lado se designa l_5^2 (figura IV).

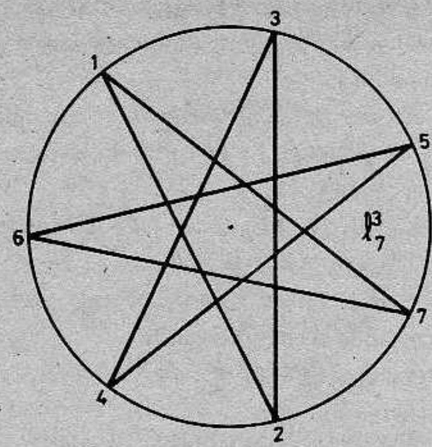


(IV)

El heptágono da dos polígonos estrellados: el l_7^2 que muestra la figura V, y el l_7^3 de la figura VI.

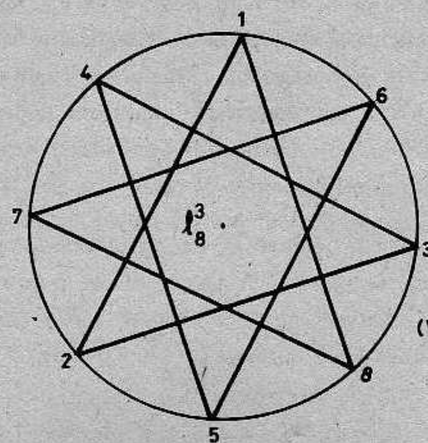


(V)



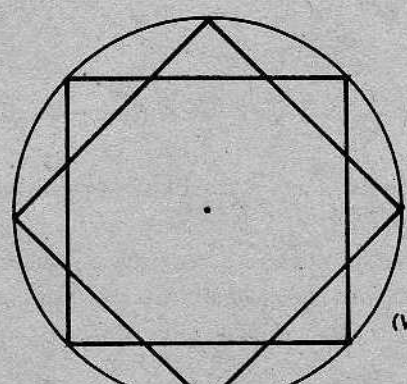
(VI)

El octógono da sólo un polígono estrellado de lado l^3_8 (Fig. VII).

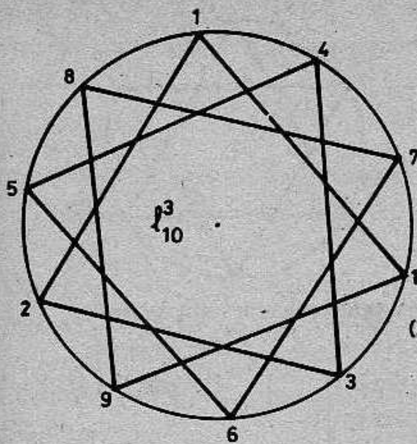


(VII)

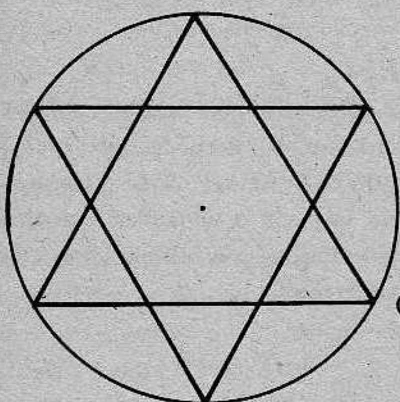
La figura VIII en apariencia es un octógono estrellado, pero no lo es porque no se obtiene por una línea continua y cerrada como las anteriores en los cuales el punto de partida y el de llegada es el mismo. Lo mismo sucede con el exágono que muestra la figura X y con el decágono de la figura XI. Estos casos se consideran como dos polígonos sobrepuestos.



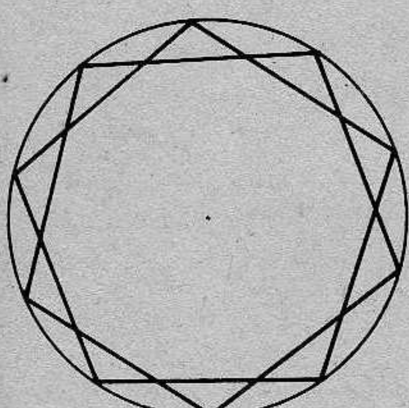
(VIII)



(IX)



(X)



(XI)

En general, si es »n« el número de partes iguales en que se divide la circunferencia, los polígonos estrellados que se pueden obtener serán tantos como sean los números primos menores que $\frac{n}{2}$, pero »números primos entre sí«.

Por ejemplo, si n = 15 los números 2, 4 y 7 son primos entre sí con 15 y son los únicos menores de 15/2. Por lo tanto, el pentadecágono da origen hasta tres polígonos estrellados.

Para n = 5 sólo se obtiene el número 2 y, por lo tanto, el pentágono da origen sólo a un polígono estrellado.

Para n = 10 se obtiene sólo el número 3.

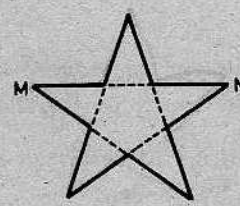
Para n = 7 se obtiene el 2 y el 3.

Finalmente, diremos que un polígono estrellado puede considerarse como derivado de un polígono central cuyos lados se han prolongado.

112. EJERCICIOS

1) Si en la figura I el lado $\overline{MN}$ de la estrella mide 15 cm, entonces la longitud del contorno (perímetro) de esta estrella mide:

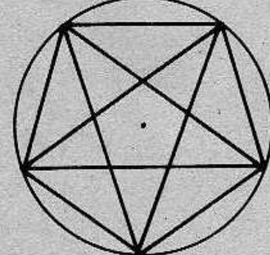
A) 75 cm;
B) 50 cm;
C) 25 cm;
D) 100 cm;
E) otro valor.



(I)

2) Dentro de un pentágono regular se ha dibujado una estrella. El total de trapecios isósceles que se han formado es (Fig. II):

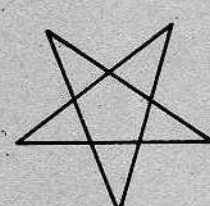
A) 4;
B) 5;
C) 8;
D) 10;
E) no hay trapecios isósceles.



(II)

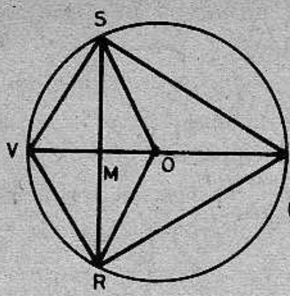
3) En la estrella de la figura III el total de triángulos isósceles que se han formado es:

A) 5;
B) 8;
C) 10;
D) 12;
E) 15.



(III)

4) En el círculo de la figura IV se traza el diámetro $\overline{VT}$. Además, por el punto medio M de $\overline{VO}$ se traza la perpendicular $\overline{RS}$. Entonces, al unir los puntos, se forma un máximo de:



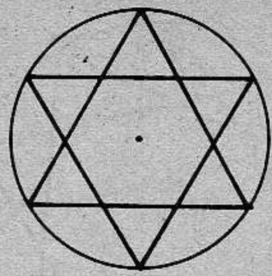
(IV)

A) 1 △ equilátero y 8 △ rectángulos.
B) 2 △ equiláteros y 6 △ rectángulos.
C) 3 △ equiláteros y 4 △ isósceles.
D) 7 △ isósceles y 7 △ rectángulos.
E) 4 △ isósceles y 6 △ rectángulos.

5) Dentro de un exágono se forma una estrella de seis puntas (Estrella de David).

Se afirma que se forman en total:

I) tres rombos;
II) seis trapecios isósceles;
III) ocho triángulos equiláteros.



(V)

De estas afirmaciones son correctas:

A) las tres; B) ninguna;
C) sólo la II; D) sólo II y III;
E) sólo I y III.

Resp.: 1-E; 2-D; 3-C; 4-C; 5-A.

113. TAREA

Sobre una tabla o en una lámina de »pluma-vit« dibuje un polígono estrellado, por ejemplo el representado en la figura II o III. Clave en cada vértice una tachuela o un alfiler y únalos, siguiendo los números, con hilos de colores o lana de colores diferentes.

 Luis Saavedra

Lugares Geométricos (Primera parte). Problemas de aplicación.

114. DEFINICION

»Un conjunto de puntos que cumplen todos con una misma condición o propiedad constituye un *Lugar Geométrico*«.

Abreviadamente lo denotaremos por L.G. y éste puede ser una línea curva, una recta, un plano, una superficie curva, etc.

Como a través de este libro tendremos que referirnos en su desarrollo, más de una vez, a determinados L.G., le asignaremos, por comodidad, un número a cada uno de ellos.

115. PROBLEMA 1)

Determinar los puntos de un plano que están a una distancia dada »a« de un punto P del mismo plano.

Solución: Todos los puntos que cumplen con esta condición se encuentran situados (es el »lugar« o »sitio« en que se hallan) en la circunferencia de centro P y radio »a«.

De este problema obtenemos nuestro primer Lugar Geométrico (Fig. 1):

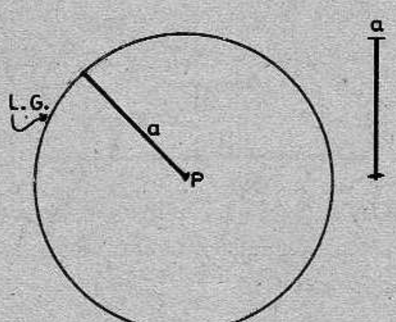


Fig. 1

L.G. Nº 1. »El L.G. de todos los puntos del plano que están a una distancia dada »a« de un punto dado P, es la circunferencia de centro P y radio »a« «.

Abreviadamente: el L.G. es ⊙ (P, a).

Problema 2)

¿Dónde se encuentran los puntos de un plano que están a una distancia menor que una distancia dada »a« de un punto P del plano?

Solución: Se dibuja la circunferencia de centro P y radio »a«. Los puntos pedidos se encuentran en la »región interior«, o sea, en el círculo, excluida la frontera que en este caso es la circunferencia. Por lo tanto (Fig. 2):

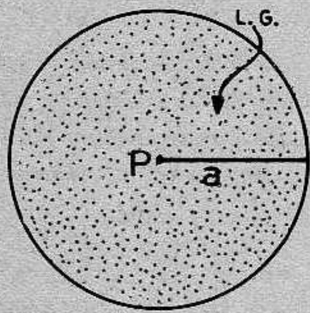


Fig. 2

L.G. Nº 2. »El L.G. de todos los puntos de un plano que están a una menor distancia que una distancia dada »a«, es la región interior (círculo) de la circunferencia de centro P y radio »a« «.

Problema 3)

¿Dónde se encuentran los puntos de un plano que están a una mayor distancia que una distancia dada »a« de un punto P de él?

Solución: Queda para que usted la haga y enuncie el L.G. correspondiente.

Problema 4)

¿Dónde se encuentran los puntos del espacio que están a una distancia dada »a« de un punto dado P del espacio?

Solución: Los puntos pedidos se encuentran en la superficie de la esfera que tiene por centro al punto P y por radio la distancia dada »a«. Entonces (Fig. 3):

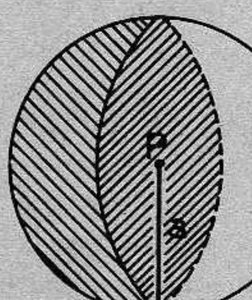


Fig. 3

L.G. Nº 3. »El L.G. de todos los puntos del espacio que están a una distancia dada »a« de un punto P, es la superficie de la esfera de centro P y radio »a« «.

Problema 5)

¿Dónde se encuentran todos los puntos del espacio que están a una menor distancia que una distancia dada »a« de un punto P del espacio?

Solución: Déla usted y enuncie el L.G. correspondiente.

Problema 6)

¿Dónde se encuentran todos los puntos del espacio que están a una distancia mayor que una distancia dada »a« de un punto P del espacio?

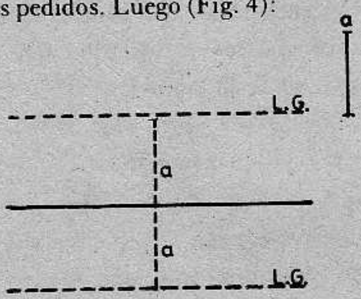
Solución: Déla usted y enuncie el L.G. correspondiente.

Problema 7)

Determinar todos los puntos de un plano que están a una distancia dada »a« de una recta dada L del mismo plano.

Solución: Se traza una perpendicular de magnitud »a« a ambos lados de la recta L. En seguida, se trazan las paralelas a esta distancia de L. Sobre estas dos paralelas se encuentran los puntos pedidos. Luego (Fig. 4):

Fig. 4



L.G. N° 4. »El L.G. de todos los puntos de un plano que están a una distancia dada »a« de una recta dada L, se compone de las dos paralelas trazadas a la distancia dada »a« de la recta dada L«.

Problema 8)

Determinar todos los puntos de un plano que están a una distancia menor que una distancia dada »a« de una recta dada L.

Solución: Se trazan las dos paralelas a la distancia »a« de la recta L. Los puntos pedidos se encuentran en la región interior de las dos paralelas sin considerar los puntos de ellas (las paralelas son las fronteras). Luego (Fig. 5):

L.G. N° 5. »El L.G. de todos los puntos del plano que están a una menor distancia que una distancia dada »a« de una recta dada L, es la región interior comprendida entre las dos paralelas«.

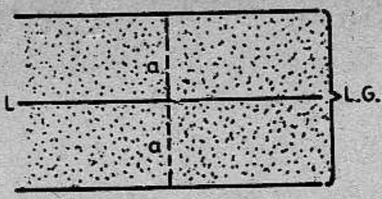


Fig. 5

Problema 9)

¿Dónde se encuentran todos los puntos de un plano que están a una distancia mayor que una distancia dada »a« de una recta dada L del mismo plano?

Solución: Hágala usted y enuncie el L.G. correspondiente.

Problema 10)

Determinar todos los puntos de un plano que equidistan (equidistar = estar a igual distancia) de dos rectas paralelas dadas del plano.

Solución: Se traza una perpendicular entre las rectas paralelas dadas y por su punto medio M se traza la *paralela media* o equidistante. (Fig. 6). Luego:

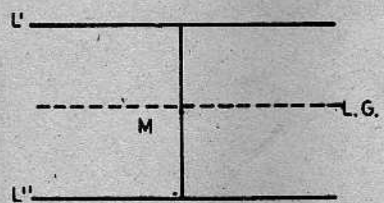


Fig. 6

L.G. N° 6. »El L.G. de todos los puntos de un plano que equidistan de dos rectas paralelas, es la *paralela media*«.

Problema 11)

Supongamos que su sala de clases está situada en el segundo piso de su colegio y que la distancia entre piso y piso es la misma. ¿Dónde se encuentran los puntos equidistantes del »suelo« de su sala?

Solución: Los puntos pedidos se encuentran en el »techo« de su sala y en el »suelo« del primer piso. De aquí obtenemos:

L.G. N° 7. »El L.G. de todos los puntos del espacio que están a una distancia dada »a« de un plano dado se compone de los dos planos paralelos al plano dado a la distancia dada de él«.

Problema 12)

¿Dónde se encuentran todos los puntos del espacio equidistantes de dos planos paralelos? (Considere como los planos dados el suelo del primer piso de su colegio y el techo de una sala del segundo piso).

Solución: Hágala usted y enuncie el L.G. correspondiente.

OBSERVACIONES

1) A medida que vayamos avanzando en nuestros conocimientos de Geometría irán apareciendo otros L.G. ya no tan sencillos como los anteriores.

2) Aplicando los L.G. resolveremos algunos problemas en los cuales deba cumplirse más de una condición, es decir, que exista una combinación de L.G.

En este tipo de problemas debe hacerse una *discusión* indicando el número de soluciones que puede tener y en qué casos existe o no existe solución.

3) Para mayor claridad en los dibujos es conveniente usar lápices de distintos colores para cada L.G. que se aplique.

Problema 13)

Dos puntos A y B están en el plano a una distancia de 10 m. Determinar los puntos que están a 7 m de A y a 5 m de B. (Fig. 7).

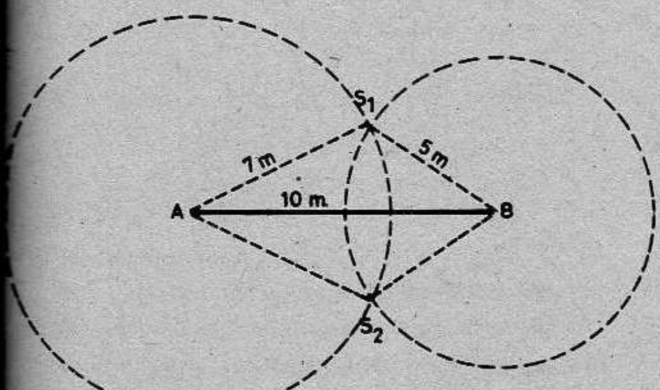


Fig. 7

Solución: Previamente elija una *unidad de longitud* para representar 1 metro; puede elegir como unidad el largo de un »cuadradito« de su cuaderno o una abertura del compás convenientemente elegida. (En nuestra figura se eligió como *unidad* a la longitud de ½ cm para representar 1 metro; por lo tanto, en esta »escala« se tiene: **AB** = 5 cm; 7 m ⟶ 3,5 cm; 5 m ⟶ 2,5 cm).

De acuerdo con el L.G. N° 1 todos los puntos que están a 7 m de A se encuentran en la ⊙ (A, 7 m) y todos los que están a 5 m de B se encuentran en la ⊙ (B, 5 m). La intersección S_1 y S_2 de estas dos circunferencias determinan los puntos que simultáneamente cumplen con las dos condiciones del problema. En efecto:

$$\overline{AS_1} = 7 \text{ m}; \overline{BS_1} = 5 \text{ m}; \overline{AS_2} = 7 \text{ m}; \overline{BS_2} = 5 \text{ m}.$$

Por lo tanto:

Solución = ⊙ (A, 7 m) ∩ ⊙ (B, 5 m) = $\{S_1, S_2\}$

Problema 14)

El mismo problema anterior en forma general es:

Dos puntos A y B están en el plano a una distancia »d« entre sí. Determinar los puntos que están a una distancia »a« de A y a una distancia »b« de B, siendo a, b, d, tres trazos dados.

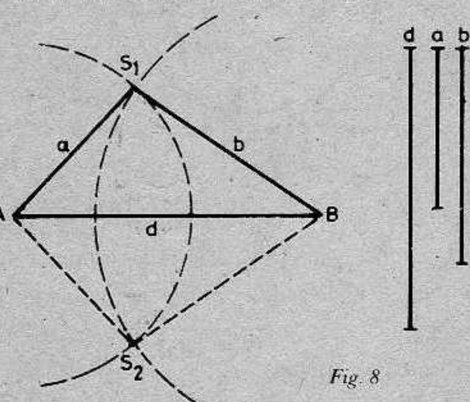


Fig. 8

Discusión.

Solución: 1^er^ L.G. es la ⊙ (A, a)

2° L.G. es la ⊙ (B, b)

Los puntos pedidos se encuentran en la intersección de estos dos L.G., es decir (Fig. 8):

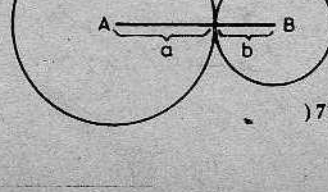
Solución: ⊙ (A, a) ∩ ⊙ (B, b) = $\{S_1, S_2\}$

Pero, ¿siempre hay dos soluciones?, ¿siempre existe solución? Esto es lo que contesta la *discusión* del problema.

Discusión:

1) Si $d = a + b \Longrightarrow 1$ solución que es el punto

Fig. 9



de tangencia exterior de las dos circunferencias (Fig. 9).

2) Si d = a − b ⟹ 1 solución que es el punto de tangencia interior de las dos circunferencias (Fig. 10).

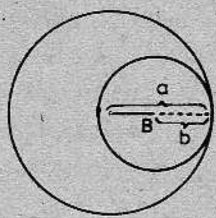


Fig. 10

3) Si (a − b) < d < (a + b) ⟶ 2 soluciones; las circunferencias son secantes (se cortan) y los puntos pedidos son los puntos de intersección de las circunferencias (Fig. 8).

4) Si (a + b) < d < (a − b) no hay solución puesto que las circunferencias no se cortan, (son circunferencias exteriores o interiores) (Figs. 11 y 12).

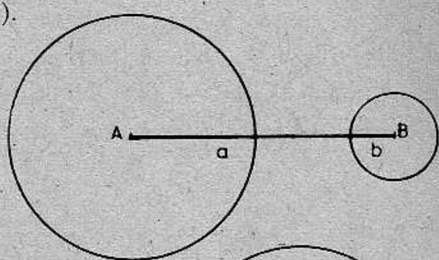


Fig. 11

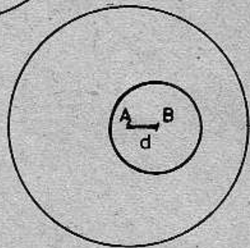


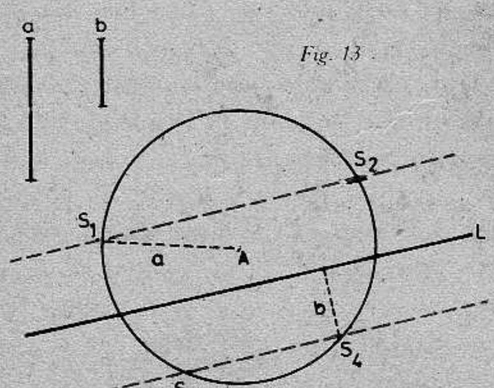
Fig. 12

Problema 15)

Determinar los puntos que están a una distancia »a« de un punto A y a una distancia »b« de una recta dada L.

Solución: Debemos buscar dos L.G. que en este caso son:

Fig. 13



1er L.G.: es la ⊙ (A, a), o sea, es el L.G. N° 1.

2° L.G.: son las dos paralelas trazadas a la distancia »b« de L, o sea, es el L.G. N° 4.

La intersección de estos dos L.G. (la circunferencia con las paralelas) determinan los puntos pedidos. Con nuestros datos el conjunto solución = $\{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ (Fig. 13).

Discusión: Puede existir 4, 3, 2, 1 ó ninguna solución. Dibuje usted los casos correspondientes a cada uno de ellos.

Problema 16)

La distancia entre dos puntos A y B es 10 cm. Determinar los puntos que están a menos de 7 cm de A y a menos de 5 cm de B.

Solución: 1er L.G.: es el círculo (región interior) de la ⊙ (a, 7 cm), o sea, es el L.G. N° 2.

2° L.G.: es el círculo (región interior) de la ⊙ (B, 5 cm), o sea, es también el L.G. N° 2.

Los puntos que cumplen con la condición del problema se encuentran en la intersección de los dos círculos, sin considerar los arcos correspondientes, que hacen de frontera (Fig. 14).

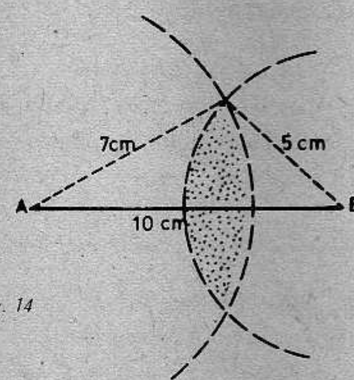


Fig. 14

Solución: Círculo (A, 7 cm) ∩ círculo (B, 5 cm).

Problema 17)

La distancia entre dos puntos A y B es 10 cm. Determinar los puntos que están a menos de 7 cm de A y a más de 5 cm de B.

Solución: Déla usted.

Problema 18)

La distancia entre dos puntos A y B es 10 cm. Determinar los puntos que están a una distancia mayor a 7 cm de A y a una distancia mayor a 5 cm de B.

Solución: Déla usted.

Problema 19
Determinar los puntos de la región interior de un ángulo de 60° que están a una distancia »a« de un lado y a una distancia »b« del otro lado (Fig. 15).

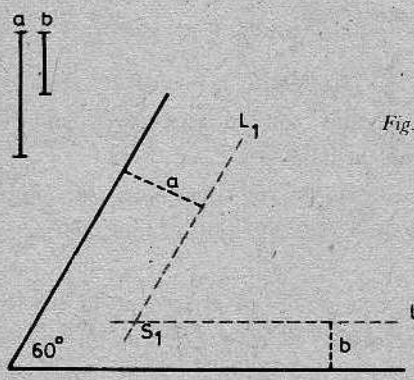


Fig. 15

Solución: Se dibuja un ángulo de 60° de acuerdo al N° 71 y se aplica el L.G. N° 4 respecto a cada lado.

En la intersección de la paralela trazada a la distancia »a« con la paralela trazada a la distancia »b«, está el punto pedido S_1.

Solución: $L_1 \cap L_2 = \{S_1\}$

Problema 20) Determinar los puntos de la región interior y exterior de un ángulo de 60° que estén a 1 cm de los lados del ángulo.

Solución: Hágala usted.

Problema 21) Dos rectas L_1 y L_2 se cortan oblicuamente formando un ángulo de 120° Determinar los puntos que están a 1,5 cm de L_1 y a 1 cm de L_2.

Solución: Hágala usted.

Problema 22) Dos rectas L' y L'' se cortan perpendicularmente. Determinar los puntos que estén a 1,5 cm de las rectas y a 2,5 cm del punto de intersección de ellas.

Solución: Déla usted. Además, haga la discusión.

Problema 23) Determinar los puntos equidistantes de dos rectas paralelas L' y L'' y que, además, estén a una distancia dada »a« de un punto dado A.

Solución: Hágala usted. Discusión.

Problema 24) L.G. N° 8. Determinar el L.G. de todos los puntos de un plano que están a una distancia dada »a« de una circunferencia de centro P y radio »r«, siendo $a < r$.

Solución: Hágala usted y enuncie este LG. N° 8.

Problema 25) El mismo problema anterior, pero en el espacio.

Problema 26) Determinar los puntos que están a 1,5 cm de una recta dada L y también a 1,5 cm de circunferencia de 2,5 cm de radio.

Solución: Hágala usted. Además, haga la discusión.

Problema 27) Dibujar un $\triangle$ ABC cuyos lados tengan las siguientes medidas: $\overline{AB} = 6$ cm, $\overline{BC} = 7$ cm y $\overline{AC} = 5$ cm.

Determinar los puntos que están a una distancia mayor a 1 cm de los lados de este triángulo.

Solución: Hágala usted. Discuta este problema.

Problema 28) El mismo problema anterior, pero determinando los puntos que estén a 1 cm de los tres lados del triángulo.

¿Que puede usted discutir en este problema?

Problema 29) Dibujar un $\triangle$ ABC con las mismas medidas del problema 27.

Determinar los puntos que están a 4 cm de A y a 3 cm de B.

Problema 30) Dibujar un $\triangle$ ABC con las mismas medidas del problema 27.

Determinar un punto que esté a 4 cm de los tres vértices.

¡Discusión!

Problema 31) Dibujar un $\triangle$ ABC con las mismas medidas del problema 27.

Determinar los puntos que estén a 1 cm de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ y que, además, estén a 3 cm del vértice B.

¡Discusión!

Problema 32) El mismo problema anterior, pero a 3 cm del vértice A en vez del B.

¡Discusión!

Problema 33) Determinar los puntos de un plano que están a una distancia menor a 5 cm de un punto dado A y a una distancia mayor a 3 cm de este mismo punto.

Problema 34) El mismo problema anterior, pero estando A en el espacio.

Figuras congruentes. Teoremas de congruencia de triángulos. Postulados de congruencia. Bisectriz de un ángulo. Simetral de un trazo. Teorema recíproco.

116. DEFINICION

Diremos, en general, que »dos figuras son congruentes cuando al colocar una sobre la otra (superposición) coinciden todos sus elementos«.

Así, por ejemplo: dos monedas chilenas de $ 1 del mismo año son congruentes; dos sellos de correo de la misma edición y franqueo; los »timbres« que deja en un papel un »matasellos«, etc.

El signo de congruencia es $\cong$. Este signo lo usaremos, en este libro, cuando se trate de indicar la congruencia de figuras geométricas como triángulos, polígonos, circunferencias, etc. En cambio, la congruencia de trazos y de ángulos la indicaremos con el signo $=$, pues en estos casos nos referimos a la medida de ellos.

117. DEFINICION

»Dos trazos son congruentes cuando tienen la misma medida«. Esto significa que si se colocara uno de los trazos sobre el otro coincidirán sus extremos, respectivamente.

Si se elige una »común medida« para $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, por ejemplo el milímetro, y esta unidad está contenida el mismo número de veces en $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, diremos que estos trazos son congruentes por tener la misma medida y esta congruencia de trazos la indicaremos: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$. Por lo tanto, al colocar $\overline{CD}$ sobre $\overline{AB}$ coincide C con A y D con B o viceversa: D con A y C con B (Fig. 1).

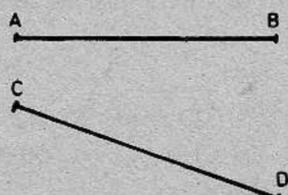


Fig. 1

Entonces: »dos trazos o segmentos son congruentes cuando tienen la misma medida; es decir, cuando tienen la misma longitud«.

Ya hemos dicho que la medida de un trazo $\overline{AB}$ es un número positivo y se indica por AB. Por lo tanto, si $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ implica que $\overline{AB} = \overline{CD}$; de donde: $AB = CD$ (es una igualdad entre números positivos).

118. DEFINICION

»Dos ángulos son congruentes cuando tienen la misma medida«.

Por lo tanto, al superponer un ángulo sobre el otro, deben coincidir sus vértices y sus lados.

De este modo, si al colocar O' sobre O se hace coincidir el rayo $\overrightarrow{OA}$ con el rayo $\overrightarrow{O'A'}$, se observa que hechas estas dos superposiciones el rayo $\overrightarrow{OB}$ coincide también con el rayo $\overrightarrow{O'B'}$. Cuando se verifiquen estas coincidencias diremos que los ángulos son congruentes y escribiremos:

$$\sphericalangle AOB \cong \sphericalangle A'O'B' \quad \text{o bien} \quad \sphericalangle \alpha \cong \sphericalangle \beta.$$

o más simplemente: $\alpha = \beta$ (Fig. 2).

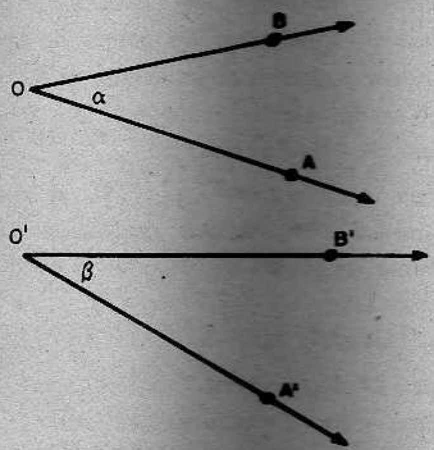


Fig. 2

Esta última será la notación que usaremos para indicar la igualdad de ángulos de la misma medida, ya que la igualdad de dos ángulos y su congruencia son expresiones equivalentes.

119. POLIGONOS CONGRUENTES

Para que dos polígonos sean congruentes es necesario y suficiente que tengan sus lados respectivamente iguales y sus ángulos respectivamente iguales. (Se dice también: lados homólogos y ángulos homólogos iguales).

Entre los elementos homólogos de dos polígonos congruentes, existe una relación de apareamiento entre ellos o una »correspondencia biunívoca«. Así (Fig. 3):

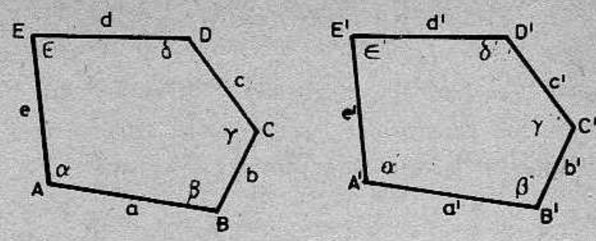


Fig. 3

el vértice A se aparea con su homólogo A';

el ángulo β se aparea con su homólogo β';

el lado $\overline{DE}$ se aparea con su homólogo $\overline{D'E}$'; etc.

Entonces, para que el polígono ABCDE sea congruente con el polígono A'B'C'D'E' debe verificarse:

$$\left.\begin{array}{l} a = a';\ b = b',\ c = c',\ d = d',\ e = e' \\ \alpha = \alpha',\beta = \beta',\ \gamma = \gamma',\ \delta = \delta',\ \epsilon = \epsilon' \end{array}\right\} \Rightarrow \text{políg. ABCDE} \cong \text{políg. A'B'C'D'E'}$$

De la congruencia de polígonos es la de los triángulos la que tiene más importancia y a esto nos dedicaremos ahora.

La congruencia es una relación de equivalencia, pues es refleja, simétrica y transitiva.

Por ejemplo:

1) *Reflexividad:*

$\overline{AB} \cong \overline{AB}$

$\measuredangle \alpha \cong \measuredangle \alpha$

$\triangle ABC \cong \triangle ABC$

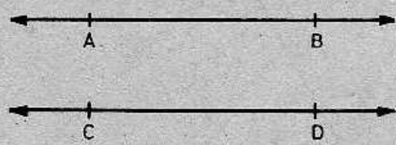


Fig. 4

2) *Simetría:*

$\overline{AB} \cong \overline{CD} \Rightarrow \overline{CD} \cong \overline{AB}$

$\measuredangle\alpha \cong \beta \Rightarrow \measuredangle \beta \cong \measuredangle \alpha$

$\triangle ABC \cong \triangle DEF \Rightarrow \triangle DEF \cong \triangle ABC$

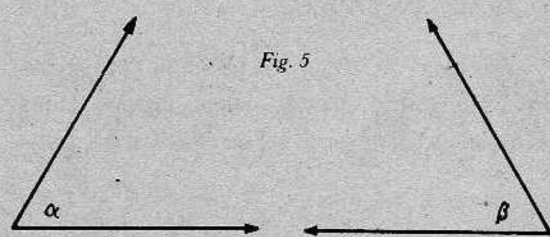


Fig. 5

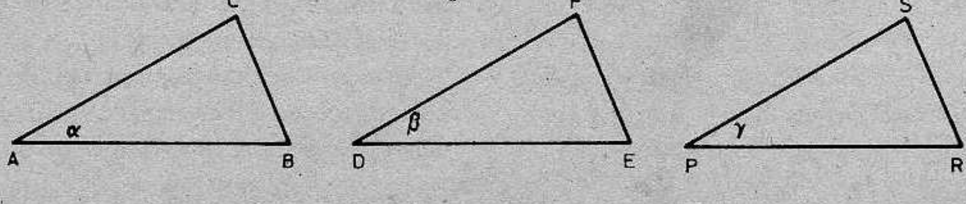
3) *Transitividad:*

$\overline{AB} \cong \overline{DE} \wedge \overline{DE} \cong \overline{PQ} \Rightarrow \overline{AB} \cong \overline{PQ}$

$\measuredangle \alpha \cong \measuredangle \beta \wedge \measuredangle \beta \cong \measuredangle \gamma \Rightarrow \measuredangle \alpha \cong \measuredangle \gamma$

$\triangle ABC \cong \triangle DEF \wedge \triangle DEF \cong \triangle PQS \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle PQS$

Fig. 6



120. TEOREMAS DE CONGRUENCIA DE TRIANGULOS

1^er^ Teorema de congruencia: »Dos triángulos son congruentes cuando tienen iguales un lado y los dos ángulos adyacentes a este lado«.

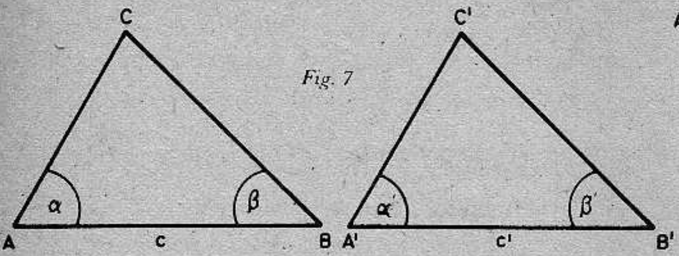


Fig. 7

Si $c = c'$, $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, resulta
$\triangle$ **ABC** $\cong$ $\triangle$ **A'B'C'**.

2° Teorema de congruencia: »Dos triángulos son congruentes cuando tienen iguales dos lados y el ángulo comprendido por ellos«.

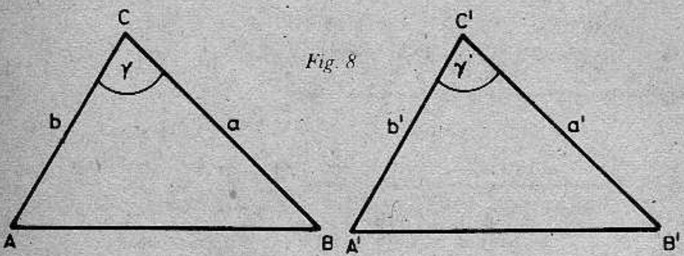


Fig. 8

Si $a = a'$, $b = b'$, $\gamma = \gamma'$ resulta:
$\triangle$ ABC $\cong$ $\triangle$ A'B'C'.

3^er^ Teorema de congruencia: »Dos triángulos son congruentes cuando tienen iguales lados y el ángulo opuesto al mayor de estos lados«.

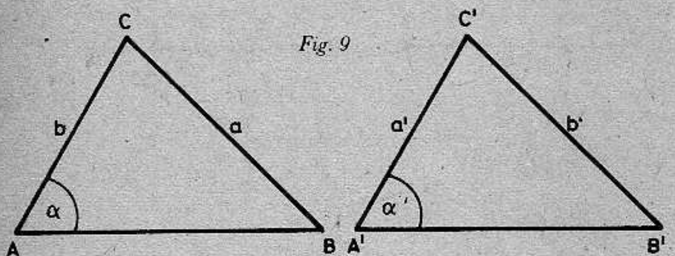


Fig. 9

Si $a = a'$, $b = b'$, $a > b$, $a' > b'$ y $\alpha = \alpha'$, resulta:
$\triangle$ ABC $\cong$ $\triangle$ A'B'C'.

4° Teorema de congruencia: »Dos triángulos son congruentes cuando tienen sus tres lados respectivamente iguales«.

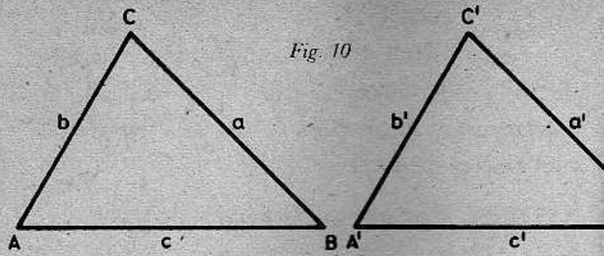


Fig. 10

Si $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$ resulta:
$\triangle$ ABC $\cong$ $\triangle$ A'B'C'.

121. COROLARIOS

De estos teoremas de congruencia se obtienen los siguientes corolarios:

1) »Dos triángulos rectángulos son congruentes cuando tienen respectivamente iguales un cateto y el ángulo agudo adyacente al cateto«.

2) »Dos triángulos rectángulos son congruentes cuando tienen respectivamente iguales sus catetos«.

3) »Dos triángulos rectángulos son congruentes cuando tienen respectivamente iguales un cateto y la hipotenusa«.

4) »Dos triángulos rectángulos son congruentes cuando tienen respectivamente iguales la hipotenusa y un ángulo agudo«.

5) »Dos triángulos isósceles son congruentes cuando tienen iguales la base y el ángulo basal«.

6) »Dos triángulos isósceles son congruentes cuando tienen iguales el lado y el ángulo del vértice«.

7) »Dos triángulos equiláteros son congruentes cuando tienen iguales el lado«.

122. OBSERVACION

Aunque estos cuatro teoremas no son difíciles de demostrar —como lo veremos a continuación— los consideraremos como »Postulados de congruencia« o »Axiomas de congruencia« y, por lo tanto, no es necesario demostrarlos y basta con aceptar su validez sin ponerla en dudas. Es este el camino que siguen y aceptan muchos profesores considerando, además, sólo tres axiomas de congruencia en vez de los cuatro teoremas dados anteriormente.

Nosotros aceptaremos esta opinión de considerarlos como »Postulados«, pero conservaremos el orden y el enunciado de los cuatro teoremas de congruencia clásicos. El 3^er^ Teorema, que es el más discutido, lo conservaremos como un corolario para el triángulo rectángulo: »Dos triángulos rectángulos son congruentes cuando tienen iguales la hipotenusa y un cateto«.

Además, los que no demuestran estos teoremas sino que sólo los postulan, a los tres casos que consideran los llaman: »Postulado ALA« (corresponde a *A*ngulo-*L*ado-*A*ngulo). »Postulado LAL« (corresponde a *L*ado-*A*ngulo-*L*ado) y »Postulado LLL« (corresponde a *L*ado-*L*ado-*L*ado).

La correspondencia LLA (*L*ado-*L*ado-*A*ngulo), no es considerada una congruencia salvo si se agrega una condición especial ya indicada más atrás.

123. DEMOSTRACION DE LOS TEOREMAS DE CONGRUENCIA

(Materia optativa y que puede no tratarse en los cursos de Secundaria).

1^er^ Teorema de congruencia:

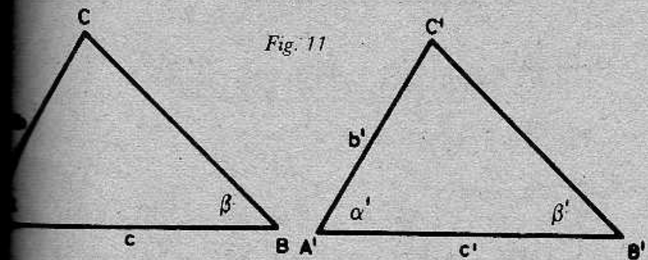


Fig. 11

H.) $c = c'$, $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ (Fig. 11).

T.) $\triangle$ ABC $\cong \triangle$ A'B'C'.

D.) Se superpone el $\triangle$ A'B'C' sobre el $\triangle$ ABC de modo que A' coincida con A; como $c = c'$ coincidirán B' con B. Al mismo tiempo el lado $\overline{A'C'}$ cae en la dirección del lado $\overline{AC}$ por ser $\alpha' = \alpha$. Por igual razón el lado $\overline{B'C'}$ cae en la dirección de $\overline{BC}$ por ser $\beta = \beta'$.
Como dos rectas coincidentes se cortan sólo en un punto, el vértice C' coincidirá con C. Por lo tanto, los dos triángulos son congruentes.

2° Teorema de congruencia:

H.) $c = c'$, $b = b'$, $\alpha = \alpha'$ (Fig. 11).

T.) $\triangle$ ABC $\cong \triangle$ A'B'C'

D.) Se superpone el $\triangle$ A'B'C' sobre el $\triangle$ ABC de modo que A' coincida con A y los lados de α' con lo lados de α por ser ángulos iguales. Como $c' = c$ coincidirá también B' con B. En forma análoga coincide C' con C por ser $b' = b$. Pero entre dos puntos coincidentes puede trazarse sólo un trazo y, por lo tanto, $\overline{B'C'}$ coincidirá con $\overline{BC}$. Luego:
$\triangle$ A'B'C' $\cong \triangle$ ABC.

3^er^ Teorema de congruencia:

H.) $a = a'$, $c = c'$, $c > a$, $c' > a'$, $\gamma = \gamma'$

T.) $\triangle$ A'B'C' $\cong \triangle$ ABC

D.) Se traslada el $\triangle$ A'B'C' a la posición ABD (Fig. 12).

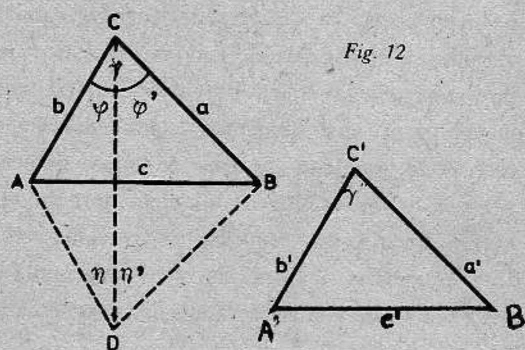


Fig. 12

Como por Hip. $a = a' \Rightarrow \varphi' = \eta'$

Además: $\varphi = \gamma - \varphi'$

$$\eta = \gamma' - \eta'$$

$\therefore \varphi = \eta$ pues $\gamma = \gamma'$ (por H.).

Por lo tanto: $\overline{AC} = \overline{AD}$ (porque en el $\triangle$ DAC a ángulos iguales se oponen lados iguales).

Pero, por construcción:

$\overline{A'C'} = \overline{AD} \Rightarrow \overline{AC} = \overline{A'C'}$

Entonces tenemos:

$\overline{A'C'} = \overline{AC}$

$\overline{B'C'} = \overline{BC}$ (por H.).

$\gamma' = \gamma$ (por H.)

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

en virtud del 2° Teorema de congruencia.

4° Teorema de congruencia:

H.) $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$

T.) $\triangle$ A'B'C' $\cong \triangle$ ABC

D.) Se traslada el $\triangle$ A'B'C' a la posición del $\triangle$ ABD (Fig. 12).

$$\left.\begin{array}{l}\text{El } \triangle \text{ DCA es isósceles} \rightarrow \varphi = \eta \\ \text{El } \triangle \text{ DCB es isósceles} \rightarrow \varphi' = \eta'\end{array}\right\} +$$

$$\underbrace{\varphi + \varphi'}_{} = \underbrace{\eta + \eta'}_{}$$

luego: $\measuredangle$ ACB $= \measuredangle$ ADB

Es decir: $\gamma = \gamma'$

Pero, además: $a = a'$ (por H.)

$b = b'$ (por H.)

$\therefore \triangle A'B'C' \cong \triangle ABC$

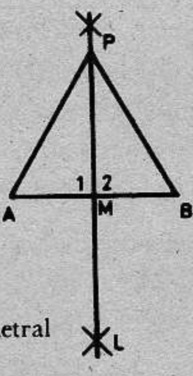
en virtud del 2° Teor. de congruencia.

Estos cuatro teoremas de congruencia y sus corolarios serán de gran utilidad cuando se trate de aplicarlos a la demostración de igualdad de *segmentos,* de *lados* y de *ángulos* como lo veremos a continuación. En las demostraciones por congruencia deben buscarse dos triángulos y comparar sus elementos homólogos demostrando la igualdad de tres de ellos, debiendo ser por lo menos uno de los elementos un »elemento lineal«. En seguida, se relacionan estos tres elementos iguales con los correspondientes a uno de los cuatro teoremas de congruencia.

124. TEOREMA XXII

»Cualquier punto de la simetral de un trazo equidista de sus extremos«.

Fig. 13



H.) $\overline{AM} = \overline{MB}$; L = simetral
P$\in$L

T.) $\overline{PA} = \overline{PB}$

D.) Se tiene:

$$\triangle AMP \cong \triangle BPM \text{ porque } \left\{\begin{array}{l}\overline{PM} = \text{lado común} \\ AM = MB \text{ por H.} \\ \measuredangle 1 = \measuredangle 2 \text{ por H.}\end{array}\right.$$

(por 2° Teor. de $\cong$)

De la congruencia de estos triángulos se deduce la igualdad de sus *elementos homólogos* que, en este caso, sólo interesa los lados:

$$\overline{PA} = \overline{PB}$$

125. OBSERVACION

En los triángulos congruentes los »lados homólogos« son los que se *oponen* a ángulos iguales. A su vez, »ángulos homólogos« en triángulos congruentes son los que se *oponen* a lados iguales.

126. TEOREMA XXIII

(Teorema recíproco del XXII)

»Si un punto equidista de los extremos de un trazo es porque pertenece a la simetral del trazo«.

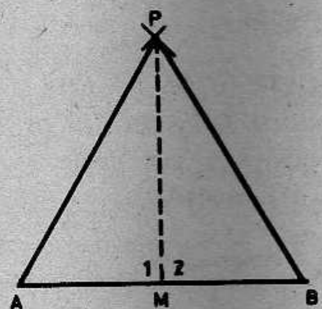


Fig. 14

H.) $\overline{PA} = \overline{PB}$; $\overline{AM} = \overline{MB}$; P se une con M.

T.) $\overline{PM}$ = simetral $\Rightarrow \measuredangle 1 = \measuredangle 2 = 90°$

D.) Se tiene:

$$\triangle AMP = \triangle BMP \text{ porque: } \left\{\begin{array}{l}\overline{PA} = \overline{PB} \text{ por H.} \\ \overline{MA} = \overline{MB} \text{ por H.} \\ \overline{PM} = \text{lado común}\end{array}\right.$$

(por 4° Teor. de $\cong$)

$\therefore \measuredangle 1 = \measuredangle 2 = 90° \Rightarrow$ PM = simetral de $\overline{AB}$.

Otra demostración: En vez de unir P con el punto medio M, se traza desde P la perpendicular al trazo $\overline{AB}$ y se demuestra que »cae« en el punto medio de él. Es decir:

H.) $\overline{PA} = \overline{PB}$; $\overline{PM} \perp \overline{AB}$

T.) $\overline{MA} = \overline{MB}$

D.) Se tiene:

$$\triangle AMP \cong \triangle BMP \text{ porque: } \left\{\begin{array}{l}PA = \overline{PB} \text{ por H.} \\ \measuredangle 1 = \measuredangle 2 = 90° \text{ por} \\ \overline{PM} = \text{lado común.}\end{array}\right.$$

(por 3er Teor. de $\cong$)

$\therefore \overline{AM} = \overline{MB} \Rightarrow \overline{PM}$ = simetral de $\overline{AB}$.

127. *TEOREMA RECIPROCO*

Un teorema es recíproco de otro cuando la hipótesis del primero (llamado *teorema directo*) pasa a ser la tesis del segundo y viceversa: la tesis del primero es la hipótesis del segundo.

Debemos hacer notar que no todos los teoremas recíprocos son verdaderos. Por ejemplo: ya demostramos que »los ángulos opuestos por el vértice son iguales«. Su recíproco sería: »los ángulos iguales son opuestos por el vértice«, que es falso.

También sabemos que »los ángulos adyacentes son suplementarios«. El recíproco: »los ángulos suplementarios son adyacentes«, es también falso.

128. *TEOREMA XXIV*

»Cualquier punto de la bisectriz de un ángulo equidista de sus lados«.

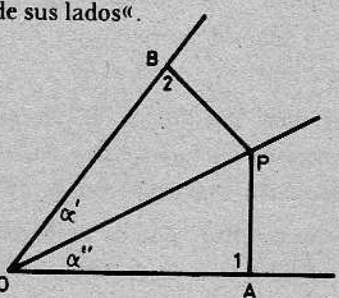


Fig. 15

H.) $\overline{OP}$ = bisectriz $\measuredangle$ AOB $\Rightarrow \alpha = \alpha'$

$\overline{PA} \perp \overline{OA}$; $\overline{PB} \perp \overline{OB}$ (Fig. 15).

T.) $\overline{PA} = \overline{PB}$

D.) Se tiene:

$$\triangle OPA \simeq \triangle OPB \text{ porque: } \begin{cases} OP = \text{lado común} \\ \measuredangle 1 = \measuredangle 2 = 90^\circ \text{ por H.} \\ \alpha' = \alpha'' \text{ por H.} \end{cases}$$

(por corol. 1er Teor. $\cong$)

$\therefore \overline{PA} = \overline{PB}$

129. *TEOREMA XXV.* (Recíproco del XXIV)

»Si un punto equidista de los lados de un ángulo, este punto pertenece a la bisectriz«.

H.) $\overline{PA} = \overline{PB}$; $\overline{PA} \perp \overline{OP}$, $\overline{PB} \perp \overline{OB}$ (Fig. 15).

T.) $\alpha' = \alpha'' \Rightarrow \overline{OP}$ = bisectriz

D.) Se tiene:

$$\triangle OPA \cong \triangle OPB \text{ porque: } \begin{cases} PA = PB \text{ por H.} \\ \overline{OP} = \text{lado común} \\ \measuredangle 1 = \measuredangle 2 = 90^\circ \text{ por H.} \end{cases}$$

(Por 3er Teor. de $\cong$)

$\therefore \alpha = \alpha'' \Rightarrow \overline{OP}$ = bisectriz

De los teoremas XXII y XXIV se obtienen los siguientes Lugares Geométricos:

130. L.G. Nº 9

»El L.G. de todos los puntos de un plano que equidistan de los extremos de un trazo, es la simetral del trazo«. (Fig. 1).

Si L = simetral $\Longrightarrow \overline{CA} = \overline{CB}, \overline{DA} = \overline{DB}, \overline{EA} = \overline{EB}, \ldots$

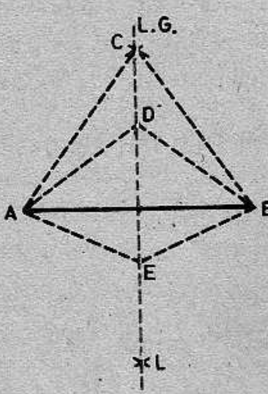


Fig. 1

131. L.G. Nº 10

Es el mismo anterior pero con el siguiente enunciado: »El L.G. de todos los puntos de un plano que equidistan de dos puntos dados es la simetral del trazo que determinan los puntos dados«.

132. L.G. Nº 11

»El L.G. de todos los puntos de un plano que equidistan de los lados de un ángulo es la bisectriz del ángulo«. (Fig. 2).

Si $\alpha' = \alpha'' \Longrightarrow \overline{PA} = \overline{PD}, \overline{P'B} = \overline{P'E}, \overline{P''C} = \overline{P''F}, \ldots$

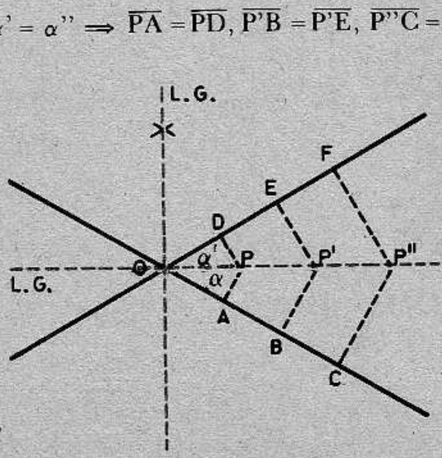


Fig. 2

133. L.G. Nº 12

Generalizando en L.G. anterior, se obtiene: »El L.G. de todos los puntos de un plano que equidistan de dos rectas que se cortan se compone de las bisectrices de los ángulos que forman«. (Fig. 2).

134. EJERCICIOS

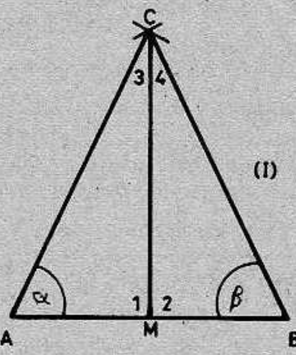
1) Determinar los puntos que equidistan de dos puntos dados A y B, y de los lados de un ángulo dado, perteneciendo todo a un mismo plano.
¡Discusión!
2) Determinar los puntos que equidistan de tres puntos no colineales de un plano.
¡Discusión!
3) Determinar los puntos de un plano equidistantes de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ del $\triangle ABC$ y que están a 2 cm del vértice B.
4) Determinar los puntos equidistantes de los tres vértices de un $\triangle$ ABC.
5) Determinar los puntos equidistantes de tres rectas que se cortan en tres puntos A, B y C.
¡Discusión!
6) Determinar los puntos equidistantes de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ de un $\triangle$ ABC y que, además, estén a 1,5 cm del lado $\overline{AC}$.
7) Determinar los puntos equidistantes de dos puntos dados A y B y, a la vez, de otros dos puntos dados C y D.
¡Discusión!
8) ¿Cuál es el L.G. de los puntos del espacio que equidistan de dos puntos dados A y B?
9) Se dan en un plano dos trazos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ no paralelos. Construir dos triángulos isósceles que tengan el vértice común y los trazos dados como bases.
10) Las medidas de los lados de un $\triangle$ ABC son $\overline{AB}$ = 8 cm, $\overline{BC}$ = 9 cm y $\overline{AC}$ = 7 cm. Determinar los puntos que están a menos de 5 cm de los vértices.

Teoremas relativos al triángulo isósceles demostrados por congruencia.

135. Recordemos que en el triángulo isósceles el »ángulo del vértice« es el ángulo que forman los lados iguales, y que la »base« es el lado desigual. Además, en este triángulo cuando se habla de los »lados« se refiere a los lados iguales.

136. TEOREMA XXVI

»Los ángulos basales de un triángulo isósceles son iguales«.



H.) $\triangle$ ABC es isósceles con $\overline{CA} = \overline{CB}$; α y β son los ángulos basales.

T.) $\alpha = \beta$

D.) Al trazar la altura $\overline{CM}$, resulta (Fig. I):

$\triangle AMC \cong \triangle BMC$ porque: $\begin{cases} \overline{CA} = \overline{CB} \text{ por H.} \\ \measuredangle 1 = \measuredangle 2 \text{ por construc.} \\ \overline{CM} = \text{lado común} \end{cases}$

(por 3er Teor. de $\cong$)

$\therefore \alpha = \beta$

137. TEOREMA XXVII. (Recíproco del XXVI)

»Si un triángulo tiene dos ángulos de igual medida, es isósceles«.

H.) $\alpha = \beta$ (Fig. I)

T.) $\overline{CA} = \overline{CB}$

D.) Al trazar la altura $\overline{CM} = h_c$, resulta:

$\triangle AMC \cong \triangle BMC$ porque $\begin{cases} \measuredangle 1 = \measuredangle 2 \text{ (por construc.)} \\ \alpha = \beta \text{ (por H.)} \\ \overline{CM} = \text{lado común} \end{cases}$

(por corol. 1er Teor. de $\cong$)

$\therefore \overline{AC} = \overline{BC}$

138. De estos dos teoremas se obtienen las siguientes consecuencias o corolarios:

I) »En un triángulo a lados iguales se oponen ángulos iguales y viceversa«.

II) »En un triángulo rectángulo isósceles cada ángulo agudo mide 45°«.

139. TEOREMA XXVIII

»La altura trazada desde el vértice de un triángulo isósceles dimidia a la base y bisecta al ángulo del vértice«.

H.) $\triangle$ ABC es isósceles con $\overline{CA} = \overline{CB}$ (Fig. I).
$\overline{CM} = h_c$

T.) $\overline{MA} = \overline{MB} \Rightarrow \overline{CM} = t_c$

$\measuredangle 3 = \measuredangle 4 \Rightarrow \overline{CM} = b_\gamma$

D.) Se tiene

$\triangle AMC \cong \triangle BMC$ porque: $\begin{cases} \overline{CA} = \overline{CB} \text{ (por H.)} \\ \measuredangle 1 = \measuredangle 2 \text{ (por H.)} \\ \overline{CM} = \text{lado común} \end{cases}$

(por 3er Teor. de $\cong$)

$\therefore \overline{MA} = \overline{MB} \Rightarrow \overline{CM} = t_c$

$\measuredangle 3 = \measuredangle 4 \Rightarrow CM = b_\gamma$

140. TEOREMA XXIX

»La transversal de gravedad correspondiente al vértice de un triángulo isósceles, es perpendicular a la base y bisecta al ángulo del vértice«.

H.) $\triangle$ ABC es isósceles con $\overline{CA} = \overline{CB}$ (Fig. I)

$\overline{CM} = t_c \Rightarrow \overline{MA} = \overline{MB}$

T.) $\measuredangle 1 = \measuredangle 2 \Rightarrow \overline{CM} = h_c$

$\measuredangle 3 = \measuredangle 4 \Rightarrow \overline{CM} = b_\gamma$

D.) Se tiene:

$\triangle AMC \cong \triangle BMC$ porque: $\begin{cases} \overline{CA} = \overline{CB} \text{ (por H.)} \\ \overline{MA} = \overline{MB} \text{ (por H.)} \\ \overline{CM} = \text{lado común} \end{cases}$

(por 4° Teor. de $\cong$)

$\therefore \measuredangle 1 = \measuredangle 2 = 90° \Rightarrow \overline{CM} = h_c$

$\measuredangle 3 = \measuredangle 4 \Rightarrow \overline{CM} = b_\gamma$

141. TEOREMA XXX

»La bisectriz del ángulo del vértice de un triángulo isósceles, dimidia a la base y es perpendicular a ella«.

H.) $\triangle$ ABC es isósceles con $\overline{CA} = \overline{CB}$ (Fig. I)

$\overline{CM} = b_\gamma$; $\measuredangle 3 = \measuredangle 4$

T.) $\overline{MA} = \overline{MB} \Rightarrow \overline{CM} = t_c$

$\measuredangle 1 = \measuredangle 2 \Rightarrow CM = h_c$

D.) Se tiene:

$\triangle$ AMC $\cong$ $\triangle$ BMC porque: $\begin{cases} \overline{CA} = \overline{CB} \text{ (por H.)} \\ \measuredangle 3 = \measuredangle 4 \text{ (por H.)} \\ \overline{CM} = \text{lado común} \end{cases}$

(por 2° Teor. de $\cong$)

$\therefore \measuredangle 1 = \measuredangle 2 = 90° \Rightarrow \overline{CM} = h_c$

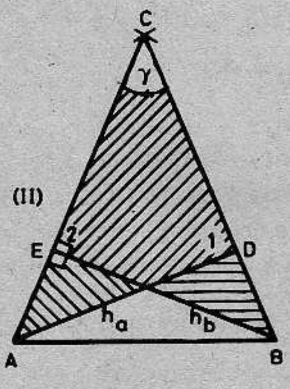
$\overline{MA} = \overline{MB} \Rightarrow \overline{CM} = t_c$

142. De los teoremas anteriores se obtiene el corolario: »En un triángulo isósceles coinciden la altura, la transversal de gravedad y la bisectriz del ángulo del vértice«. Es decir:

$$h_c = t_c = b_\gamma$$

143. TEOREMA XXXI

»Las alturas trazadas desde los vértices basales de un triángulo isósceles tienen la misma medida«. (Fig. II).



H.) $\triangle$ ABC es isósceles con $\overline{CA} = \overline{CB}$

$\overline{AD} = h_a$, $\overline{BE} = h_b$

T.) $\overline{AD} = \overline{BE} \Rightarrow h_a = h_b$

D.) Se tiene:

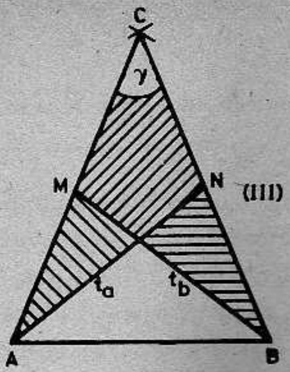
$\triangle$ ADC $\cong$ $\triangle$ BEC porque: $\begin{cases} \overline{CA} = \overline{CB} \text{ (por H.)} \\ \measuredangle 1 = \measuredangle 2 = 90° \text{ (por H.)} \\ \gamma = \text{ángulo común} \end{cases}$

(por Corol. 1er Teo. $\cong$)

$\therefore \overline{AD} = \overline{BE} \Rightarrow h_a = h_b$

144. TEOREMA XXXII

»Las transversales de gravedad correspondientes a los vértices basales de un triángulo isósceles, tienen la misma medida« (Fig. III).



H.) $\triangle$ ABC es isósceles con $\overline{CA} = \overline{CB}$

$\overline{AN} = t_a \Rightarrow \overline{NB} = \overline{NC}$

$\overline{BM} = t_b \Rightarrow \overline{MA} = \overline{MC}$

T.) $\overline{AN} = \overline{BM} \Rightarrow t_a = t_b$

D.) Se tiene:

$\triangle$ ANC $\cong$ $\triangle$ BMC porque: $\begin{cases} \overline{CA} = \overline{CB} \text{ (por H.)} \\ \overline{CM} = \overline{CN} \text{ (por H.)} \\ \gamma = \text{ángulo común} \end{cases}$

(por 2° Teor. de $\cong$)

$\therefore \overline{AN} = \overline{BM} \Rightarrow t_a = t_b$

145. TEOREMA XXXIII

»Las bisectrices de los ángulos basales de un triángulo isósceles, son iguales.

(Demuestre usted en forma análoga a los teoremas anteriores que $b_\alpha = b_\beta$).

146. EJERCICIOS

1) Dibujar dos triángulos isósceles que tengan la misma base y formen un cuadrilátero convexo (más adelante lo llamaremos »deltoide«). Demostrar que la recta que une sus vértices es perpendicular a la base común y bisectriz de los ángulos de los vértices de estos triángulos.

2) Un triángulo rectángulo tiene uno de sus ángulos agudos de 30°. Demostrar que la hipotenusa de este triángulo mide el doble que el cateto opuesto al ángulo de 30°.

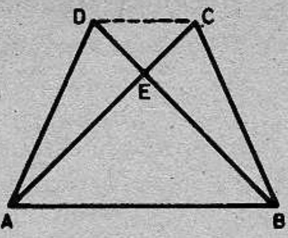
3) Demostrar que en un triángulo isósceles la bisectriz del ángulo exterior en el vértice es paralela a la base.

4) Se sabe que el $\triangle$ ABC $\cong$ $\triangle$ ABD.

Demostrar que (Fig. 1):

a) el $\triangle$ ABE es isósceles

Fig. 1



b) $\overline{EC} = \overline{ED}$

c) $\overline{AB}$ es paralela a $\overline{CD}$.

5) El ángulo exterior en el vértice de un triángulo isósceles mide 102° 36'. ¿Cuánto mide el ángulo basal?

6) En el triángulo isósceles ABC se traza la altura $\overline{AD}$ que con la base $\overline{AB}$ forma un ángulo de 25°. ¿Cuánto mide el ángulo del vértice?

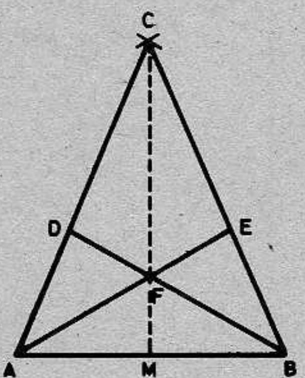
7) Demostrar que un triángulo que tiene dos alturas iguales es isósceles.

8) Demostrar que si un triángulo tiene dos transversales de gravedad iguales, es isósceles.

9) En un triángulo isósceles ABC se aplican, desde los vértices basales A y B, segmentos iguales $\overline{AD} = \overline{BE}$. Demostrar que $\overline{AE} = \overline{BD}$.

10) En el triángulo isósceles ABC se aplican los segmentos iguales $\overline{AD} = \overline{BE}$ (Fig. 2).

Fig. 2



Demostrar que la recta que une C con el punto de intersección F de $\overline{AE}$ y $\overline{BD}$ pasa por el punto medio M de la base $\overline{AB}$.

11) En un triángulo isósceles ABC se traza en A la recta L' perpendicular a $\overline{AC}$ y en B la recta L'' perpendicular a $\overline{BC}$. Demostrar que estas perpendiculares al cortarse forman otro triángulo isósceles cuyo ángulo basal mide la mitad del ángulo del vértice del primer triángulo ABC.

12) En el cuadrado ABCD de lado »a« se hace $\overline{AE} = \overline{DE} = \overline{DF} = \overline{CF} =$ a (Fig. 3).

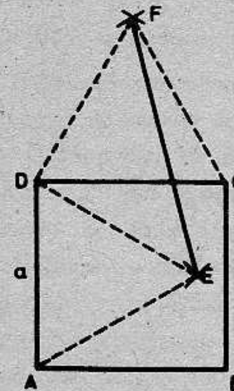


Fig. 3

Demostrar que $\overline{EF}$ mide lo mismo que la diagonal del cuadrado ABCD.
(Indicación: calcule la medida del ∡ EDF y después demuestre que el △ EFD ≅ △ ABD).

13) Demostrar que si desde un punto P de la base de un triángulo isósceles ABC se trazan las perpendiculares a los lados, la suma de estas perpendiculares es constante. (Esta constante es igual a una de las alturas basales).

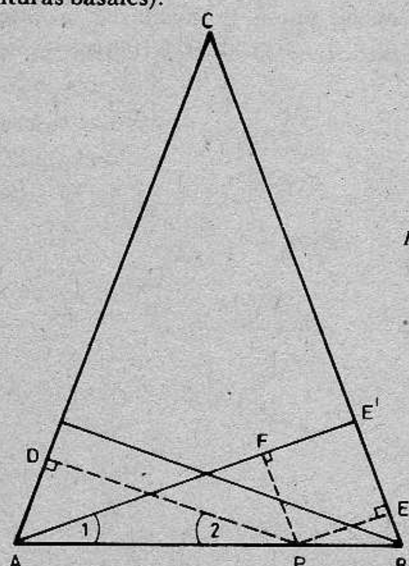


Fig. 4

H.) $\overline{CA} = \overline{CB}$; $\overline{PD} \perp \overline{AC}$ y $\overline{PE} \perp \overline{BC}$ (Fig. 4)

T.) $\overline{PD} + \overline{PE}$ = constante = h_a

D.) Se traza $\overline{PF} \perp \overline{AE'}$; resulta:

△ APF ≅ △ APD, pues: $\begin{cases} \overline{AP} = \text{lado común} \\ ∡ D = ∡ F = 90° \\ ∡ 1 = ∡ 2 \end{cases}$
(1^{er} Teor. de ≅)

luego: $\overline{PD} = \overline{AF}$
pero $\overline{PE} = \overline{FE'}$

$$\therefore \overline{PD} + \overline{PE} = \overline{AF} + \overline{FE'} = \overline{AE'} = h_a$$

(véase otra demostración en N° 307 N° 18).

14) En un triángulo isósceles ABC se determinan desde el vértice C segmentos iguales sobre los lados de modo que $\overline{CD} = \overline{CE}$. Demostrar que al unir los puntos D y E con los vértices basales se obtienen trazos iguales $\overline{AD} = \overline{BE}$ y ángulos iguales: $\measuredangle DAC = \measuredangle EBC$.

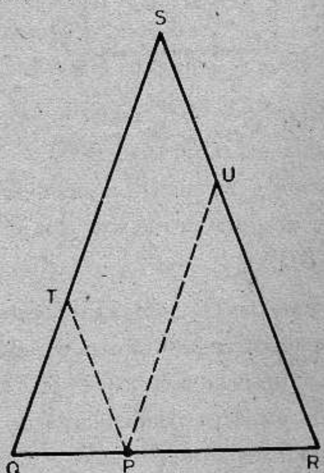


Fig. 5

15) Desde un punto P situado en la base $\overline{QR}$ de un triángulo isósceles QRS se trazan las paralelas a los lados (Fig. 5). Demostrar que:

$$\overline{PT} + \overline{PU} = \overline{QS}$$

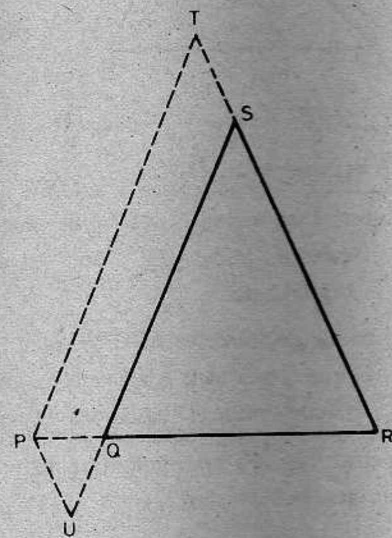


Fig. 6

16) Desde un punto **P situado** en la prolongación de la base **$\overline{QR}$ de un triángulo** isósceles QRS se **trazan las paralelas** a los lados del triángulo (Fig. 6).

Demostrar que:

$$\overline{PT} - \overline{PU} = \overline{QS}$$

Cuadriláteros. Clasificación. Sus elementos. Teoremas sobre paralelogramos y trapecios.

147. CUADRILATEROS

Ya vimos que son polígonos de 4 lados. Asimismo, en la 10ª Unidad demostramos algunos teoremas sobre los ángulos interiores y exteriores de un cuadrilátero.

Los cuadriláteros se clasifican en tres grupos:

I) *Paralelogramos* (se simboliza por #): Son los cuadriláteros que tienen dos pares de lados paralelos. A ellos pertenecen el cuadrado, el rectángulo, el rombo y el romboide.

II) *Trapecios:* Son los cuadriláteros que tienen sólo un par de lados paralelos. Existen »trapecios escalenos, trapecios isósceles, trapecios rectángulos y trapecios trisoláteros«.

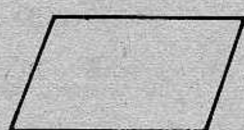
En los trapecios los lados paralelos se llaman *bases*.

III) *Trapezoides:* Son los cuadriláteros que no tienen lados paralelos. Estos pueden ser asimétricos o simétricos. A los simétricos pertenece el *deltoide*, que es el cuadrilátero que tiene dos pares de lados iguales, pero no paralelos (lo forman dos triángulos isósceles diferentes unidos por su base que es común).

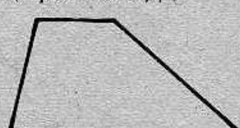
RESUMEN:

CUADRILATEROS (Políg. 4 lados)

- *paralelogramos* (2 pares lados //)
  - cuadrado
  - rectángulo
  - rombo
  - romboide



- *trapecios* (1 par lados //)
  - trap. escaleno
  - trap. isósceles
  - trap. rectángulo
  - trap. trisolátero



- *trapezoides* (sin lados //)
  - asimétricos 
  - simétricos (deltoides) 

Además podemos distinguir:

1) *Paralelogramos rectángulos:* son el cuadrado y el rectángulo, por tener todos sus ángulos rectos.

2) *Paralelogramos equiláteros:* son el cuadrado y el rombo por tener todos sus lados iguales.

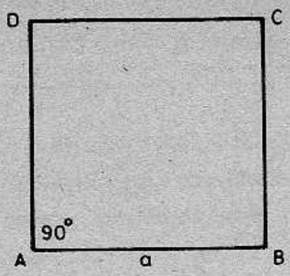
3) *Paralelogramos oblicuángulos:* son el rombo y el romboide por tener sus ángulos oblicuos.

148. DEFINICION Y CONSTRUCCION DE LOS DIFERENTES CUADRILATEROS

A) *Cuadrado* es un paralelogramo (#) que tiene sus 4 lados iguales y sus 4 ángulos rectos.

Para su »construcción geométrica« debe emplearse sólo regla y compás para trazar los ángulos rectos como se hizo en la 8ª Unidad (Nº 74). Pero, usaremos la construcción »mecánica«, disponiendo de escuadra y compás.

Fig. 1



1) Con la escuadra se dibuja un ángulo recto A (Fig. 1).
2) Se hace centro en A eligiendo una abertura conveniente del compás y se determinan los puntos equidistantes B y D de A.
3) Con la misma abertura del compás y centros B y D se trazan dos arcos que al cortarse determinan C.
4) Finalmente, basta unir C con B y D para completar el cuadrado ABCD. Se obtiene:

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = a$

$\measuredangle A = \measuredangle B = \measuredangle C = \measuredangle D = 90°$

B) *Rectángulo:* Es un paralelogramo que tiene sus 4 ángulos rectos y sus lados opuestos de la misma medida, pero no los vecinos.

En su construcción, usaremos la escuadra y el compás por ser más rápida y práctica (Fig. 2):

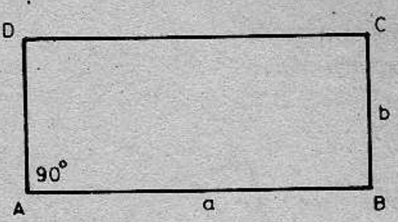


Fig. 2

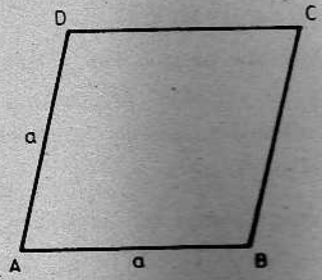
1) Se dibuja un ángulo recto A;
2) Sobre los lados de este ángulo se marcan dos puntos B y D a distintas distancias de A;
3) Se hace centro en B con magnitud AD y centro en D con magnitud AB dibujándose sendos arcos cuya intersección determina C.
4) La unión de C con B y D completa el rectángulo ABCD en el cual:

$\overline{AB} = \overline{CD}$, $\overline{AD} = \overline{BC}$ y

$\measuredangle A = \measuredangle B = \measuredangle C = \measuredangle D = 90°$

C) *Rombo:* Es el paralelogramo que tiene sus 4 lados iguales y sus ángulos oblicuos (Fig. 3).

Fig. 3



Su construcción la haremos con regla y compás:

1) Desde un punto A se trazan dos rayos oblicuos y sobre ellos se marcan dos puntos B y D equidistantes de A (basta una abertura del compás).

2) Con la misma abertura del compás y con centros en B y D se dibujan sendos arcos que al cortarse determinan C.

3) Al unir C con B y D se completa el rombo ABCD en el cual:

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$

D) *Romboide:* Es el paralelogramo que tiene sus lados opuestos de la misma medida y no los vecinos. Además, sus ángulos son oblicuos (Fig. 4).

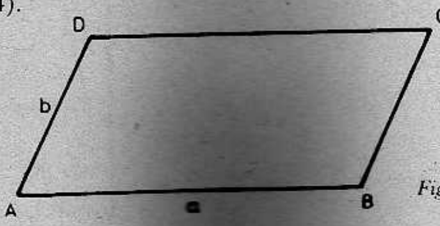


Fig. 4

1) Desde un punto A se trazan dos rayos oblicuos y sobre ellos se marcan dos puntos B y D no equidistantes de A, o sea $\overline{AB} \neq \overline{AD}$.

2) Con magnitud $\overline{AB}$ se dibuja un arco de centro D y con magnitud $\overline{AD}$ se dibuja otro arco de centro B. La intersección C de estos dos arcos se une con B y D, completándose el romboide ABCD en el cual se tiene:

$\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{AD} = \overline{BC}$

Observación: Cuando se pide »dibujar un paralelogramo« se debe dibujar un romboide.

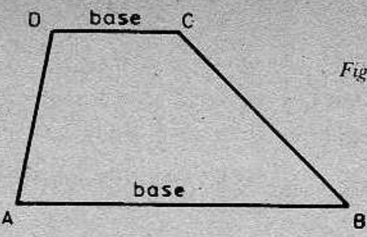


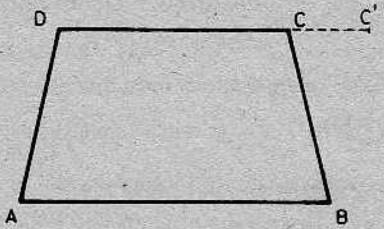
Fig. 5

E) *Trapecio escaleno:* es el trapecio que tiene de distinta medida los lados no paralelos (Fig. 5).

Para su construcción se trazan dos paralelas y sobre ellas se marcan los puntos A, B, C y D de modo que $\overline{AD} \neq \overline{BC}$.

F) *Trapecio isósceles:* es el trapecio que tiene iguales los lados no paralelos (Fig. 6).

Fig. 6



1ª construcción:

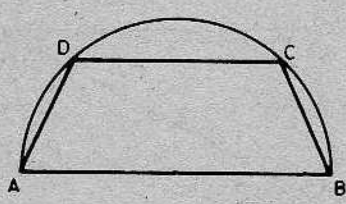
1) Se trazan dos paralelas marcándose en ellas los puntos A, B y D.

2) Con centro en B y radio $\overline{AD}$ se corta la paralela opuesta determinándose C. (También puede obtenerse otro punto C').

Resulta el trapecio isósceles ABCD en el cual $\overline{AD} = \overline{BC}$.

¿Qué se obtiene si se une el punto C' con B?

Fig. 7



2ª construcción:

1) Se dibuja una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$ (Fig. 7).

2) Con igual medida se corta esta semicircunferencia desde A y B obteniéndose los puntos D y C.

3) Se unen los puntos C y D.

G) *Trapecio rectángulo:* Es el que tiene uno de los lados no paralelos perpendicular a las bases (Fig. 8).

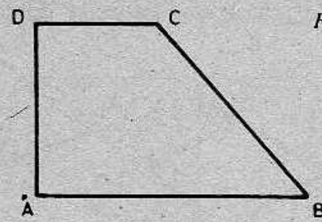


Fig. 8

Construcción:

1) Se dibuja un ángulo recto A y sobre sus lados se marcan los puntos B y D.

2) Por D se traza la paralela a $\overline{AB}$ y se une B con un punto C de ella.

Resulta el trapecio rectángulo ABCD en el cual $\overline{AB} \perp \overline{AD}$ y $\overline{AD} \perp \overline{DC}$.

H) *Trapecio trisolátero:* es el que tiene tres lados iguales (Fig. 9).

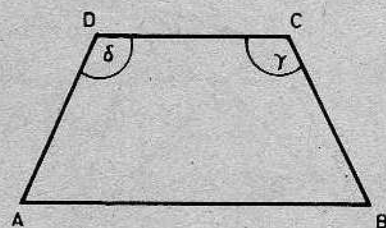


Fig. 9

Construcción:

1) En los extremos C y D de un trazo CD se dibujan dos ángulos iguales $\gamma = \delta$

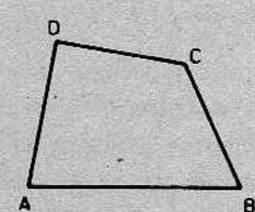
2) Se hace $\overline{DA} = \overline{CD} = \overline{BC}$.

3) Se une A con B.

Otra construcción se obtiene en una circunferencia trazando sucesivamente tres cuerdas iguales.

I) *Trapezoide asimétrico:* es el trapezoide que tiene sus cuatro lados desiguales o máximo tres lados iguales. (Fig. 10).

Fig. 10



J) *Trapezoide simétrico o deltoide:* es el que tiene dos pares de lados iguales, pero no paralelos. Se forma, uniendo las bases de igual medida de dos triángulos isósceles no congruentes (Fig. 11).

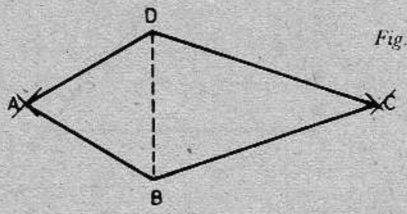
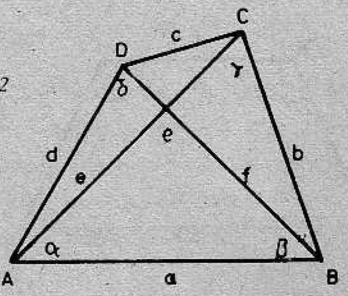


Fig. 11

149. ELEMENTOS DE UN CUADRILATERO

Los vértices, los ángulos, los lados y las diagonales pueden designarse con cualquier letra, pero para fijar un orden y tener puntos de referencia usaremos las siguientes notaciones (Fig. 12):

Fig. 12



vértices: A, B, C y D.
medida de los lados: a, b, c y d.
medida de los ángulos: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.
siendo $\measuredangle A = \alpha, \measuredangle B = \beta, \measuredangle C = \gamma, \measuredangle D = \delta$
medida de las diagonales: e y f
siendo $\overline{AC} = e$, $\overline{BD} = f$.

ϵ = ángulo que forman las diagonales.

Usaremos otras letras cuando sea necesario para evitar repeticiones o posibles confusiones.

150. PROPIEDADES DE LAS DIAGONALES DE LOS CUADRILATEROS

1) Diagonales del cuadrado:
- son de igual medida.
- son perpendiculares entre sí.
- bisectan los ángulos de los vértices.
- se dimidian mutuamente.
- cada una mide $a\sqrt{2}$ siendo a = lado

2) Diagonales del rectángulo:
- son de igual medida
- se dimidian mutuamente
- cada una mide $\sqrt{a^2 + b^2}$ siendo a y b los lados.

3) Diagonales del rombo:
- son perpendiculares entre sí
- bisectan los ángulos de los vértices
- se dimidian mutuamente.

4) Diagonales del romboide: se dimidian mutuamente.

5) Diagonales del trapecio isósceles:
- son iguales entre sí
- se componen de segmentos iguales.

6) Diagonales del deltoide:
- son perpendiculares entre sí
- sólo una dimidia a la otra
- sólo una es bisectriz de dos ángulos opuestos.

Estas propiedades las demostraremos a continuación.

151. TEOREMAS SOBRE LOS CUADRILATEROS

Demostraremos especialmente teoremas sobre los paralelogramos, los trapecios y los deltoides.

152. TEOREMA XXXIV

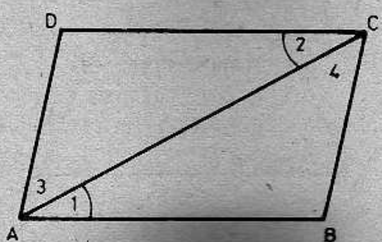
»Los lados opuestos y los ángulos opuestos de un paralelogramo son iguales« (tienen la misma medida).

H.) ABCD es un # $\Rightarrow \overline{AB} \,//\, \overline{CD}$ y $\overline{AD} \,//\, \overline{BC}$

T.) $\overline{AB} = \overline{CD}$ y $\overline{AD} = \overline{BC}$

$\alpha = \gamma$ y $\beta = \delta$

Fig. 13



D.) Al trazar una diagonal, resulta (Fig. 13):

$\triangle ACB \cong \triangle CAD$ porque: (por 1^er Teor. de $\cong$)
- $\measuredangle 1 = \measuredangle 2$ (alt. //)
- $\measuredangle 3 = \measuredangle 4$ (alt. //)
- $\overline{AC} = \overline{CA}$ (lado común)

$\therefore \overline{AB} = \overline{CD}; \overline{AD} = \overline{BC}$

$\alpha = \gamma; \beta = \delta$

Este teorema nos será muy útil más adelante, pues lo aplicaremos frecuentemente.

153. TEOREMA XXXV (Recíproco del anterior)

»Un cuadrilátero que tiene los lados opuestos respectivamente de la misma medida es un paralelogramo«.

H.) $\overline{AB} = \overline{CD}$ y $\overline{BC} = \overline{AD}$

T.) $\overline{AB} // \overline{CD}$ y $\overline{AD} // \overline{BC}$

D.) Al trazar una diagonal, se obtiene (Fig 13):

$$\triangle ACB \cong \triangle CAD \text{ porque: } \left\{ \begin{array}{l} \overline{AB} //= \overline{CD} \text{ (por H.)} \\ \overline{AD} //= \overline{BC} \text{ (por H.)} \\ \overline{AC} = \overline{CA} \text{ (lado común)} \end{array} \right.$$

(por 4° Teor. de $\cong$)

$\therefore \measuredangle 1 = \measuredangle 2$ (áng. alternos iguales) $\Rightarrow \overline{AB} // \overline{CD}$

$\measuredangle 3 = \measuredangle 4$ (áng. alternos iguales) $\Rightarrow \overline{AD} // \overline{BC}$

Por lo tanto: ABCD es un # porque tiene sus lados opuestos paralelos.

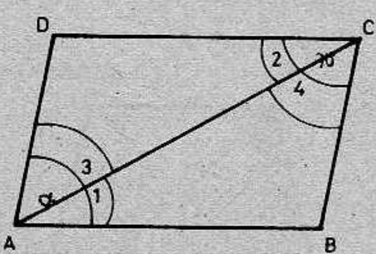
154. TEOREMA XXXVI

»Un cuadrilátero que tiene un par de lados iguales y paralelos, es un paralelogramo«.

H.) $\overline{AB} = \overline{CD}$ y $\overline{AB} // \overline{CD}$

T.) ABCD es #

Fig. 14



D.) Al trazar una diagonal, se obtiene (Fig. 14):

$$\triangle ACB \cong \triangle CAD \text{ porque: } \left\{ \begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{CD} \text{ (por H.)} \\ \measuredangle 1 = \measuredangle 2 \text{ (alt. //)} \\ \overline{AC} = \overline{CA} \text{ (lado común)} \end{array} \right.$$

(por 2° Teor. de $\cong$)

$\therefore \measuredangle 3 = \measuredangle 4 \Rightarrow \overline{AD} // \overline{BC}$ $\therefore$ ABCD es #.

155. TEOREMA XXXVII

»Las diagonales de un paralelogramo se dimidian«.

H.) ABCD es #

$\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{M\}$

T.) $\overline{MA} = \overline{MC}$ y $\overline{MB} = \overline{MD}$

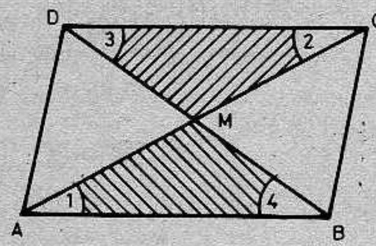


Fig. 15

D.) Se tiene (Fig. 15):

$$\triangle AMB \cong \triangle CMD \text{ porque: } \left\{ \begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{CD} \text{ (por Teor. XXXIV)} \\ \measuredangle 1 = \measuredangle 2 \text{ (alt. //)} \\ \measuredangle 3 = \measuredangle 4 \text{ (alt. //)} \end{array} \right.$$

(por 1^er^ Teor. de $\cong$)

$\therefore \overline{MA} = \overline{MC}$ y $\overline{MB} = \overline{MD}$

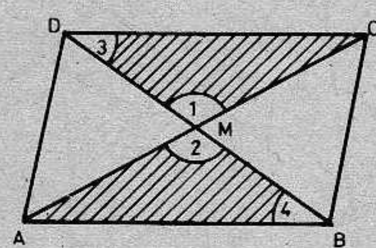
156. TEOREMA XXXVIII. (Recíproco del anterior)

»Un cuadrilátero que tiene sus diagonales dimidiadas es un paralelogramo«.

H.) $\overline{MA} = \overline{MC}$ y $\overline{MB} = \overline{MD}$

T.) ABCD es #

Fig. 16



D.) Se tiene (Fig. 16):

$$\triangle ABM \cong \triangle CDM \text{ porque: } \left\{ \begin{array}{l} \overline{MA} = \overline{MC} \text{ (por H.)} \\ \overline{MB} = \overline{MD} \text{ (por H.)} \\ \measuredangle 1 = \measuredangle 2 \text{ (op. vért.)} \end{array} \right.$$

(por 2° Teor. de $\cong$)

$\therefore \measuredangle 3 = \measuredangle 4 \Rightarrow \overline{AB} // \overline{CD}$

$\overline{AB} = \overline{CD}$

$\therefore$ ABCD es un # (por Teor. XXXVI)

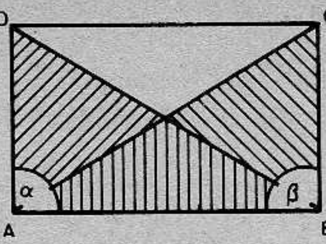
157. TEOREMA XXXIX

»Las diagonales de un paralelogramo rectángulo son de la misma medida«. (Se cumple en el cuadrado y en el rectángulo).

H.) ABCD es rectángulo

T.) $\overline{AC} = \overline{BD}$

Fig. 17



D.) Se tiene (Fig. 17):

$\triangle ABC \cong \triangle ABD$ porque: (por 2° Teor. de $\cong$)
$$\left\{\begin{array}{l} \overline{AD} = \overline{BC} \text{ (por Teor. XXXIV)} \\ \alpha = \beta = 90° \text{ (por H.)} \\ \overline{AB} = \overline{BA} \text{ (lado común)} \end{array}\right.$$

$\therefore \overline{AC} = \overline{BD}$

158. TEOREMA XL

»Las diagonales de un paralelogramo equilátero (cuadrado y rombo) son perpendiculares entre sí y bisectan los ángulos de los vértices«.

H. $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} \Rightarrow ABCD$ es rombo

T.) $\left\{\begin{array}{l} AC \perp BD \\ \measuredangle 1 = \measuredangle 2,\ \measuredangle 3 = \measuredangle 4,\ \measuredangle 5 = \measuredangle 6,\ \measuredangle 7 = \measuredangle 8 \end{array}\right.$

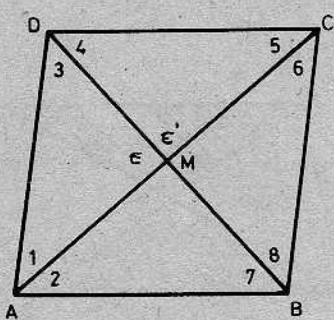


Fig. 18

D.) Se tiene (Fig. 18):

$\triangle AMD \cong \triangle CMD$ porque: (por 4° Teor. de $\cong$)
$$\left\{\begin{array}{l} \overline{DA} = \overline{DC} \text{ (por H.)} \\ \overline{DM} = \overline{MD} \text{ (lado común)} \\ \overline{AM} = \overline{CM} \text{ (por Teor. XXXVII)} \end{array}\right.$$

$\therefore \measuredangle \epsilon = \triangle \epsilon' = 90° \Rightarrow \overline{DM} \perp \overline{AB}$

$\measuredangle 3 = \measuredangle 4 \Rightarrow \overline{DM}$ = bisectriz.

159. TEOREMA XLI

»Los ángulos basales de un trapecio isósceles son iguales« (miden lo mismo).

H.) $\overline{AB} // \overline{CD}$ y $\overline{AD} = \overline{BC}$

T.) $\alpha = \beta$ y $\gamma = \delta$

D.) Se traza por C // AD; resulta (Fig. 19):

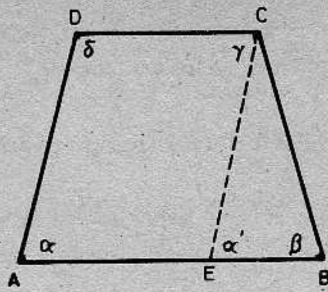


Fig. 19

AECD un # (lados opuestos //).

$\therefore \overline{EC} = \overline{AD}$ (por Teor. XXXIV)

pero $\overline{BC} = \overline{AD}$ (por H.)

$\therefore \overline{BC} = \overline{CE}$ (por transitividad)

por lo tanto el $\triangle$ EBC es isósceles.

luego: $\alpha' = \beta$

pero $\alpha' = \alpha$ (corresp. entre //)

$\therefore \alpha = \beta$

Además: $\alpha + \delta = 180°$ ($\measuredangle$ colaterales entre //)

$\beta + \gamma = 180°$ ($\measuredangle$ colaterales entre //)

$\therefore \cancel{\alpha} + \delta = \cancel{\beta} + \gamma$ (se »cancelan« α y β por ser iguales).

de donde $\delta = \gamma$

160. TEOREMA XLII

»Las diagonales de un trapecio isósceles son iguales«.

H.) $\overline{AB} // \overline{CD}$ y $\overline{AD} = \overline{BC}$

T.) $\overline{AC} = \overline{BD}$

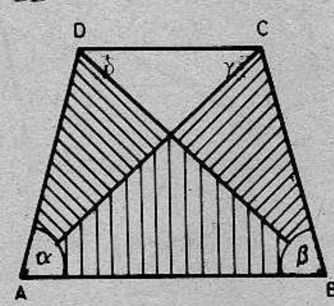


Fig. 20

D.) Se tiene (Fig. 20)

$\triangle ABC \cong \triangle ABD$ porque: (por 2° Teor. de $\cong$)
$$\left\{\begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{BA} \text{ (lado común)} \\ \overline{AD} = \overline{BC} \text{ (por H.)} \\ \alpha = \beta \text{ (Por Teor. XLI)} \end{array}\right.$$

$\therefore \overline{AC} = \overline{BD}$

161. TEOREMA XLIII

»Sólo una diagonal de un deltoide es bisectriz de dos ángulos opuestos«.

H.) $\overline{DA} = \overline{DB}$ y $\overline{CA} = \overline{CB}$

T.) $\overline{CD}$ = bisectriz

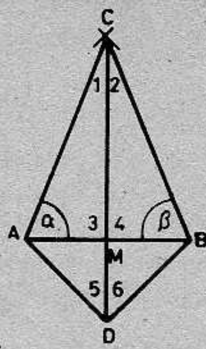


Fig. 21

D.) Se tiene (Fig. 21):

$\triangle$ DCA $\cong$ $\triangle$ CDB porque: $\left\{ \begin{array}{l} \overline{CA} = \overline{CB} \text{ (por H.)} \\ \overline{DA} = \overline{DB} \text{ (por H.)} \\ \overline{CD} = \overline{CD} \text{ (lado común)} \end{array} \right.$
(por 4° Teor. de $\cong$)

$\therefore$ $\measuredangle 1 = \measuredangle 2$ y $\measuredangle 5 = \measuredangle 6 \Rightarrow \overline{CD}$ = bisectriz.

162. TEOREMA XLIV

»Las diagonales de un deltoide son perpendiculares«.

H.) $\overline{DA} = \overline{DB}$ y $\overline{CA} = \overline{CB}$

T.) $\overline{AB} \perp \overline{CD}$

D.) Se tiene (Fig. 20):

$\triangle$ AMC $\cong$ $\triangle$ BMC porque: $\left\{ \begin{array}{l} \measuredangle 1 = \measuredangle 2 \text{ (por Teor. XLIII)} \\ \overline{CM} = \overline{CM} \text{ (lado común)} \\ \overline{CA} = \overline{CB} \text{ (por H.)} \end{array} \right.$
(por 2° Teor. de $\cong$)

$\therefore \measuredangle 3 = \measuredangle 4 = 90° \Rightarrow \overline{CM} \perp \overline{AB}$

163. TEOREMA XLV

»Una diagonal de un deltoide dimidia a la otra«.

H.) $\overline{CA} = \overline{CB}$ y $\overline{DA} = \overline{DB}$

T.) $\overline{MA} = \overline{MB}$

D.) ¡Hágala usted! (Fig. 20)

Corolario: »La recta que une los vértices de dos triángulos isósceles no congruentes que tienen la base común, es perpendicular a ésta, la dimidia y es bisectriz de los ángulos de los vértices«.

164. OBSERVACION

»Los teoremas anteriores se pueden demostrar aprovechando el Teorema XXIII. En efecto:

C $\in$ a la simetral de $\overline{AB}$ por ser $\overline{CA} = \overline{CB}$;

D $\in$ a la simetral de $\overline{AB}$ por ser $\overline{DA} = \overline{DB}$,

(. . . siga usted)

165. TEOREMA XLVI

»La recta que une los centros de dos circunferencias que se cortan (»circunferencias secantes«), es simetral de la cuerda común«.

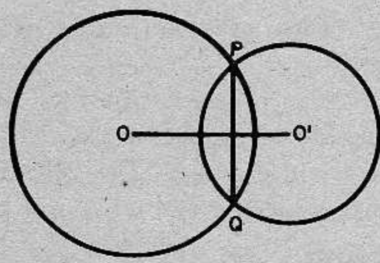


Fig. 22

Demuéstrelo usted; puede guiarse por la observación anterior.

166. CONSTRUCCION DE POLIGONOS CONGRUENTES

Aprovechando la propiedad de los paralelogramos de »tener los lados opuestos iguales y paralelos«, se puede copiar fácilmente un polígono cualquiera.

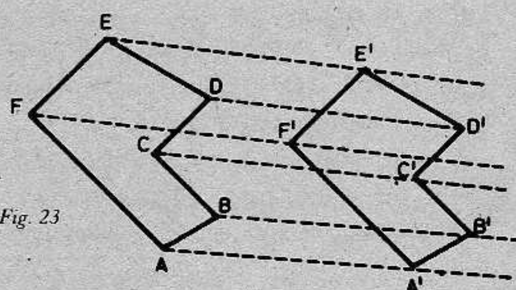


Fig. 23

En efecto, para copiar el polígono ABCDEF se trazan por sus vértices paralelas en cualquier dirección o en una dirección deseada. Sobre estas paralelas se copia a partir de cada vértice un trazo convenientemente elegido de modo que AA' = BB' = CC' = DD' = EE' = FF'. Por último, basta unir los puntos con »primas« para obtener el polígono A'B'C'D'E'F' que es congruente con el polígono ABCDEF por tener sus lados y sus ángulos respectivamente iguales.

¿Se podría adaptar este procedimiento para copiar una figura curvilínea?

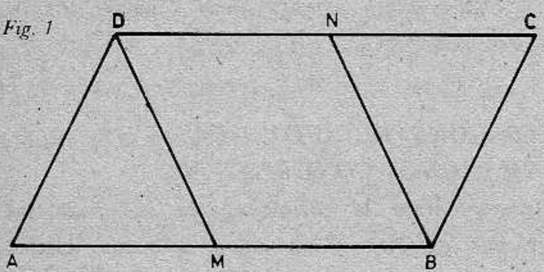
167. EJERCICIOS

En los ejercicios 1 al 4 coloque una V si lo que se afirma es verdadero o una F si lo que se afirma es falso.

1) (. . . .) »Todo triángulo equiángulo es equilátero«.
2) (. . . .) »Todo cuadrilátero equilátero es isógono«.
3) (. . . .) »Todo polígono isógono es equilátero«.
4) (. . . .) »Un polígono para ser regular debe ser isógono y equilátero a la vez«.
5) En el # ABCD se tiene $\overline{MA} = \overline{MB}$ y $\overline{NC} = \overline{ND}$. Demostrar que (Fig. 1):

$\triangle$ AMD $\cong \triangle$ CNB

Fig. 1



6) Si P = {# equiláteros},
   Q = {# rectángulos}
   a) ¿Cuál es P ∩ Q? b) ¿Cuál es P ∪ Q?
   c) ¿Cuál es P − Q? d) ¿Cuál es Q − P?
7) Si U = {cuadriláteros} (Fig. 2)
   A = {cuadriláteros con diagonales perpendiculares};
   B = {cuadriláteros con diagonales iguales}.

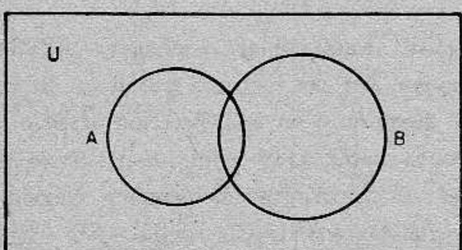


Fig. 2

Entonces, completar las siguientes igualdades, escribiendo dentro del paréntesis el nombre del o de los cuadriláteros correspondientes:

a) A ∩ B = {. . . . .}

b) A ∪ B = {. . . . .}

c) A − B = {. . . . .}

d) B − A = {. . . . .}

168. TESTS

1) La condición necesaria y suficiente para que un cuadrilátero sea un paralelogramo es que:
   A) sus diagonales sean iguales;
   B) sus diagonales sean perpendiculares;
   C) que tengan un par de lados paralelos;
   D) que sus diagonales se dimidien mutuamente;
   E) no bastan las condiciones anteriores.
2) Los ángulos interiores de un trapezoide son entre sí como 3:4:5:6.
   Entonces, el menor de sus ángulos mide:
   A) 40°; B) 60°;
   C) 80°; D) 100°;
   E) 120°.
3) En el cuadrado QRST un punto P ∈ $\overline{TS}$. Al unir P con Q y R se determina el $\triangle$ QRP que *no* puede ser (Fig. 3):
   A) acutángulo; B) escaleno;
   C) isósceles; D) equilátero;
   E) rectángulo.

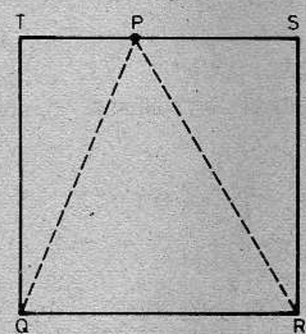


Fig. 3

4) Los lados de un rectángulo miden 35 cm y 25 cm. Al unir los puntos medios de sus lados se forma:
   A) un cuadrado de 15 cm de lado;
   B) otro rectángulo de 60 cm de perímetro;
   C) un romboide de 30 cm de perímetro;
   D) un rombo cuyas diagonales suman 60 cm;
   E) un cuadrado de 437,5 cm^2 de área.

5) En un exágono estrellado (estrella de seis puntas) se pueden distinguir en total (Fig. 4):

I) tres rombos;

II) 6 trapecios isósceles;

III) ocho triángulos equiláteros.

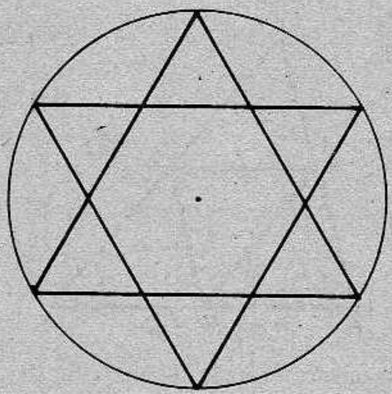


Fig. 4.

De estas afirmaciones son verdaderas:

A) las tres; B) sólo I y II;

C) sólo I y III; D) sólo II y III;

E) solamente III.

6) Si en un cuadrilátero las diagonales son perpendiculares y a la vez bisectrices de los ángulos, entonces se trata de:

A) un rombo o un rectángulo;

B) un paralelogramo equilátero;

C) un paralelogramo rectangular;

D) un cuadrado o un romboide;

E) un trapecio isósceles.

7) Si en un cuadrilátero RSTQ las diagonales $\overline{RT}$ y $\overline{SQ}$ son distintas y se cortan perpendicularmente en un punto P de modo que $\overline{PR} = \overline{PT}$ y $\overline{PS} = \overline{PQ}$, entonces el cuadilátero es:

A) un cuadrado; B) un rectángulo;

C) un trapecio rectangular;

D) un rombo;

E) un trapezoide.

8) Un paralelogramo tiene las siguientes propiedades:

I) los 4 lados iguales

II) los 4 ángulos rectos

III) las diagonales perpendiculares.

Para que este paralelogramo sea un cuadrado debe cumplir con una de las siguientes alternativas:

A) es condición suficiente la I;

B) es condición necesaria y suficiente la II;

C) es condición necesaria y suficiente la I y III al mismo tiempo;

D) basta con la III;

E) debe cumplirse la II y III a la vez.

9) Si M es el punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero RSTQ de modo que $\overline{MR} = \overline{MS} = \overline{MT} = \overline{MQ}$, entonces este cuadrilátero es:

A) un rombo; B) un trapecio isósceles;

C) un romboide; D) un deltoide;

E) un paralelogramo rectangular.

10) Al unir los puntos medios de los lados de un rombo se obtiene:

A) un romboide; B) un cuadrado;

C) otro rombo; D) un rectángulo;

E) un deltoide.

11) M es el punto de intersección de las diagonales $\overline{RT}$ y $\overline{SQ}$ del cuadrilátero RSTQ. Si estas diagonales son perpendiculares, entonces el cuadrilátero *no* puede ser:

A) un rectángulo; B) un cuadrado;

C) un rombo; D) un trapecio;

E) un deltoide.

12) Al unir los puntos medios de los lados de un trapezoide se obtiene:

A) otro trapezoide; B) un rectángulo;

C) un romboide; D) un rombo;

E) un deltoide.

Resp. 1) D; 2) B; 3) D; 4) D; 5) A; 6) B; 7) D; 8) E; 9) E; 10) D; 11) A; 12) C.

17ª UNIDAD

Otras relaciones métricas en el triángulo y en el trapecio. Medianas. Poligonal circundante y circundada.

---

169. Anteriormente ya hemos tratado algunas relaciones métricas en el triángulo y cuadrilátero respecto a los ángulos interiores y exteriores. Ahora veremos otras relaciones, y para ello conviene recordar: 1) que un triángulo tiene tres medianas y que »son los segmentos que se obtienen al unir los puntos medios de dos lados«;

2) que un trapecio tiene sólo una mediana que »es el segmento que se obtiene al unir los puntos medios de los lados no paralelos«.

170. TEOREMA XLVII

»Cada mediana de un triángulo es paralela al lado opuesto a ella e igual a la mitad de este lado«.

H.) $\overline{MC} = \overline{MA}$ y $\overline{NB} = \overline{NC}$

$\overline{MN}$ = mediana

T.) $\overline{MN} // \overline{AB}$ y $\overline{MN} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB}$

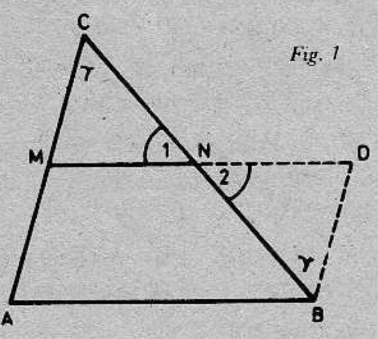


Fig. 1

D.) Al trazar por B // $\overline{AC}$ y prolongar $\overline{MN} \longrightarrow N$, se determina el $\triangle$ BDN obteniéndose (Fig. 1):

$$\triangle BDN \cong \triangle MNC \text{ porque: } \begin{cases} \overline{NB} = \overline{NC} \text{ (por H.)} \\ \measuredangle 1 = \measuredangle 2 \text{ (op. vértice)} \\ \gamma = \gamma' \text{ (alt. entre //)} \end{cases}$$

(por 1er Teor. de $\cong$)

$\therefore$ $\overline{BD} = \overline{MC}$; $\overline{MN} = \overline{ND}$

pero $\overline{MA} = \overline{MC}$ (por H.)

$\therefore$ ABDM es un # (por Teor. XXXVI)

Por lo tanto:

$$\left.\begin{matrix} \overline{MD} // \overline{AB} \\ \overline{MD} = \overline{AB} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \overline{MN} // \overline{AB} \\ \overline{MN} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \end{cases}$$

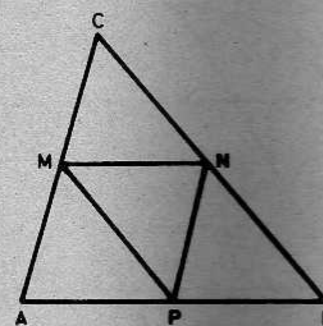


Fig. 2

En la misma forma se obtiene: (Fig. 2):

$\overline{MP} // \overline{BC}$ y $\overline{MP} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC}$

$\overline{NP} // \overline{AC}$ y $\overline{NP} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC}$

Otra demostración: Se prolonga $\overline{MN} \rightarrow N$ de modo que $\overline{ND} = \overline{MN}$ (Fig. 3).

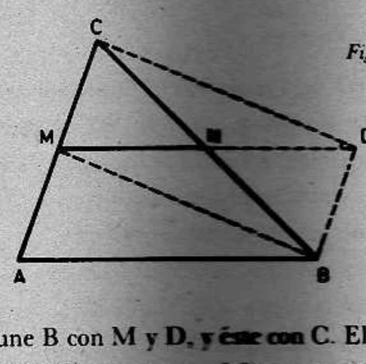


Fig. 3

Se une B con M y D, y éste con C. El cuadrilátero MBDC es un paralelogramo por tener sus diagonales dimidiadas (Teorema XXXVII).

Luego: BD = MC = MA $\Rightarrow$ ABDM es # (Teor. XXXVI).

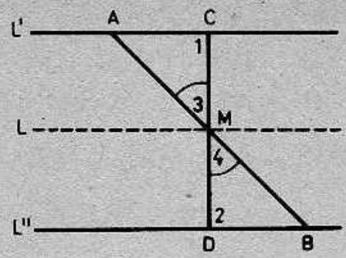
Por lo tanto: $\overline{MD} // \overline{AB}$ y $\overline{MD} = \overline{AB}$
pero como MN $= \frac{1}{2} \cdot \overline{MD} \Rightarrow \overline{MN} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB}$

171. TEOREMA XLVIII

»La paralela media de dos rectas paralelas, dimidia a todo segmento trazado entre las paralelas«.

H.) L' // L''; L = paralela media;

Fig. 4



AB cualquier segmento con $A \in L'$ y $B \in L''$ (Fig. 4).

T.) $\overline{MA} = \overline{MB}$

D.) Por el punto de intersección M de L con AB se traza la perpendicular a las paralelas L' y L''. Resulta:

$$\triangle ACM \cong \triangle BDM \text{ porque: } \left\{ \begin{array}{l} \overline{MC} = \overline{MD} \text{ (por H.)} \\ \sphericalangle 1 = \sphericalangle 2 = 90° \text{ (por construcción)} \\ \sphericalangle 3 = \sphericalangle 4 \text{ (op. vértice)} \end{array} \right.$$

(por 1^er Teor. de $\cong$)

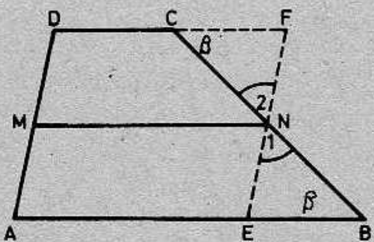
$\therefore \ \overline{MA} = \overline{MB}$

Corolario: De este teorema se obtiene la siguiente construcción: para dibujar la paralela media basta unir los puntos medios de dos segmentos trazados entre las paralelas.

172. TEOREMA XLIX

»La mediana de un trapecio es paralela a las bases e igual a las semisumas de ellas«.

Fig. 5



H.) $\overline{MA} = \overline{MD}$, $\overline{NB} = \overline{NC}$ (Fig. 5)

$\overline{MN}$ = mediana

$$\text{T.)} \left\{ \begin{array}{l} 1)\ \overline{MN} \,//\, \overline{AB} \text{ y } \overline{CD} \\ 2)\ \overline{MN} = \dfrac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \end{array} \right.$$

D_1.) De acuerdo con el corolario del teorema anterior, al ser $\overline{AB} \,//\, \overline{CD}$ y M $\wedge$ N puntos medios de los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$, resulta $\overline{MN} \,//\, \overline{AB}$ y $\overline{CD}$ por ser paralela media.

D_2.) Para esta segunda parte se traza por N $//$ $\overline{AD}$ y se prolonga $\overline{DC} \rightarrow$ C resultando:

$$\triangle EBN \cong \triangle FCN \text{ porque: } \left\{ \begin{array}{l} \overline{NB} = \overline{NC} \text{ (por H.)} \\ \sphericalangle 1 = \sphericalangle 2 \text{ (op. vértice)} \\ \beta = \beta' \text{ (alt. entre //)} \end{array} \right.$$

(por 1^er Teor. de $\cong$)

$\therefore \ \overline{CF} = \overline{BE}$

Pero, siendo AEFD un paralelogramo, se obtiene:

$\overline{DF} = \overline{DC} + \overline{CF}$

$2 \cdot \overline{MN} = \overline{AE} + \overline{DF} \Rightarrow \overline{MN} = \dfrac{\overline{AE} + \overline{DF}}{2}$

pero: $\overline{AE} = \overline{AB} - \overline{BE}$ de donde:

$\therefore \ \overline{MN} = \dfrac{(\overline{AB} - \overline{BE}) + (\overline{DC} + \overline{CF})}{2}$

$\overline{MN} = \dfrac{\overline{AB} + \overline{DC}}{2}$ puesto que $-\overline{BE}$ se »cancela« con $+\overline{CF}$ por ser iguales.

173. TEOREMA L

»La paralela trazada por el punto medio de un lado a otro lado de un triángulo, coincide con la mediana correspondiente«.

H.) $\overline{MA} = \overline{MC}$; $\overline{MN} \,//\, \overline{AB}$

T.) $\overline{NB} = \overline{NC}$

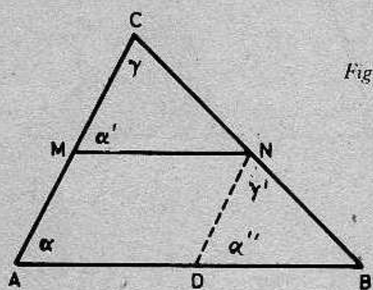


Fig. 6

D.) Se traza por N $//$ $\overline{AC}$; resulta (Fig. 6)

ADNM un paralelogramo (por tener dos pares de lados paralelos). Por lo tanto:

$\overline{ND} = \overline{MA}$ (por Teor. XXXIV)

pero $\quad \overline{MC} = \overline{MA}$ (por H.)

$\therefore \ \overline{ND} = \overline{MC}$

Con esto se obtiene:

$$\triangle DBN \cong \triangle MNC \text{ porque: } \left\{ \begin{array}{l} \overline{CM} = \overline{ND} \\ \gamma = \gamma' \text{ (alt. entre //)} \\ \alpha' = \alpha'' \text{ (Teor. XII)} \end{array} \right.$$

(por 1^er Teor. de $\cong$)

$\therefore \ \overline{NB} = \overline{NC} \Rightarrow \overline{MN}$ = mediana.

174. TEOREMA LI

»La paralela a las bases de un trapecio trazada por el punto medio de uno de los lados no paralelos, coincide con la mediana del trapecio«.

H.) $\overline{MA} = \overline{MD}$; $\overline{MN} // \overline{AB}$ y $\overline{CD}$

T.) $\overline{NB} = \overline{NC}$

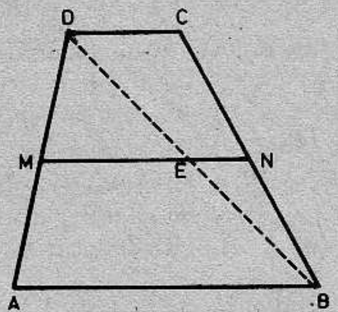


Fig. 7

D.) Basta aplicar el teorema anterior, obteniéndose: $\overline{EB} = \overline{ED}$; esto quiere decir que E es punto medio de $\overline{BD}$ (Fig. 7). Análogamente, se demuestra que $\overline{NB} = \overline{NC}$, es decir: $\overline{MN}$ = mediana.

Otra demostración: Debemos demostrar que $\overline{MN}$ es paralela a las bases y, a la vez, mediana del trapecio ABCD (Fig. 8).

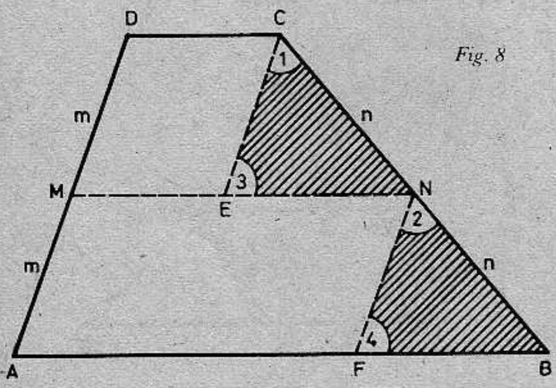


Fig. 8

Se traza por C y N la paralela al lado $\overline{AD}$, resultando:

$\triangle$ ENC $\cong$ $\triangle$ FBN pues:
- $\overline{NF} = \overline{AM}$ = m (lados opuestos de un #)
- $\overline{CE} = \overline{MD}$ = m (lados opuestos de un #)
- $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$ (correspon. entre //)
- $\sphericalangle 3 = \sphericalangle 4$ (ídem.)

(por 1er Teor. de $\cong$)

$\therefore$ $\overline{NB} = \overline{NC}$; por lo tanto: $\overline{MN}$ = mediana

Además:

$$+\begin{cases}\overline{MN} = \overline{DC} + \overline{EN} \text{ (pues } \overline{DC} = \overline{ME}) \\ \overline{MN} = \overline{AB} - \overline{BF} \text{ (pues } \overline{MN} = \overline{AF})\end{cases}$$

$$2 \cdot \overline{MN} = \overline{DC} + \overline{AB} \text{ (pues } \overline{EN} = \overline{BF})$$

Por lo tanto: $\overline{MN} = \dfrac{\overline{AB} + \overline{DC}}{2}$

175. RELACIONES ENTRE LOS LADOS Y ANGULOS DE UN TRIANGULO

Ya demostramos en el Teorema XXVI que »en un triángulo a los lados iguales se oponen ángulos iguales« y, recíprocamente, »a los ángulos iguales se oponen ángulos iguales«. Es decir:

Si $a = b \Longleftrightarrow \alpha = \beta$

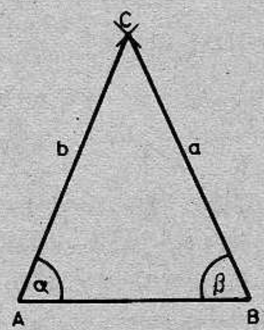


Fig. 9

En seguida, veremos y demostraremos otras relaciones métricas.

176. TEOREMA LII

»En un triángulo a mayor lado se opone mayor ángulo«.

H.) $\overline{BC} > \overline{AC}$

T.) $\alpha > \beta$

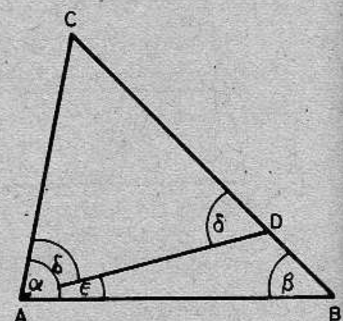


Fig. 10

D.) Se hace $\overline{CD} = \overline{CA}$ formándose el $\triangle$ isósceles ADC. Por lo tanto (Fig. 10):

$$\sphericalangle CAD = \sphericalangle CDA = \delta$$

Como δ es ángulo exterior del $\triangle$ ABD, se obtiene (por Teor. XVII):

$$\left.\begin{array}{r} \delta = \beta + \epsilon \Rightarrow \delta > \beta \text{ (por Ax. A)} \\ \text{pero } \alpha > \delta \text{ (por Ax. A)} \end{array}\right\} +$$

Al sumar se obtiene:

$\delta + \alpha > \beta + \delta$ (se »cancelan« los términos iguales)

$\therefore \quad \alpha > \beta$

177. TEOREMA LIII. (Recíproco del anterior) »En un triángulo a mayor ángulo se opone mayor lado«.

H.) $\measuredangle BAC = \alpha$, $\measuredangle ABC = \beta$, $\alpha > \beta$

T.) $\overline{BC} > \overline{AC}$

D.) En A se copia $\beta = \measuredangle BAD$ (Fig. 11).

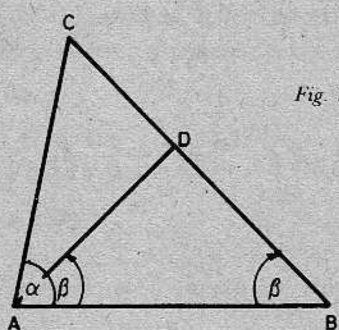


Fig. 11

Resulta: $\triangle$ ABD isósceles (Teor. XXVI) de donde: $\overline{DA} = \overline{DB}$

Pero $\overline{AD} + \overline{DC} > \overline{AC}$ (por Ax. H.)

o bien: $\underbrace{\overline{BD} + \overline{DC}} > \overline{AC}$ (por Ax. D)

Luego: $\overline{BC} > \overline{AC}$

Corolarios: 1) La hipotenusa de un triángulo rectángulo es el lado mayor.

2) En un triángulo obtusángulo el lado opuesto al ángulo obtuso es el lado mayor.

178. TEOREMA LIV

»Cada lado de un triángulo es menor que la suma de los otros dos lados y, a la vez, es mayor que la diferencia de ellos«.

H.) a, b y c son las medidas de los lados del $\triangle$ ABC (Fig. 12).

T.)

$$\text{I)}\begin{cases} a < b + c \\ b < a + c \\ c < a + b \end{cases} \qquad \text{II)}\begin{cases} a > c - b \\ b > a - c \\ c > a - b \end{cases}$$

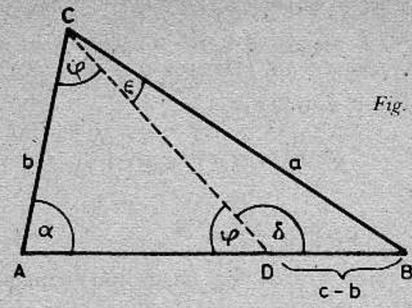


Fig. 12

D.) Se hace $\overline{AD} = \overline{AC} = b \Rightarrow \overline{DB} = c - b$

En el $\triangle$ isósceles DCA se verifica:

$$\alpha + 2 \cdot \varphi = 180^\circ \Rightarrow \varphi = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$$

Como $\delta + \varphi = 180^\circ \Rightarrow \delta = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$ ($\measuredangle$ obtuso)

Siendo $\measuredangle ACB = \gamma \Rightarrow \epsilon = \gamma - \varphi$

De lo anterior se obtiene:

$\delta > 90^\circ$ ($\measuredangle$ obtuso)

$\epsilon < 90^\circ$ (el $\triangle$ DBC no puede tener más de un ángulo obtuso)

por lo tanto: $\delta > \epsilon \Rightarrow a > c - b$ (por el Teor. LIII).

La demostración de las primeras desigualdades es obvia, pues se cumplen por el Axioma H (N° 49).

Otra demostración: Como »la distancia más corta entre dos puntos es el trazo que los une« (Ax. H), obtenemos:

$c < a + b$; análogamente: $a < b + c$. Al restar »b« en ambos miembros de esta desigualdad, resulta:

$$a - b < \cancel{b} + c - \cancel{b} \Rightarrow c > a - b$$

Por lo tanto: $\begin{cases} c < a + b \\ c > a - b \end{cases}$

179. COROLARIO

La central de dos circunferencias secantes (que se cortan) es menor que la suma de los radios de

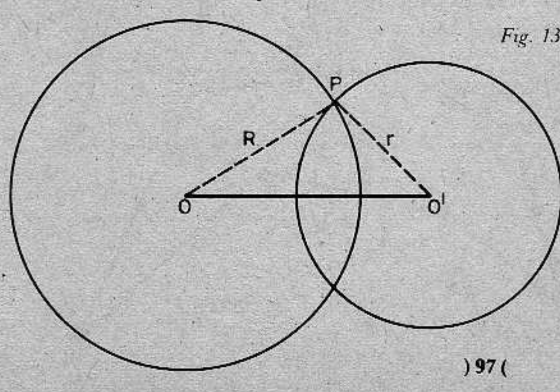


Fig. 13

las circunferencias y mayor que la diferencia de ellos. Por lo tanto (Fig. 13):

$$R - r < OO' < R + r$$

180. OBSERVACION

Dados tres trazos de magnitud conocida *no siempre* es posible construir un triángulo con ellos. Para que esto sea posible los tres trazos deben cumplir con este teorema (LIV).

Por ejemplo, trate de construir un triángulo en que $a = 4$ cm, $b = 5$ cm y $c = 10$ cm. Verá que no es posible puesto que:
$4 \text{ cm} < 5 \text{ cm} + 10 \text{ cm}$ y $4 \text{ cm} < 10 \text{ cm} - 5 \text{ cm}$ debiendo ser »mayor«;

$10 \text{ cm} > 5 \text{ cm} + 4 \text{ cm}$ y debiera ser »menor«;

$5 \text{ cm} < 10 \text{ cm} - 4 \text{ cm}$ y debiera ser »mayor«, etc.

181. TEOREMA LV

Demostrar que »la transversal de gravedad correspondiente a un lado de un triángulo, es menor que la semisuma de los otros dos lados«.

Por ejemplo, demuestre usted que

$$t_a < \frac{b + c}{2}$$

Indicación: duplique t_a y forme el # ABDC; aplique el Teor. LIV.

182. TEOREMA LVI

»La poligonal convexa circundante es de mayor longitud que la poligonal circundada correspondiente que tiene los mismos extremos«.

(Recuerde que »una poligonal es convexa cuando una transversal la corta máximo en dos puntos«).

H.) Poligonal AEFGD circunda a la poligonal ABCD (Fig. 14).

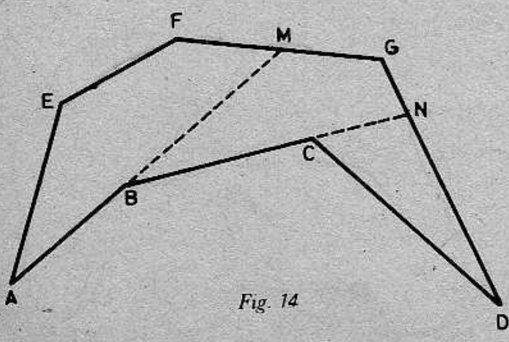


Fig. 14

T.) $\overline{AE} + \overline{EF} + \overline{FG} + \overline{GD} > \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}$

D.) Se prolongan $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ hasta cortar la poligonal circundante. Como »la distancia más corta entre dos puntos es el trazo que los une«, resulta:

$$\left.\begin{aligned} \overline{AB} + \overline{BM} &< \overline{AE} + \overline{EF} + \overline{FM} \\ \overline{BC} + \overline{CN} &< \overline{BM} + \overline{MG} + \overline{GN} \\ \overline{CD} &< \overline{CN} + \overline{ND} \end{aligned}\right\} +$$

$$\overline{AB} + \cancel{\overline{BM}} + \overline{BC} + \cancel{\overline{CN}} + \overline{CD} <$$

$$\overline{AE} + \overline{EF} + \overline{FM} + \cancel{\overline{BM}} + \overline{MG} + \overline{GN} + \cancel{\overline{CN}} + \overline{ND}$$

al »cancelar« los trazos iguales se obtiene:

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} <$$

$$\overline{AE} + \overline{EF} + \underbrace{(\overline{FM} + \overline{MG})}_{\overline{FG}} + \underbrace{(\overline{GN} + \overline{ND})}_{\overline{GD}}$$

luego:

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} < \overline{AE} + \overline{EF} + \overline{FG} + \overline{GD}$$

(q.e.d)

Otra demostración:

Se unen los puntos como se indica en la figura 15:

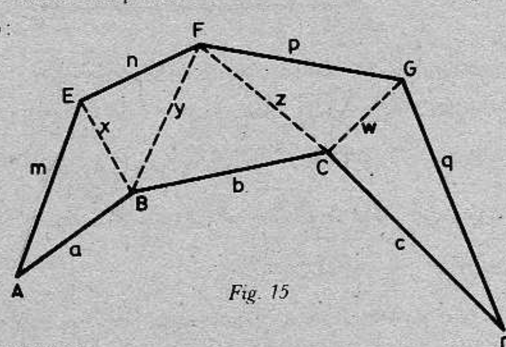


Fig. 15

Entonces:

$$+ \left\{\begin{aligned} a &< m + x \\ b &< y + z \\ c &< w + q \end{aligned}\right.$$

$$a + b + c < m + (x + y) + (z + w) + q$$

pero: $\quad x + y > n \wedge z + w > p$

Por lo tanto, con mayor razón será:

$$m + n + p + q > a + b + c$$

183. TEOREMA LVII

»Demostrar que de dos oblicuas, trazadas desde un punto a una recta, la mayor forma un menor ángulo con la recta que la otra«.

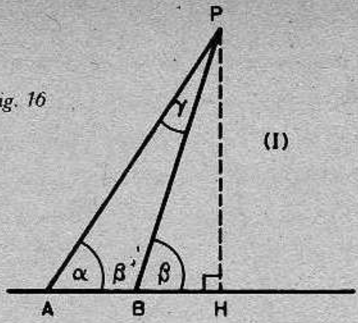


Fig. 16

H.) $\overline{PA} > \overline{PB}$ (Fig. 16)

T.) $\alpha < \beta$

D.) Como $\beta = \alpha + \gamma$ (por Teor. XVII)
se obtiene $\alpha < \beta$ (por Ax. A).

184. TEOREMA LVIII

»De dos oblicuas trazadas desde un punto a una recta la mayor es la que tiene su extremo móvil más distante del pie de la perpendicular del punto a la recta«.

H.) $\overline{AH} > \overline{BH}$ (Fig. 16)

T.) $\overline{PA} > \overline{PB}$

D.) En el △ AHP se tiene α = ∡ agudo por ser un triángulo rectángulo.

Análogamente, en el △ rectáng. BHP el ∡ β = ∡ agudo y por lo tanto, β' = obtuso de donde: $\beta' > \alpha$

Aplicando el Teor. LIII al △ ABP resulta $\Rightarrow \overline{PA} > \overline{PB}$

Otra demostración: Se duplica $\overline{PH}$ de modo que $\overline{P'H} = \overline{PH}$. (Fig. 17).

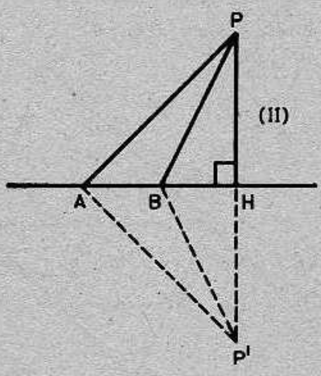


Fig. 17

Entonces, por el Teor. LV, se tiene:

$$\overline{PA} + \overline{AP'} > \overline{PB} + \overline{BP'}$$

luego:

$$2 \cdot \overline{PA} > 2\,\overline{PB}, \text{ o sea: } \overline{PA} > \overline{PB}$$

Corolarios: 1) Dos oblicuas que tienen sus extremos libres a igual distancia del pie de la perpendicular, son iguales.

Si $\overline{MA} = \overline{MB} \Rightarrow \overline{PA} = \overline{PB}$ (Fig. 18)

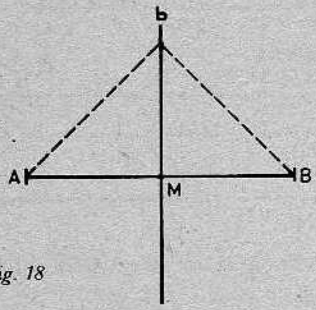


Fig. 18

2) De lo anterior: Todo punto de la simetal de un trazo equidista de los extremos.

185. EJERCICIOS

1) Demostrar que las medianas de un triángulo lo dividen en cuatro triángulos congruentes.
2) Demostrar que al unir sucesivamente los puntos medios de los lados de un trapezoide se obtiene un paralelogramo.
3) Demostrar que el perímetro del cuadrilátero que se obtiene al unir sucesivamente los puntos medios de los lados de un trapezoide equivale a la suma de las diagonales del trapezoide.
4) Demostrar que al unir los puntos medios de los lados de un rectángulo se obtiene un rombo.
5) Demostrar que al cortar dos rectas L_1 y L_2 por varias paralelas de modo que $a = a' = a'' = \ldots$, resulta $b = b' = b'' = \ldots$ (Fig. 1).

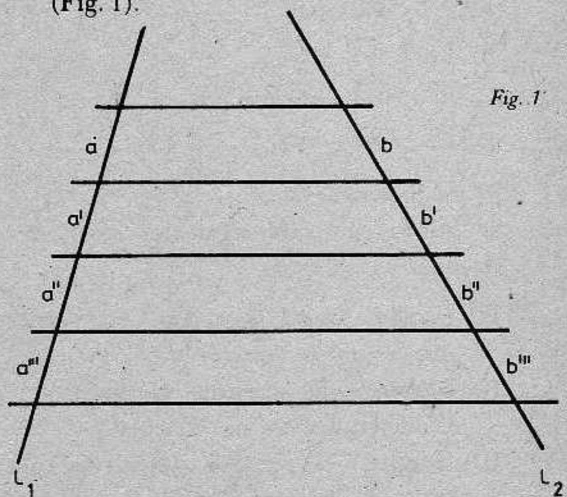
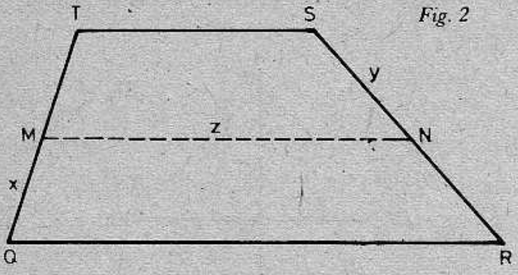


Fig. 1

6) $\overline{MN} = z$ es la mediana del trapecio QRST. Además, $\overline{MQ} = x$, $\overline{NS} = y$ (Fig. 2).

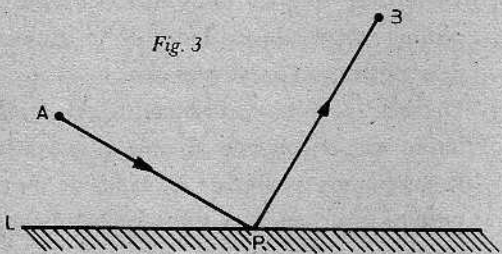
Fig. 2



Demostrar que el perímetro de este trapecio vale: $2 \cdot (x + y + z)$.

7) Un operario vive en un sitio A y trabaja en uno B, ambos situados al mismo lado de un arroyo L. El operario tiene por obligación lavarse en el arroyo antes de llegar a B. Calcular el punto P del arroyo de modo que la distancia APB sea la más corta de todas (Fig. 3).

Fig. 3



186. TESTS

1) Se tienen tres puntos R, S y T de un plano. Entonces, siendo puntos cualesquiera, se cumple sólo una de las alternativas siguientes:

A) $\overline{RS} < \overline{RT} + \overline{ST}$;

B) $\overline{RS} \leq \overline{RT} + \overline{ST}$;

C) $\overline{RS} = \overline{RT} - \overline{ST}$;

D) $\overline{RS} > \overline{RT} - \overline{ST}$;

E) cualquiera de ellas.

2) Se afirma que tres segmentos dados determinan un triángulo:

I) cuando cada segmento es menor que la suma de los otros dos;

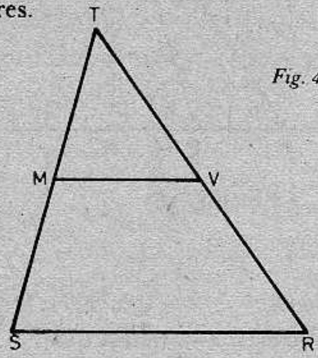
II) cuando cada segmento es mayor que la diferencia entre los otros dos;

III) siempre es posible construir un triángulo dados tres segmentos.

De estas afirmaciones son verdaderas:

A) sólo I; B) sólo II;
C) sólo III; D) sólo I y II;
E) las tres.

Fig. 4



3) En el △ SRT (Fig. 4) se unen los puntos medios V y M de dos lados. Si $\overline{MV} = 4$ cm y $\overline{SM} = 3{,}5$ cm, entonces el perímetro del trapecio SRVM es en cm:

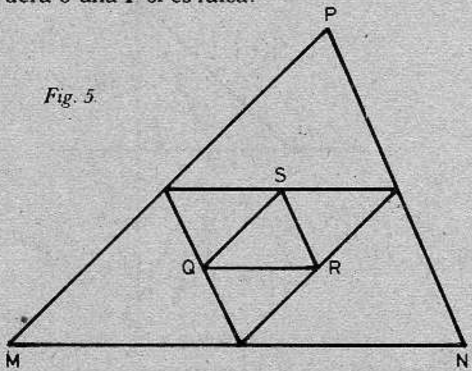
A) 19; B) 19,5;
C) 17,5; D) 23,5;
E) falta mayor información.

4) Los lados de un triángulo miden respectivamente $a = 3$ pulgadas, $b = 12$ pulgadas, $c = 7$ pulgadas. Marque la alternativa correcta:

A) el △ es rectángulo;
B) el △ es acutángulo;
C) el △ es obtusángulo;
D) su semiperímetro es 11 pulgadas;
E) todo lo anterior no es posible.

En los ítemes 5 al 8 coloque dentro del paréntesis una V si la afirmación es verdadedera o una F si es falsa.

Fig. 5



5) (. . .) Los lados del △ MNP miden 18 cm, 12 cm y 10 cm. Se unen los puntos medios de sus lados y se trazan las medianas del triángulo que se formó. El perímetro del △ QRS mide 10 cm (Fig. 5).

6) (. . .) Los lados de un triángulo miden 12 cm, 7 cm y 5 cm. El perímetro de este triángulo mide 24 cm.

7) (. . .) En el trapecio QRST se traza la mediana $\overline{MN} = z$ y $\overline{SU} \mathbin{//} \overline{QT}$. El perímetro del triángulo URS vale (Fig. 6):

$$2x + 2y + \frac{1}{2} \cdot z$$

8) (. . .) En un $\triangle$ SRT la mediana $\overline{VM}$ mide 40 cm, $\overline{VT} = 45$ cm y $\overline{RM} = 35$ cm. Entonces, el perímetro del trapecio SRMV que se forma equivale a los 5/6 del perímetro del triángulo SRT.

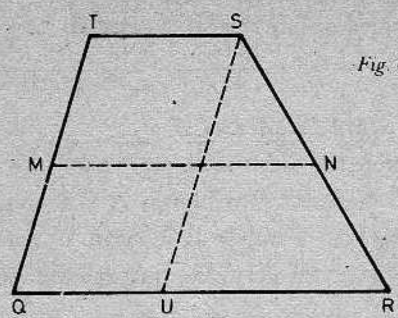


Fig. 6

Resp.: 1) B; 2) D; 3) E; 4) E; 5) V; 6) F; 7) F; 8) V.

LUIS SAAVEDRA

187. SIMETRIA AXIAL

Se refiere a la simetría respecto a un eje o recta.

Definición: Dos puntos A y B son simétricos respecto a un eje L (o recta L) cuando este eje es simetral del trazo que determinan A y B (Fig. 1).

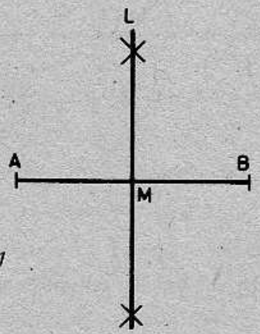


Fig. 1

Como una figura está formada de puntos puede ampliarse la definición anterior diciendo: »Dos figuras son simétricas respecto a un eje cuando este eje es la simetral de los trazos que determinan dos puntos correspondientes de las figuras«.

Entonces, debe cumplirse (Fig. 2):

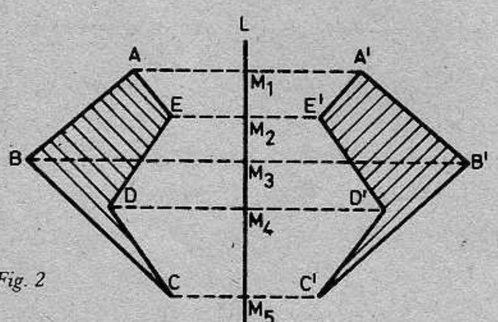


Fig. 2

I) $\overline{M_1A} = \overline{M_1A'}$; $\overline{M_2E} = \overline{M_2E'}$;

$\overline{M_3B} = \overline{M_3B'}$; $\overline{M_4D} = \overline{M_4D'}$;

$\overline{M_5C} = \overline{M_5C'}$,...

II) El eje L debe ser la simetral de $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$ y $\overline{EE'}$.

Cuando se cumplan estas condiciones diremos que los polígonos ABCDE y A'B'C'D'E' son simétricos respecto a la recta L que pasa a ser el eje de simetría.

Por lo tanto, para construir la figura simétrica de otra figura dada se determinan los puntos simétricos de la primera respecto al eje o recta dada. Para esto basta trazar de cada punto de la primera figura la perpendicular al eje y prolongarla en igual magnitud.

Como ejercicio determine la figura simétrica del polígono K respecto a la recta L (Fig. 3).

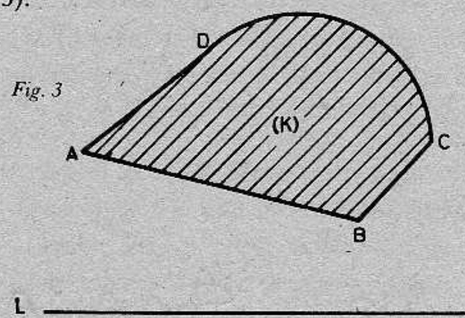


Fig. 3

Pero no sólo los polígonos pueden tener simetría axial sino que también cualquier figura.

Por ejemplo: eche una gota de tinta sobre una hoja de su cuaderno y dóblela presionando de modo que el doblez sea el eje de simetría.

¿Ha estudiado en Optica las imágenes que producen los espejos planos? ¿Qué puede decir de ellas?

Sobre la simetría axial podemos hacer las siguientes consideraciones:

1) Si hacemos rotar en 180° una de las figuras en torno al eje de simetría, se superpone sobre la otra coincidiendo sus elementos homólogos. Por lo tanto: »Las figuras que son simétricas respecto a un eje son, a su vez, congruentes«.

2) »Los puntos pertenecientes al eje de simetría son simétricos de sí mismos«.

3) ¿Cuál es el eje de simetría de un triángulo isósceles?

4) ¿Qué puede decirse de la bisectriz de un ángulo en cuanto a la simetría?

5) ¿Cuál es el eje de simetría de dos rectas que se cortan?

6) ¿Cuál es el eje de simetría de dos rectas paralelas?

7) ¿Cuál es el eje de simetría de un círculo?

8) ¿Cuál es el eje de simetría de un cuadrado?, ¿de un rectángulo?

188. SIMETRIA CENTRAL

Se refiere a la simetría respecto a un punto el cual se llama »centro de simetría«.

Definición: »Dos figuras son céntricamente simétricas respecto a un punto cuando al girar una de ellas en 180° en torno a este punto coincide totalmente con la otra«.

Para construir la figura céntricamente simétrica del polígono ABCDE se elige un punto O que se une con todos los vértices del polígono. Se prolongan estas uniones en igual magnitud de modo que $\overline{OA} = \overline{OA'}$, $\overline{OB} = \overline{OB'}$, etc.

Finalmente, se unen sucesivamente A' con B', B' con C', etc. (Fig. 4).

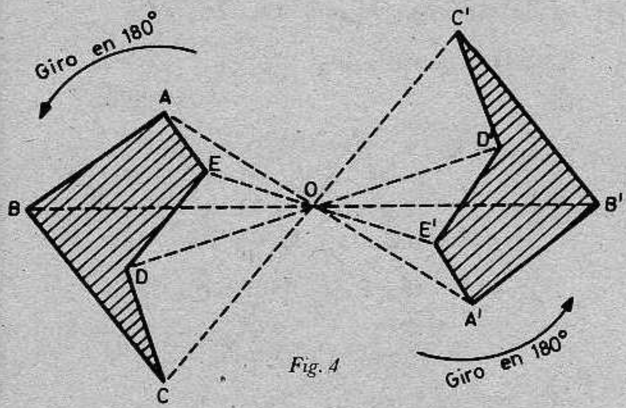


Fig. 4

Se obtiene de este modo el polígono A'B'C'D'E' céntricamente simétrico con el ABCDE, pues al girar A en 180° en torno a O cae sobre A'; análogamente B sobre B', C sobre C', etc.

Los puntos que coinciden después del giro en 180° se llaman »puntos céntricamente simétricos« y las rectas que unen el »centro de simetría« con estos puntos se llaman *rayos de simetría.*

Como $\overline{OA} = \overline{OA'}$, $\overline{OB} = \overline{OB'}$, $\overline{OC} = \overline{OC'}$, etc. $\overline{AE} = \overline{A'E'}$, $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, etc.,
resulta: $\measuredangle AOE = \measuredangle A'OE'$, $\measuredangle EOD = \measuredangle E'OD'$, etc., y, por lo tanto:

a) »los rayos simétricos forman ángulos iguales con los trazos simétricos«;

b) »trazos céntricamente simétricos son iguales y paralelos«;

c) »la circunferencia y el círculo son céntricamente simétricos respecto al centro del círculo«;

d) »un paralelogramo es céntricamente simétrico respecto al punto de intersección de las diagonales«.

189. En la figura 5 construir el triángulo céntricamente simétrico del △ ABO respecto al punto O.

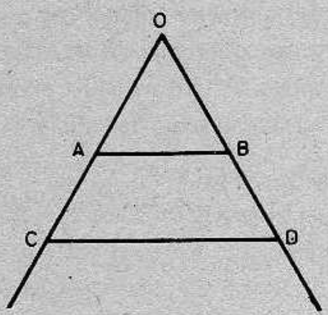


Fig. 5

Observación: Mucho de los teoremas ya demostrados sobre bisectrices, simetrales, triángulo isósceles y paralelogramos pueden ser demostrados por simetría.

19ª UNIDAD

Puntos singulares en el triángulo. Ortocentro, circunscentro, incentro, centro de gravedad y centros de las circunferencias ex inscritas.

---

190. En el triángulo existe una serie de puntos que tienen propiedades muy particulares y es por eso que se conocen como *Puntos singulares del triángulo,* algunos de los cuales ya hemos nombrado más atrás (7ª Unidad) como el circunscentro, el incentro, el ortocentro, el centro de gravedad y los centros de las circunferencias ex inscritas. No son estos los únicos puntos especiales que existen en el triángulo ya que se pueden nombrar otros más, como el centro de la circunferencia de Euler, el punto de Nagel, el punto de Gergonne, etc., que no trataremos en este texto. (Los interesados pueden consultar el Tomo II de Matemática sobre el punto de Nagel y el de Gergonne).

191. TEOREMA LIX

»Las tres simetrales de los lados de un triángulo concurren en un mismo punto que equidista de los tres vértices del triángulo«. (Este punto de intersección es el circunscentro o centro de la circunferencia circunscrita de radio »r«).

H.) $\left.\begin{array}{l} S_a = \text{simetral de } \overline{BC} \\ S_b = \text{simetral de } \overline{AC} \end{array}\right\} S_a \cap S_b = \{O\}$

$\overline{AM} = \overline{MB}$; se une O con M.

T.) $\overline{OM} = S_c$

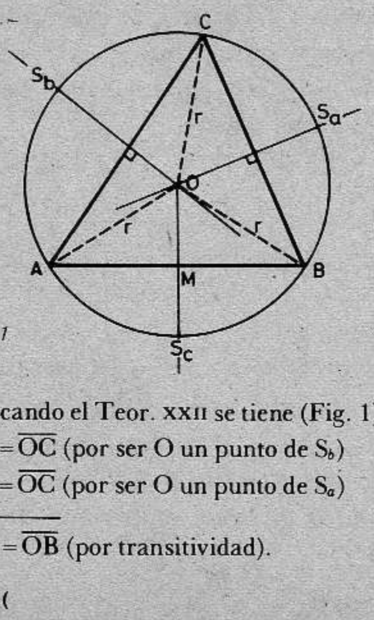


Fig. 1

D.) Aplicando el Teor. XXII se tiene (Fig. 1):

$\overline{OA} = \overline{OC}$ (por ser O un punto de S_b)

$\overline{OB} = \overline{OC}$ (por ser O un punto de S_a)

$\therefore\ \overline{OA} = \overline{OB}$ (por transitividad).

Es decir, el punto O equidista también de los extremos del trazo $\overline{AB}$ y, por lo tanto, $\overline{OM}$ es S_c (por Teor. XXIII).

192. TEOREMA LX

»Las tres bisectrices de los ángulos interiores de un triángulo se cortan en un mismo punto que equidista de los tres lados del triángulo«. (Es, por lo tanto, el incentro o centro de la circunferencia inscrita de radio »ρ«).

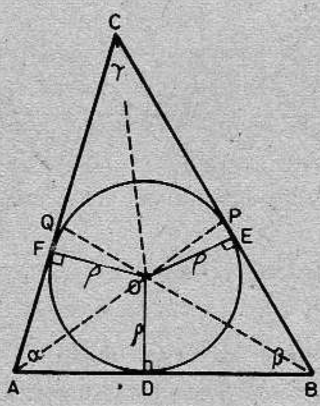
H.) $\overline{AP}$ = bisectriz de $\alpha = b_\alpha$

$\overline{BQ}$ = bisectriz de $\beta = b_\beta$

Se une C con O siendo $\{O\} = b_\alpha \cap b_\beta$

T.) $\overline{CO}$ = bisectriz de $\gamma = b_\gamma$

Fig. 2



D.) Desde O se trazan las perpendiculares a los tres lados del triángulo; al aplicar el Teorema XXIV se obtiene (Fig. 2):

$\overline{OD} = \overline{OF}$ (por ser O un punto de b_α)

$\overline{OD} = \overline{OE}$ (por ser O un punto de b_β)

$\therefore\ \overline{OE} = \overline{OF}$ (por transitividad).

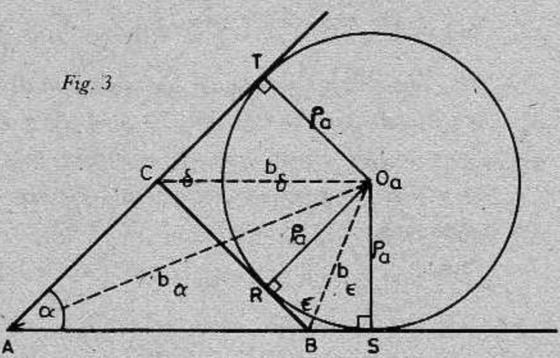
Es decir, el punto O equidista de los lados del ángulo γ y, por lo tanto, CO es la bisectriz de γ (por Teor. XXV).

193. TEOREMA LXI

»Las bisectrices de dos ángulos exteriores de un triángulo y la bisectriz del ángulo interior no adyacente a ellos, se cortan en un mismo punto que equidista de un lado y de las prolongaciones de los otros dos lados del triángulo«.

(El punto de concurrencia es, por lo tanto, el centro de una de las tres circunferencias ex inscritas al triángulo y de radios ρ_a, ρ_b, ρ_c).

Fig. 3



H.) δ y ϵ son ∡ exteriores; α = ángulo no adyacente.
La bisectriz de δ y la de ϵ se cortan en O_a.
Se une A con O_a.

T.) $\overline{AO_a} = b_\alpha$

D.) Aplicando el Teor. XXIV, se obtiene (Fig. 3):

$\overline{O_aS} = \overline{O_aR}$ (por ser O_a un punto de b_ϵ)

$\overline{O_aT} = \overline{O_aR}$ (por ser O_a un punto de b_δ)

∴ $\overline{O_aS} = \overline{O_aT}$ (por transitividad)

Por lo tanto, O_a equidista de los lados del ángulo α y, de acuerdo con el Teor. XXV, pertenece también a su bisectriz.

En la misma forma se demuestra para los otros dos lados obteniéndose la figura 6 del N° 68).

194. TEOREMA LXII

»Las tres alturas de un triángulo se cortan en un mismo punto que es el ortocentro del triángulo«.

H.) Se trazan las tres alturas:

$\overline{CD} = h_c$, $\overline{BF} = h_b$, $\overline{AE} = h_a$

T.) $h_a \cap h_b \cap h_c = \{H\}$

D.) Por cada vértice se traza la paralela al lado opuesto formándose el △ MNP y los # ABNC, # ABCP y # AMBC (Fig. 4).

Entonces, de acuerdo al Teor. XXXIV se tiene:

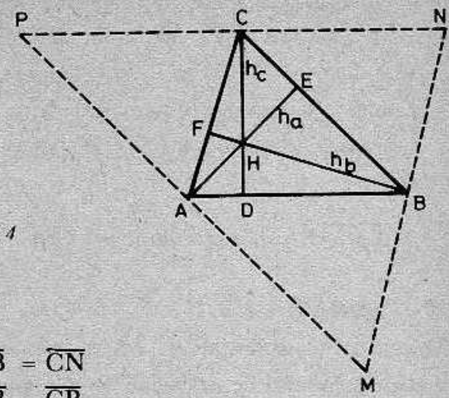


Fig. 4

$\overline{AB} = \overline{CN}$
$\overline{AB} = \overline{CP}$

∴ $\overline{CN} = \overline{CP}$ (por transitividad)

Esta conclusión indica que $h_c = \overline{CD}$ es la simetral del lado $\overline{PN}$.

Análogamente: $\overline{BC} = \overline{AM}$
$\overline{BC} = \overline{AP}$

∴ $\overline{AM} = \overline{AP}$, es decir:

$h_a = \overline{AE}$ es simetral del lado $\overline{MP}$. En la misma forma se demuestra que $h_b = \overline{BF}$ es la simetral del lado $\overline{MN}$.

Pero, según el Teor. LIX, h_a, h_b, h_c concurren a un mismo punto por ser simetrales del triángulo MNP.

195. TEOREMA LXIII

»Las tres transversales de gravedad de un triángulo se cortan en un mismo punto que es el »centro de gravedad« del triángulo (o baricentro)«.

H.) Se trazan $\overline{AE} = t_a$, $\overline{BD} = t_b$ que se cortan en un punto G.
Se une C con G y se prolonga hasta cortar a $\overline{AB}$ en un punto M (Fig. 5).

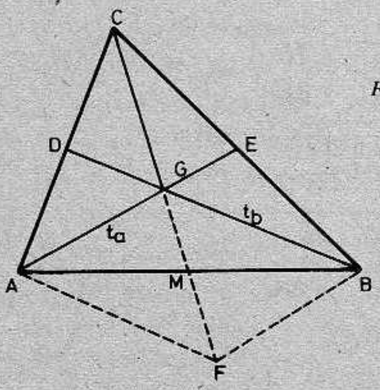


Fig. 5

T.) $\overline{MA} = \overline{MB} \Rightarrow \overline{CM} = t_c$

D.) Se trazan por B // $\overline{AE}$ y por A // $\overline{BD}$ formándose el # AFBG (lados opuestos paralelos). Como las diagonales de un paralogramo se dimidian (Teor. XXXVII), resulta:

$\overline{MA} = \overline{MB}$ y, por consiguiente, $\overline{CM} = t_c$

196. TEOREMA LXIV

»El centro de gravedad de un triángulo divide a cada transversal de gravedad en dos segmentos de modo que el segmento vecino al vértice es el doble del vecino al lado«.

H.) $\overline{AE} = t_a$, $\overline{BD} = t_b$, $\overline{CM} = t_c$;

$t_a \cap t_b \cap t_c = \{G\}$

T.) $\overline{AG} = 2 \cdot \overline{GE}$, $\overline{BG} = 2 \cdot \overline{GD}$, $\overline{CG} = 2 \cdot \overline{GM}$ (Fig. 6).

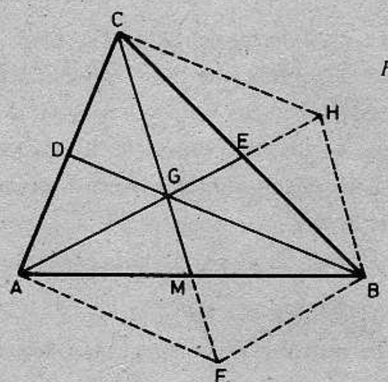


Fig. 6

D.) Se traza $\overline{BF}$ // $\overline{AG}$, $\overline{AF}$ // $\overline{BG}$, $\overline{BH}$ // $\overline{CG}$ y $\overline{CH}$ // $\overline{BG}$

Sabemos que los lados opuestos de un paralelogramo son iguales y que sus diagonales se dimidian, entonces en el # AFBG y en el # BHCG se tiene:

$$\overline{GA} = \overline{FB}$$
$$\overline{GE} = \overline{EH}$$

$$\overline{GA} = \overline{GH}$$
$$\text{pero} \quad \overline{GE} = \overline{EH}$$

$$\therefore \quad \overline{GA} = 2 \cdot \overline{GE}$$

En forma análoga demuestre usted que $\overline{CG} = 2 \cdot \overline{GM}$, $\overline{BG} = 2 \cdot \overline{GD}$

197. COROLARIOS DE ESTE TEOREMA

1) »El centro de gravedad de un triángulo divide a cada transversal de gravedad en dos segmentos que están en la razón de 2 : 1«.
Es decir:

$$\overline{AG} : \overline{GE} = \overline{BG} : \overline{GD} = \overline{CG} : \overline{GM} = 2 : 1$$

2) »El centro de gravedad de un triángulo divide a cada transversal de gravedad en dos segmentos de modo que el segmento mayor es 2/3 de toda la transversal y el segmento menor es 1/3 de ella«.
O sea:

$$\overline{AG} = \frac{2}{3} \cdot t_a \text{ y } \overline{GE} = \frac{1}{3} \cdot t_a$$

$$\overline{BG} = \frac{2}{3} \cdot t_b \text{ y } \overline{GD} = \frac{1}{3} \cdot t_b$$

$$\overline{CG} = \frac{2}{3} \cdot t_c \text{ y } \overline{GM} = \frac{1}{3} \cdot t_c$$

198. EJERCICIOS

1) Se tiene una circunferencia de la cual no se conoce su centro. ¿Cómo puede determinárselo?
2) Dibujar la bisectriz del ángulo formado por dos rectas L' y L'' cuyo vértice queda fuera de esta hoja (su vértice no se conoce o es inaccesible) (Fig. 7):

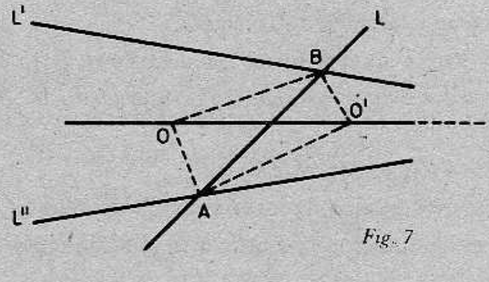


Fig. 7

1ª solución: Se traza una transversal L que corta a L' y a L'' en los puntos A y B (Fig. 7).

Se trazan las bisectrices de los ángulos en A y B.

La recta que une los puntos de intersección de estas bisectrices determina la bisectriz pedida.

2ª solución: (Fig. 8): Se elige conve-

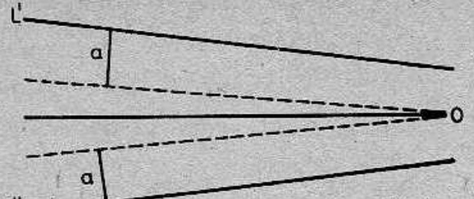


Fig. 8

nientemente un trazo »a« y se trazan las paralelas a L' y L'' a esta distancia de modo que se corten en un punto O. Ahora, basta trazar la bisectriz del ∡ en O.

3ª solución: Se eligen dos distancias »a« y »b«, siendo a ≠ b (Fig. 9).

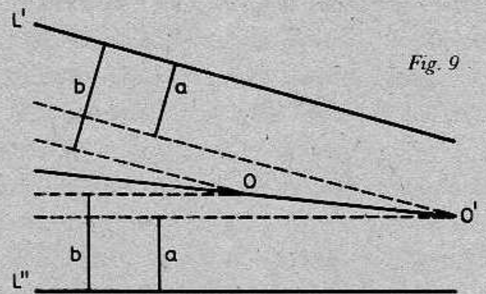


Fig. 9

Se trazan las paralelas a la distancia »a« y a la distancia »b« de L' y L''.
La bisectriz pedida es la recta $\overline{OO'}$.

3) El vértice P del ángulo formado por L' y L'' queda fuera de esta hoja (es inaccesible). Los lados de este ángulo son cortados por una recta L. Trazar desde P (sin prolongar los lados) la perpendicular a la recta L (Fig. 10).

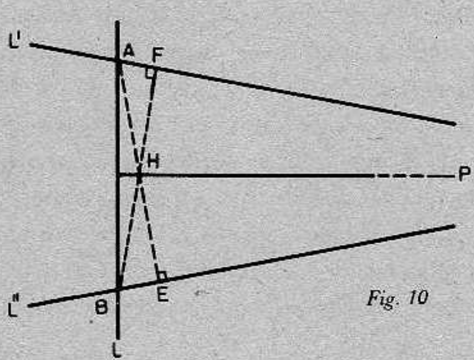


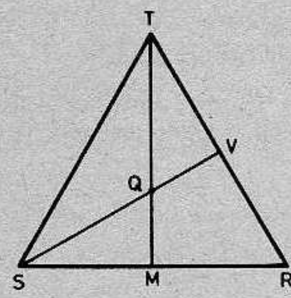
Fig. 10

Solución: se trazan las alturas $h_a = \overline{AE}$ y $h_b = \overline{BF}$ del △ ABP que al cortarse determinan el ortocentro H. Basta trazar desde H la perpendicular a $\overline{AB}$ y su prolongación pasará por P.

199. TESTS

1) En el triángulo equilátero SRT se traza la altura $\overline{SV}$ y la bisectriz $\overline{TM}$. Si $\overline{QM} = 3$ cm, entonces la medida de $\overline{SV}$ es (Fig. 11):

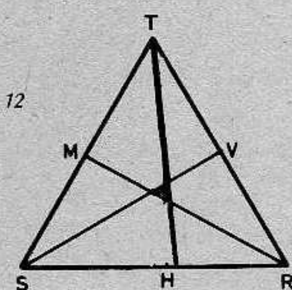
Fig. 11



A) 6 cm; B) 4,5 cm;
C) 9 cm; D) 12 cm;
E) no puede saberse.

2) En el triángulo equilátero SRT se traza la altura $\overline{TH}$, la bisectriz $\overline{SV}$ y la transversal de gravedad $\overline{RM}$. Entonces, al cortarse forman (Fig. 12):

Fig. 12



A) parte de un sector circular;
B) tres puntos distintos de una circunferencia;
C) un triángulo equilátero;
D) una circunferencia de radio cero;
E) un triángulo rectángulo isósceles.

3) Se afirma de un triángulo rectángulo que:
I) no tiene ortocentro;
II) la transversal de gravedad que parte del vértice del ángulo recto es igual a la mitad de la hipotenusa;
III) se le puede circunscribir una semicircunferencia.

A) sólo la I es falsa;
B) sólo la II es verdadera;
C) sólo la III es falsa;
D) las tres son verdaderas;
E) las tres son falsas.

4) Se afirma que:

I) en un △ obtusángulo tanto el incentro como el circunscentro quedan fuera de la región interior del △;

II) tanto el ortocentro como el centro de gravedad de un △ obtusángulo quedan dentro del △;

III) en un △ rectángulo el incentro está en el punto medio de la hipotenusa y el centro de gravedad coincide con el vértice del ángulo recto.

Son verdaderas:

A) sólo I; B) sólo II;

C) sólo III; D) las tres;

E) ninguna.

Resp.: 1 = C; 2 = D; 3 = A; 4 = E.

OPTATIVO

Luis Saavedra

20ª UNIDAD

Construcción de triángulos y cuadriláteros. Relaciones en el triángulo, en el paralelogramo, en el trapecio y en el trapezoide. Datum.

---

200. CONSTRUCCION DE TRIANGULOS Y CUADRILATEROS

En la resolución y construcción de un problema geométrico se distinguen cuatro etapas principales:

1ª. *El análisis.* En este primer paso, tal vez el principal, se supone el problema resuelto dibujándose una *figura de análisis,* en la cual se ubican los datos del problema propuesto.

Por ejemplo, si se pide construir un triángulo dados el lado »c« y los ángulos α y β, se comenzará por dibujar un △ ABC que se supone es el que se pide. En este triángulo se señalan los datos $c = \overline{AB}$, $\alpha = ∡BAC$ y $\beta = ∡ABC$ (Fig. 1).

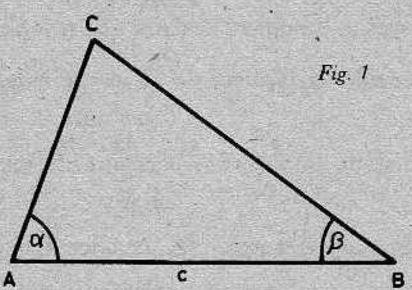


Fig. 1

En seguida se razona —de acuerdo con las condiciones del problema— y se va indicando el camino a seguir para llegar a construir lo que se pide. En esta parte es muy útil el empleo de definiciones, lugares geométricos y teoremas.

En nuestro ejemplo se dirá que al copiar »c« se determinan los vértices A y B. Sólo queda por determinar el vértice C para lo cual basta copiar α en A y β en B. La intersección de los »lados libres« de estos dos ángulos determina C.

En muchos casos la solución no es tan inmediata como la anterior y es necesario dividir la figura de análisis en *partes auxiliares,* la cual o las cuales servirán de base para comenzar la resolución o construcción del problema.

Por ejemplo: construir un triángulo del cual se conoce la altura h_c, el ∡ α y la bisectriz b_γ.

De ahora en adelante los problemas de este tipo de construcciones de triángulos lo indicaremos tan sólo por: △ h_c, α, b (significa: »construir un triángulo dados la altura h_c, el ∡ α y la bisectriz b_γ«).

Nuestro análisis será (Fig. 2):

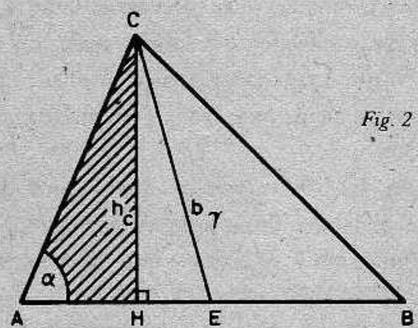


Fig. 2

Sea ABC el triángulo pedido, en el cual $\overline{CH} = h_c$, $\overline{CE} = b_\gamma$ y ∡ CAB $= \alpha$.

Se construye previamente el △ AHC con $\overline{CH} = h_c$, ∡ CAH $= \alpha$ y ∡ CHA $= 90°$. A este triángulo de partida lo llamaremos *triángulo auxiliar,* es decir: △ aux. AHC.

Construido este triángulo sólo queda por determinar el vértice B.

Pero antes es previo determinar el punto E que está a la distancia b_γ de C. Por lo tanto:

$$\text{Ls. Gs. para E:} \begin{cases} 1^{\circ})\ \overline{AH} \longrightarrow H \\ 2^{\circ})\ \text{arco}\ \odot\ (C, b_\gamma) \end{cases}$$

Finalmente, para determinar B se prolonga $\overline{AE} \longrightarrow E$ y se duplica el ∡ ACE $= \frac{1}{2} \cdot \gamma$, pues $\overline{CE}$ es bisectriz.

En muchas construcciones de este tipo el triángulo auxiliar no es único, sino que pueden existir más de uno y, en estos casos, debe elegirse el más cómodo de construir. En nuestro ejemplo, ¿cuál podría ser también el triángulo auxiliar? (Busque otro triángulo distinto a $\triangle$ AHC en el cual se conozcan tres elementos para iniciar la construcción).

2ª. *Construcción.* Consiste en construir la figura pedida con los datos de magnitud dada. Para esto es conveniente hacer la construcción siguiendo el camino indicado por el análisis y, por lo tanto, debe construirse primero el triángulo auxiliar, etc. En esta etapa tiene importancia el saber copiar ángulos, trazar paralelas, perpendiculares y bisectrices.

3ª. *Demostración.* Esta parte tiene por objeto hacer ver que la figura construida cumple con los datos y las condiciones del problema propuesto.

4ª *Discusión.* Muchas veces en los problemas geométricos es necesario indicar el número de soluciones que puede tener un problema, en qué casos la construcción puede realizarse con los elementos dados y en cuáles no existe solución.

En los dos ejemplos que hemos desarrollado podemos decir que el primer problema tiene máximo 1 solución y que no tiene solución si $\alpha + \beta \geqq 180°$.

En el otro ejemplo el problema no tiene solución si $b_\gamma < h_c$, pues en este caso la $\odot$ (C, b_γ) no corta a la base del triángulo.

De estas cuatro etapas en la construcción de triángulos y de construcciones geométricas, en general, es el *análisis* la más importante y después, en importancia, sigue la construcción. Salvo casos en que sea necesario hacerlo, no se considerará la *demostración* y la *discusión*. De esta manera procederemos en los problemas siguientes en los cuales daremos *una indicación* para el análisis y solución. (Al dar una »indicación« no significa que es el único camino a seguir y, muchas, veces usted encontrará otro medio más fácil de resolver el problema que el indicado).

Pero para facilitar el análisis demostraremos, a continuación, algunas relaciones en el triángulo y en los cuadriláteros en general.

201. OBSERVACION

Para construir un triángulo cualquiera se necesitan *tres datos independientes* entre sí de

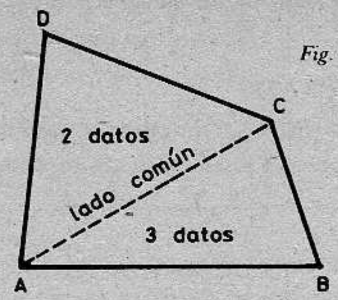


Fig. 3

los cuales uno de ellos, por lo menos, debe ser un *dato lineal* (un lado, una altura, una bisectriz, un radio, etc.).

Al trazar una diagonal de un cuadrilátero, éste queda dividido en dos triángulos y, por lo tanto, para construir un cuadrilátero se necesitan 5 datos, pues al construir uno de los dos triángulos queda determinado un lado del otro (será un lado común).

A medida que a los triángulos o cuadriláteros se le asignan ciertas condiciones o propiedades, el número de datos va disminuyendo en uno por cada condición. De este modo para construir los siguientes triángulos y cuadriláteros se necesita el número de datos que se indican:

Triángulo cualquiera = 3 datos independientes entre sí.

Triángulo isósceles = 2 datos independientes entre sí.

Triángulo rectángulo = 2 datos independientes entre sí.

Triángulo equilátero = 1 dato lineal.

trapezoide cualquiera = 5 datos independientes.

trapecio = 4 datos (el 5° dato es el paralelismo de dos lados)

trapecio isósceles = 3 datos

trapecio rectángulo = 3 datos

paralelogramo (romboide) = 3 datos

rombo = 2 datos

rectángulo = 2 datos

cuadrado = 1 dato lineal

cuadrilátero circunscriptible = 4 datos

cuadrilátero inscriptible = 4 datos

cuadrilátero inscriptible y circunscriptible a la vez = 3 datos.

202. RELACIONES EN UN TRIANGULO

A) *Perímetro y semiperímetro.*

Siendo $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$ se obtiene:

$$2s = \text{perímetro} = a + b + c$$

$$s = \text{semiperímetro} = \frac{a+b+c}{2}$$

Se dibuja la circunferencia inscrita, resultando:

$$\overline{OD} = \overline{OE} = \overline{OF} = \rho$$

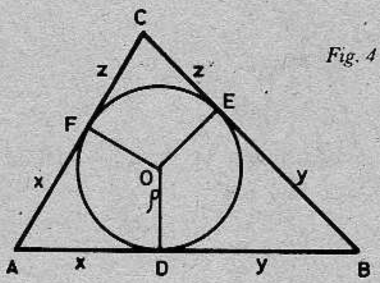


Fig. 4

Haremos las siguientes designaciones:

$$\overline{AD} = \overline{AF} = x,\ \overline{BD} = \overline{BE} = y,\ \overline{CE} = \overline{CF} = z$$

Con estas anotaciones podemos establecer las siguientes relaciones:

$$2s = a + b + c = 2x + 2y + 2z$$

$$\Longrightarrow s = x + y + z = \frac{a+b+c}{2}$$

De aquí resulta:

$$x = s - (y + z), \text{ pero } y + z = a$$

por lo tanto: $\boxed{x = s - a}$

Con análogo desarrollo se obtiene:

$\boxed{z = s - c}$ $\boxed{y = s - b}$

Con esto podemos enunciar el siguiente teorema:

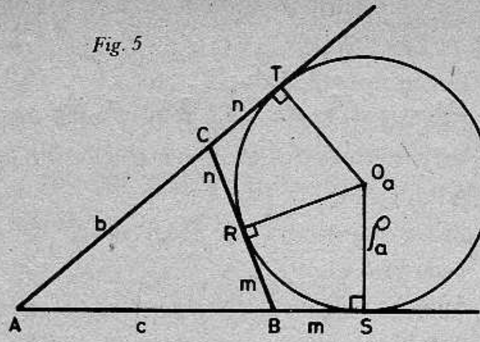
203. TEOREMA LXV

»En un triángulo la distancia entre un vértice y el punto de tangencia de la circunferencia inscrita es igual a la diferencia entre el semiperímetro y el lado opuesto al vértice«.

Con una de las circunferencias ex inscrita se tiene:

$$\overline{AS} = \overline{AT};\ \overline{BS} = \overline{BR} = m;\ \overline{CR} = \overline{CT} = n$$

Fig. 5



Entonces:

$$+\begin{cases} \overline{AS} = c + m \\ \overline{AT} = b + n \end{cases}$$

$$\overline{AS} + \overline{AT} = m + n + b + c$$

$$\overline{AS} + \overline{AT} = a + b + c, \text{ pues } m + n = a$$

luego:

$\overline{AS} + \overline{AT} = 2s \Longrightarrow \boxed{\overline{AS} = s;\ \overline{AT} = s}$ pues $\overline{AS} = \overline{AT}$

De aquí el siguiente teorema:

204. TEOREMA LXVI

»En un triángulo la distancia desde un vértice al punto de tangencia de la circunferencia exinscrita correspondiente al lado opuesto es igual al semiperímetro del triángulo«.

Como corolario de este teorema se obtienen además las siguientes relaciones:

$$c + m = s \Longrightarrow \boxed{m = s - c = z}$$

$$b + n = s \Longrightarrow \boxed{n = s - b = y}$$

Para las otras dos circunferencias ex-inscritas se obtienen relaciones análogas que es fácil escribirlas por analogía sin necesidad de deducirlas. Por ejemplo, en la figura 6 del Nº 68. indicar el valor de los siguientes segmentos:

$\overline{AK} = \ldots;\ \overline{BQ} = \ldots;\ \overline{CL} = \ldots;\ \overline{CJ} = \ldots;\ \overline{CT} = \ldots;$

$\overline{KS} = \ldots;\ \overline{PL} = \ldots;\ \overline{MT} = \ldots;\ \overline{PN} = \ldots;\ \overline{KP} = \ldots$

A continuación desarrollaremos algunos problemas aplicando estas relaciones y dejaremos otros para que usted los resuelva.

205. *EJERCICIOS*

1) Construir un $\triangle$ dados: s, α, h_c

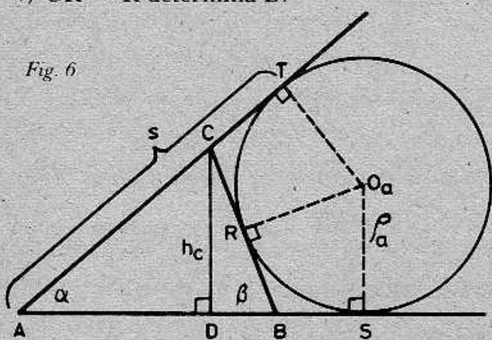
Análisis: 1) Con $s = \overline{AS} = \overline{AT}$ y $\alpha = \measuredangle TAS$ se construye primeramente el deltoide ASO_aT.

2) La paralela a la distancia h_c de $\overline{AS}$ determina C.

3) arco $\odot$ (C, $\overline{CT}$) determina el punto de tangencia R.

4) $\overline{CR} \rightarrow$ R determina B.

Fig. 6



Construcción: Dése usted los datos y haga la construcción siguiendo el camino indicado por el análisis. (Dése datos parecidos a los de la figura de análisis para que no tenga »sorpresas«...).

2) $\triangle$: s, ρ_a, β.

Análisis. 1) Con $s = \overline{AS} = \overline{AT}$ y $\overline{SO_a} = \overline{TO_a} = \rho_a$ se construye el deltoide ASO_aT.

2) Se dibuja la $\odot$ (O_a, ρ_a).

3) Se copia β en cualquier punto de $\overline{AS}$ y desde O_a se traza la perpendicular al lado libre de β con lo que se determina en la intersección con la circunferencia, el punto de tangencia R.

4) La tangente en R determina B y C.

Construcción: Hágala usted dándose previamente los datos.

3) $\triangle$: s − b, ρ_a, a.

Análisis. 1) Con $s - b = \overline{CT} = \overline{CR}$ y $\rho_a = \overline{TO_a} = \overline{RO_a}$ se construye el deltoide $TCRO_a$.

2) arco $\odot$ (C,a) y $\overline{CR} \rightarrow$ R se determina B.

3) arco $\odot$ (B, $\overline{BR}$) determina S al cortar la $\odot$ (O_a, ρ_a)

4) $\overline{TC} \rightarrow$ C y $\overline{SB} \rightarrow$ B determina A.

4) $\triangle$: a + b, ρ_a, ρ_b.

Análisis. (véase figura 6 del # 68).

1) Con $a + b = \overline{KS}$, $\rho_b = KO_b$ y $\rho_a = SO_a$ se construye el trapecio rectángulo KSO_aO_b.

2) Se dibujan las $\odot$ (O_a, ρ_a) y $\odot$ (O_b, ρ_b)

3) Las tangentes comunes interiores a estas circunferencias determinan C.

5) $\triangle$: s − c, ρ, b

6) $\triangle$: s − b, ρ, ρ_c

7) $\triangle$: s − a, s − b, ρ.

8) Demostrar en la figura 6 del # 68, que $\overline{PN} = a - b$

9) $\triangle$: a − b, ρ, ρ_c.

10) $\triangle$: a + b + c, ρ_a, h_c

11) $\triangle$: a + b + c, ρ_a, ρ_b

12) $\triangle$: s − c, γ, b_γ

206. *ADICION Y DIFERENCIA DE TRAZOS* (Fig. 7)

1) La altura $\overline{CH} = h_c$ determina los segmentos $\overline{AH} = q$, $\overline{HB} = p$.

2) La bisectriz $\overline{CE} = b_\gamma$ determina los segmentos $\overline{AE} = v$, $\overline{EB} = u$.

Con arco $\odot$ (C, b) se determinan los puntos A', D y A'' obteniéndose:

3) $\left.\begin{array}{l} \overline{CA'} = \overline{CA} = b, \\ \overline{AH} = \overline{HA'} = q \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\overline{A'B} = p - q}$

4) $\overline{CD} = \overline{CA} = b \Rightarrow \boxed{\overline{BD} = a - b}$

5) $\overline{CA''} = \overline{CA} = b \Rightarrow \boxed{\overline{BA''} = a + b}$

6) El $\triangle$ ADC es isósceles

$$\Rightarrow 2 \cdot \delta + \gamma = 180° \Rightarrow \delta = 90° - \frac{1}{2} \cdot \gamma$$

pero $90° = \frac{1}{2} \cdot \alpha + \frac{1}{2} \cdot \beta + \frac{1}{2} \cdot \gamma$

de donde: $\boxed{\delta = \frac{\alpha + \beta}{2}}$

7) Además, resulta $b_\gamma = \overline{CE}$ = simetral de $\overline{AD}$.

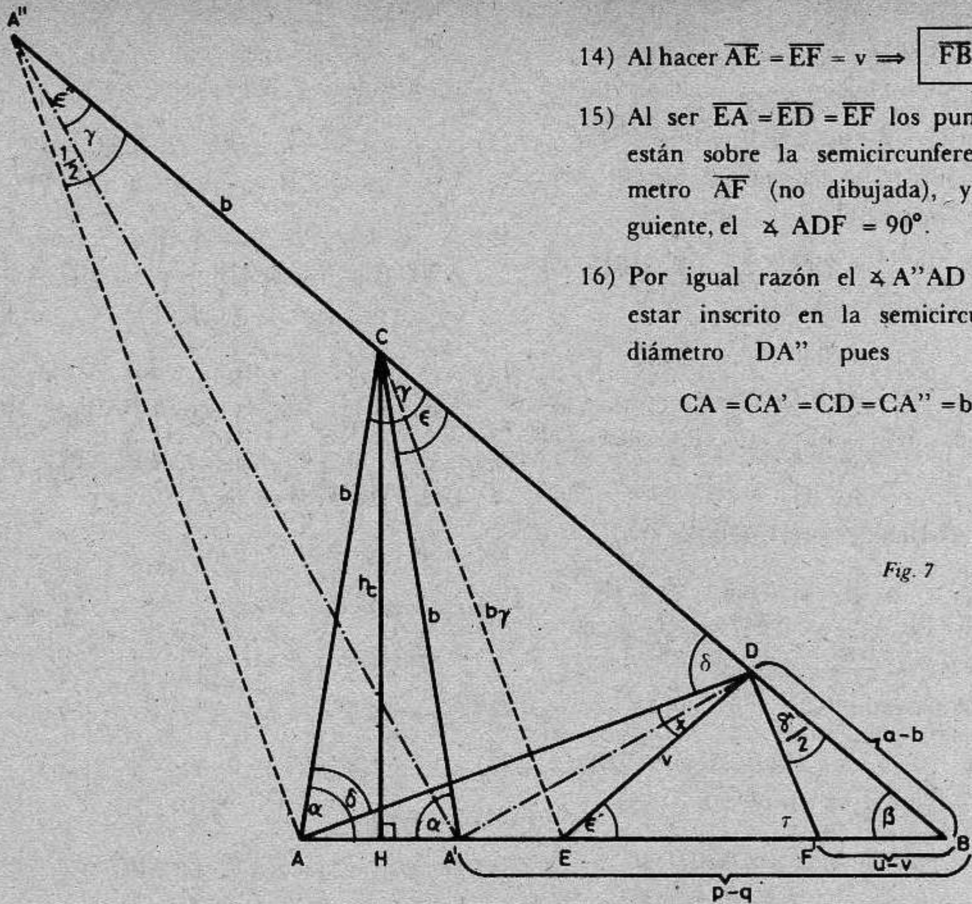


Fig. 7

14) Al hacer $\overline{AE} = \overline{EF} = v \Longrightarrow \boxed{\overline{FB} = u - v}$

15) Al ser $\overline{EA} = \overline{ED} = \overline{EF}$ los puntos A,F y D están sobre la semicircunferencia de diámetro $\overline{AF}$ (no dibujada), y, por consiguiente, el $\measuredangle$ ADF = 90°.

16) Por igual razón el $\measuredangle$ A''AD = 90° por estar inscrito en la semicircunferencia de diámetro DA'' pues

$$CA = CA' = CD = CA'' = b$$

8) Como el $\triangle$ AA'C es isósceles $\Longrightarrow \boxed{\measuredangle CA'A = \alpha}$

9) Pero como el $\measuredangle$ CA'A es ángulo exterior del $\triangle$ A'BC, se obtiene:

$$\alpha = \beta + \epsilon \Longrightarrow \boxed{\epsilon = \alpha - \beta}$$

10) El $\measuredangle$ BCA' es ángulo exterior en el vértice del $\triangle$ A''A'C y, por lo tanto:

$$\boxed{\epsilon' = \frac{\alpha - \beta}{2}}$$

11) El $\triangle AEC \cong \triangle DEC \Longrightarrow \measuredangle EDC = \alpha$
y, por lo tanto:

$$\measuredangle x = \alpha - \delta = \alpha - \frac{\alpha + \beta}{2} \Longrightarrow \boxed{x = \frac{\alpha - \beta}{2}}$$

12) Como el $\triangle$ ADE es isósceles se obtiene

$$\epsilon'' = 2x \Longrightarrow \boxed{\epsilon' = \alpha - \beta}$$

13) Además, en este $\triangle$ isósceles resulta:

$$\boxed{\overline{AE} = \overline{ED} = v}$$

17) En el $\triangle$ isósceles FDE se tiene

$$2 \cdot \tau = 180° - \epsilon = 180° - (\alpha - \beta)$$
$$2 \cdot \tau = \alpha + \beta + \gamma - (\alpha - \beta)$$
$$\Longrightarrow \boxed{\tau = \beta + \frac{1}{2} \cdot \gamma}$$

18) Como τ es ángulo exterior en el $\triangle$FBD

$$\Longrightarrow \tau = \measuredangle FDB + \beta$$

de donde se obtiene:

$$\boxed{\measuredangle FDB = \frac{1}{2} \cdot \gamma} \Longrightarrow \overline{DF} \; // \; b_\gamma \; // \; \overline{AA''}$$

19) Demuestre que $\measuredangle CDA' = \beta + \frac{1}{2} \cdot \gamma$

20) Demuestre que $\measuredangle ADA' = 90° - \alpha$

21) Demuestre que $\measuredangle DA'B = \frac{1}{2} \cdot \gamma$

22) Demuestre que $\measuredangle HCE = \frac{\alpha - \beta}{2}$

23) Demuestre que $\measuredangle DFB = 90° + \frac{\alpha - \beta}{2}$

Con la ayuda de estas relaciones resuelva usted los problemas siguientes de los cuales se dan las indicaciones necesarias para comenzar.

207. EJERCICIOS (Fig. 7)

1) $\triangle$: $\alpha-\beta$, b_γ, b (Indicación: $\triangle$ auxiliar HEC con 90° en H, CE $=b_\gamma$, $\measuredangle$HCE $=\frac{\alpha-\beta}{2}$. En seguida, la $\odot$ (C, b) determina A; $\measuredangle$ACE $=$ $\measuredangle$ECB determina B).

2) $\triangle$: $\alpha-\beta$, b_γ, v (Ind.: $\triangle$ aux. HEC; $\overline{EH}\longrightarrow$H y $\odot$ (E, v) det. A)

3) $\triangle$: u, v, $\alpha-\beta$ (Ind.: $\triangle$ aux. EBD con EB $=$u, ED $=$v, $\measuredangle$ DEB $=\alpha-\beta$; En seguida, $\overline{BE}\longrightarrow$ E y $\odot$ (E,v) determina A).

4) $\triangle$: u,v, a $-$b (Ind.: $\triangle$ aux. EBD, Fig.7)

5) $\triangle$ u $-$v, a $-$b, $\alpha-\beta$ (Ind.: $\triangle$ aux. FBD con $\overline{FB}=$u $-$v, $\overline{BD}=$a $-$b y el $\triangle$ DFB $=90°+\frac{\alpha-\beta}{2}$. Después: $\odot$ (E, $\overline{ED}$) determina A).

6) $\triangle$: u $-$v, a $-$b, γ (Ind.: $\triangle$ aux. FBD con $\overline{FB}=$u $-$v, $\overline{BD}=$a $-$b, $\measuredangle$FDB $=\frac{1}{2}\gamma$).

7) $\triangle$: a $-$b, u $-$v, β (Ind.: $\triangle$ aux. FBD)

8) $\triangle$: a, b, $\alpha-\beta$ (Ind.: $\triangle$ aux. BDA con arco capaz de $\frac{\alpha-\beta}{2}$ con cuerda a $-$b $=\overline{BD}$; $\odot$ (C, b) determina A)

9) $\triangle$: a, b, b_γ (Ind.: en el $\triangle$ BDE se conoce $\overline{BD}=$u $-$v y la razón BE: ED $=$u:v, pues u:v $=$a:b. Luego: L.G. para E son:
1°) $\odot$ de Apolonio (se divide $\overline{BD}$ en a:b)
2°) $\odot$ (C, b γ).

10) $\triangle$: b, v, $\alpha-\beta$ (Ind.: $\triangle$ aux. AFD con $\overline{AF}=$2v, $\measuredangle$ DAF $=\frac{\alpha-\beta}{2}$ y $\measuredangle$ADF $=90°$. Los L.G. para C: 1) simetral de $\overline{AD}$; 2)$\odot$ (A, b)).

11) $\triangle$: b_γ, $\alpha-\beta$, u (Ind.: $\triangle$ aux. HEC con $\overline{CE}=b_\gamma$, $\measuredangle$CHE $=90°$ y $\measuredangle$HCE $=\frac{\alpha-\beta}{2}$. Después: $\overline{HE}\longrightarrow$ E y la $\odot$ (E, u) determinan B.).

12) $\triangle$: a$+$b, p$-$q, β (Ind: $\triangle$aux. A'BA''; simetral de $\overline{A'A''}$ det. C).

13) $\triangle$: p $-$q, b, α (Ind.: $\triangle$ aux. A'BC con $\overline{A'C}=$b, $\measuredangle$BA'C $=180°-\alpha$, y $\overline{A'B}=$ p $-$q).

14) $\triangle$: $\alpha-\beta$, p $-$q, b (Ind.: $\triangle$aux. A'BC con $\overline{A'B}=$p $-$q, $\overline{A'C}=$b y $\measuredangle$A'CB $=\alpha-\beta$).

15) $\triangle$: $\alpha-\beta$, p $-$ q, a (Ind.: $\triangle$ A'BC con $\overline{A'B}=$ p $-$q, $\overline{CB}=$a y $\measuredangle$ A'CB $=\alpha-\beta$)

16) $\triangle$: a $-$b, $\alpha-\beta$, p $-$q (Ind.: $\triangle$aux. A'BD (Fig. 7) con A'B $=$ p $-$q, $\overline{BD}=$ a $-$b y$\measuredangle$A'DB $=90°+\frac{\alpha-\beta}{2}$)

17) $\triangle$: a $-$b, p $-$q, γ (Ind.: $\triangle$ aux. A'BD con $\overline{A'B}=$p $-$q, $\overline{BD}=$a $-$b y$\measuredangle$DA'B $=\frac{1}{2}\cdot\gamma$).

18) $\triangle$: a $-$b, u $-$v, γ (Ind.: $\triangle$ aux. FBD; en D $\perp$ $\overline{FD}$ y $\overline{BF}\longrightarrow$F det. A)

19) $\triangle$: a, b, $\alpha-\beta$

20) $\triangle$: $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$, c

21) $\triangle$: p $-$q, $\alpha-\beta$, a $+$ b

22) $\triangle$: a $+$b, γ, c

23) $\triangle$: a $+$b, a $-$b, $\alpha-\beta$

24) $\triangle$: a $+$b, $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$

25) Demostrar que en el $\triangle$ ABC (Fig. 7) se verifica que. $\frac{a+b}{c}=\frac{p-q}{a-b}$
(Ind.: $\triangle$ A'BA'' $\sim$ $\triangle$ ABD por 1er Teor. de semejanza).

26) Demostrar que el $\triangle$ ABC (Fig. 7) se verifica que (a $-$b) es media proporcional geométrica entre (p $-$q) y (u $-$v).
(Ind.: $\triangle$ FBD $\sim$ $\triangle$ A'BD por 1er Teor. de semejanza).

208. C) ADICION Y DIFERENCIA DE ALTURAS (Fig. 8)

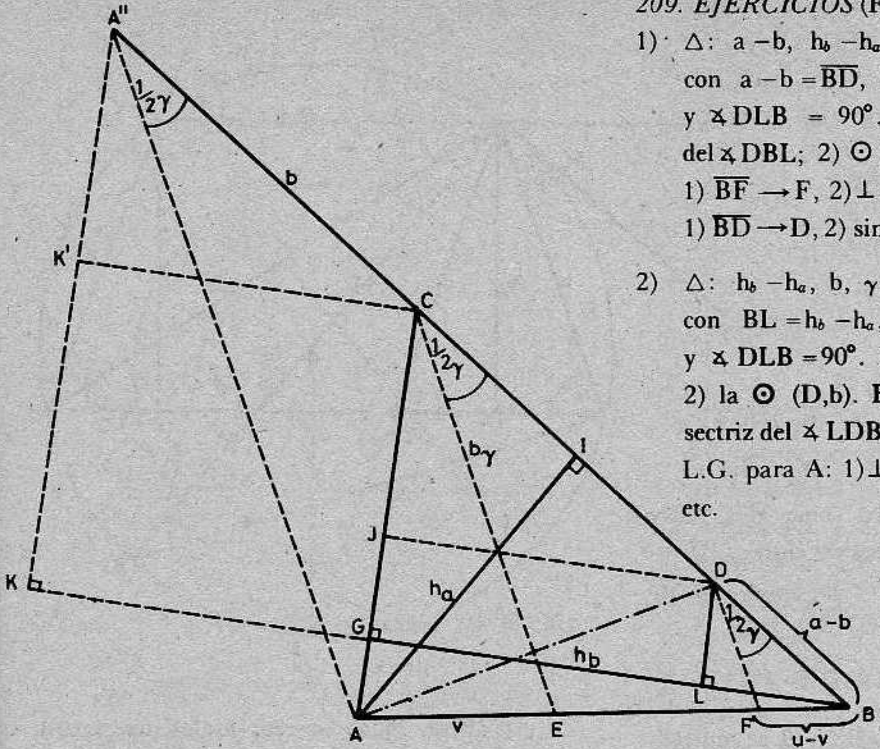
Sea $\overline{AI}=h_a$, $\overline{BG}=h_b$, $\overline{CE}=b_\gamma$, $\overline{AE}=$v, $\overline{EB}=$ u

1) Se hace $\overline{CD}=\overline{CA}=$b $\Longrightarrow$ $\boxed{\overline{BD}=a-b}$

2) Se traza $\overline{DJ}\perp\overline{AC}$ y $\overline{DL}\perp\overline{BG}$, resulta:

$$\triangle\ AIC\cong\triangle\ CJD,\ \text{pues}\ \left\{\begin{array}{l}\overline{CA}=\overline{CD}=b\\ \measuredangle I=\measuredangle J=90°\\ \gamma=\text{común}\end{array}\right.$$

de donde: $\overline{DJ}=\overline{AI}=h_a\Longrightarrow$ $\boxed{\overline{BL}=h_b-h_a}$



3) Se hace CA'' = b $\Rightarrow$ $\boxed{\overline{BA}'' = a + b}$

4) El $\triangle$ ACA'' es isósceles y, por lo tanto:

$$\boxed{\measuredangle AA''C = \frac{1}{2} \cdot \gamma}$$

5) Se traza por A'' // $\overline{CA}$ y se prolonga $\overline{BG} \rightarrow$ G determinándose K; además, se traza $\overline{CK'} \perp \overline{KA''}$

6) Resulta: $\triangle$ A''K'C $\cong$ $\triangle$ CAI $\Rightarrow$ $\overline{CK'} = h_a$

y $\boxed{\overline{BK} = h_a + h_b}$

además: $\measuredangle$ CA''K = $\gamma \Rightarrow \overline{A''A}$ = bisectriz del $\measuredangle$ CA''K

7) Se hace $\overline{EF} = \overline{EA} = v \Rightarrow \boxed{\overline{FB} = u - v}$

y $\boxed{\measuredangle FDB = \frac{1}{2} \cdot \gamma}$

Por lo tanto: $\overline{AA''}$ // b_γ // $\overline{DF}$

8) Como $\overline{CA} = \overline{CD} = \overline{CA''} \Rightarrow \measuredangle DAA'' = 90°$

Con estas relaciones es fácil resolver las siguientes construcciones de triángulos. Daremos sólo indicaciones para el análisis y la construcción queda a su cargo siempre que la considere necesaria hacerla.

209. EJERCICIOS (Fig. 8)

1) $\triangle$: $a - b$, $h_b - h_a$, $u - v$ (Ind.: $\triangle$aux. LBD con $a - b = \overline{BD}$, $h_b - h_a = \overline{BL}$, y $\measuredangle$DLB = 90°. L.G. para F: 1) bisectriz del $\measuredangle$DBL; 2) $\odot$ (B, u − v); L.G. para A: 1) $\overline{BF} \rightarrow$ F, 2) $\perp$ en D a $\overline{DF}$; L.G. para C: 1) $\overline{BD} \rightarrow$ D, 2) simetral de $\overline{AD}$.

2) $\triangle$: $h_b - h_a$, b, γ (Ind.: $\triangle$aux. LBD con BL = $h_b - h_a$, $\measuredangle$ LDB = γ y $\measuredangle$ DLB = 90°. L.G. para C: 1) $\overline{BD} \rightarrow$ D; 2) la $\odot$ (D,b). En seguida, se traza la bisectriz del $\measuredangle$ LDB.
L.G. para A: 1) $\perp$ en D a DB; 2) $\odot$ (C, b); etc.

3) $\triangle$: $h_a + h_b$, $a + b$, c (Ind.: $\triangle$aux. KBA'' con $a + b = \overline{BA}''$, $h_a + h_b = \overline{BK}$ y $\measuredangle$ BKA'' = 90°. L.G. para A: 1) bisectriz del $\pm$ KA''B; 2) $\odot$ (B, c).

4) $\triangle$: $h_a + h_b$, c, γ (Ind.: análogo al problema anterior).

5) $\triangle$: $h_a + h_b$, γ, β (Ind.: $\triangle$aux. KBA'' con $h_a + h_b = \overline{BK}$, $\measuredangle$ BA''K = γ y $\measuredangle$ BKA'' = 90°. L.G. para A: 1) bisectriz del $\measuredangle$KA''B; 2) lado libre de β copiado en B.

6) $\triangle$: $h_b + h_b$, $h_b - h_a$, $a - b$ (Ind.: $\triangle$ aux. LDB con $a - b = \overline{BD}$, $h_b - h_a = \overline{BL}$ y $\measuredangle$ DLB = 90°. En seguida, se copia $h_a + h_b = \overline{BK}$ y se completa el $\triangle$ KBA'').
L.G. para A: 1) la semi $\odot$ (DA''); 2) bisectriz del $\measuredangle$ AA''B

210. D) *RELACIONES EN UN TRIANGULO INSCRITO EN UNA CIRCUNFERENCIA* (Fig. 9)

1) En el triángulo inscrito ABC en la circunferencia de radio »r« se traza por C // $\overline{AB}$ y se completa el cuadrilátero inscrito ABNC; por lo tanto, en este trapecio, se

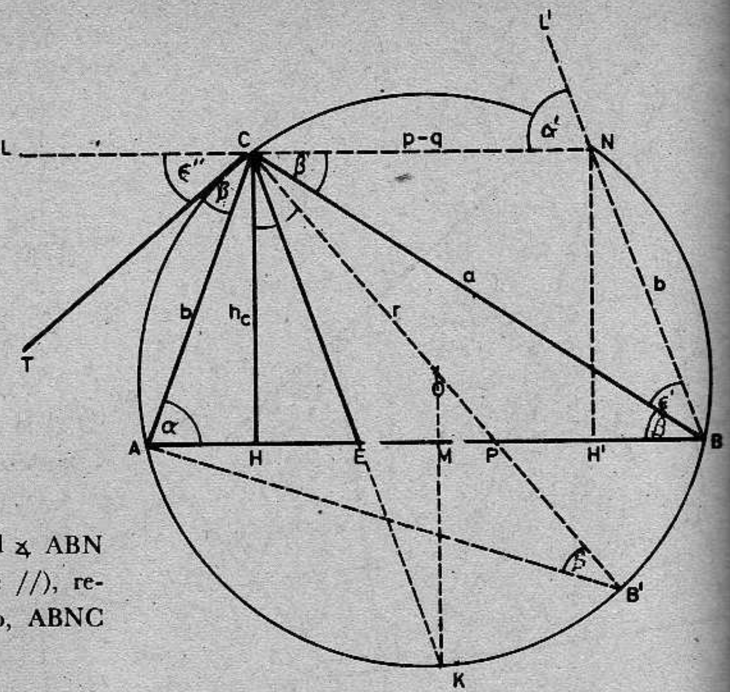


Fig. 9

obtiene: $\alpha' = \alpha$, pero como el ∡ ABN $= \alpha'$ (son correspondientes entre //), resulta ∡ ABN $= \alpha$. Por lo tanto, ABNC es un trapecio isósceles ⟹ NB = b

2) Al ser $\overline{AB} \,//\, \overline{CN}$ resulta ∡ NCB $= \beta$

3) Como ∡ ABN $= \alpha$ y ∡ ABC $= \beta$ se obtiene:

$$\boxed{\epsilon' = \alpha - \beta = \epsilon}$$

4) Al trazar desde N la perpendicular a $\overline{AB}$ se obtiene: $\overline{BH'}$ = q y, por consiguiente,

$$\boxed{\overline{HH'} = p - q = \overline{CN}}$$

5) Al trazar el diámetro $\overline{CB'}$ y la tangente $\overline{CT}$ se obtiene ∡ CB'A $= \beta$ (son ángulos inscritos en el mismo arco $\widehat{AC}$) y ∡ TCA $= \beta' = \beta$ (β' es ángulo semiinscrito en el mismo arco $\widehat{AC}$ que β).

6) ∡ LCA = ∡ CAB $= \alpha$ (ángulos alternos entre //); por lo tanto:
$\epsilon'' =$ ∡ LCT $= \alpha - \beta = \epsilon$

7) ∡ HCO = ∡ LCT (ángulos de lados ⊥)
$\Longrightarrow \epsilon = \alpha - \beta$

8) ∡ HCE = ∡ ECO $= \dfrac{\alpha - \beta}{2} \Longrightarrow \overline{CE}$ = bisectriz del ∡ HCO

9) arco $\widehat{KA}$ = arco $\widehat{KB}$

10) Demuestre que ∡ ACH = ∡ OCB
Con este análisis general es posible resolver los siguientes problemas de apariencia difícil. Sólo daremos indicaciones para el análisis. La construcción es conveniente que usted la haga en cada caso.

211. EJERCICIOS (Fig. 9)

1) △: h_c, $\alpha - \beta$, r (Ind.: △ aux. CHP con $\overline{CH} = h_c$, ∡ CHP = 90° y ∡ HCP $= \alpha - \beta$; en seguida, la ⊙ (C, r) determina el centro O; la ⊙ (O, r) determina A y B en las prolongaciones de $\overline{HP}$.).

2) △: p − q, $\alpha - \beta$, b (Ind.: △ aux. NCB con $\overline{CN}$ = p − q, $\overline{BN}$ = b, ∡ CBN $= \alpha - \beta$.
En seguida:
L.G. para A: 1) por B // $\overline{CN}$; 2) ⊙ (C,b).

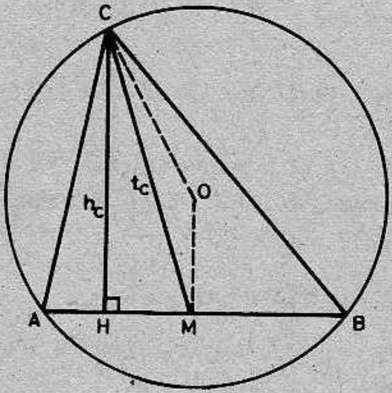
3) △: p − q, α, b (Ind.: △ aux. AHC con ∡ CAH $= \alpha$, ∡ CHA = 90°, $\overline{AC}$ = b; después, se prolonga $\overline{AH}$ ⟶ H en p − q = $\overline{HH'}$.
L.G. para el centro O:
1) simetral de $\overline{HH'}$ = p − q; 2) simetral de $\overline{AC}$ = b).

4) △: p − q, h_c α, (Ind.: análogo al anterior).

5) △: p − q, r, h_c (Ind.: △ aux. CON con $\overline{CN}$ = p − q, $\overline{CO} = \overline{NO}$ = r. En seguida la ⊥ en C a $\overline{CN}$ y se copia $h_c = \overline{CH}$. Se dibuja la ⊙ (O, r) que cortará a la ⊥ en H a $\overline{CH}$ en A y B).

6) $\triangle$: $p-q$, α, r. (Ind.: $\triangle$ aux. CON con $p-q=\overline{CN}$ y $\overline{OC}=\overline{ON}=r$. La $\odot$ (O, r) y se copia α en C y en N de modo que $\sphericalangle LCA=\alpha$ y $\sphericalangle CNL'=\alpha$).

Fig. 10



7) $\triangle$: $p-q$, t_c, r. (Ind.: $\triangle$ aux. HMC (Fig. 10):
con $\overline{HM}=\frac{p-q}{2}$, $\overline{CM}=t_c$, $\sphericalangle CHM=90°$.
L.G. para el centro O: 1) la perpendicular en M a $\overline{HM}$; 2) el arco $\odot$ (C, r); etc.).

8) $\triangle$: $p-q$, h_c, r

9) $\triangle$: h_c, $p-q$, $\alpha-\beta$

10) $\triangle$: h_c, t_c, b_γ

212. E) *RELACIONES EN UN TRAPEZOIDE* (Fig. 11)

1) Lados: $\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$, $\overline{CD}=c$, $\overline{AD}=d$.

2) Diagonales: $e=\overline{AC}$, $f=\overline{BD}$;

3) Angulos: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

4) Angulo formado por las diagonales $=\epsilon$.

5) Al trazar por C //f, por B // c y d, se forma el # AEFC que tiene por lados a las diagonales del trapezoide ABCD. Además, se forma al # BFCD y el # AEBD. Resulta: $\overline{BF}=c$, $\overline{BE}=d$, $\overline{EF}=e$, $\overline{AE}=f$, $\overline{CF}=f$, $\sphericalangle ACF=\epsilon$

6) En el vértice B se reúnen los cuatro lados y los cuatro ángulos. ¿Qué teorema queda demostrado en este vértice?

213. EJERCICIOS (Fig. 11)

Construir los siguientes cuadriláteros:

1) trapezoide: a, f, α, β, c;
2) trapezoide: a, b, c, d, e;
3) trapezoide: b, d, e, f, ϵ;
4) trapezoide: e, f, ϵ, α, β;
5) trapezoide: a, c, e, f, ϵ;
6) trapezoide: a, b, c, e, f;
7) trapezoide: c, e, f, γ, ϵ;
8) trapezoide: a, b, e, f, ϵ;
9) cuadrilátero inscriptible: a, b, c, r;
10) cuadrilátero inscriptible: a, b, e, f;
11) cuadrilátero inscriptible: e, f, ϵ, r;
12) cuadrilátero inscriptible: d, e, ϵ, f;
13) cuadrilátero inscriptible: a, e, ϵ, r;
14) cuadrilátero inscriptible: a, b, f, β;
15) cuadrilátero inscriptible: a, e, f, r;
16) cuadrilátero circunscriptible: a, b, α, ρ;
17) cuadrilátero circunscriptible: e, α, β, ρ;
18) cuadrilátero circunscriptible: a, β, γ, ρ;

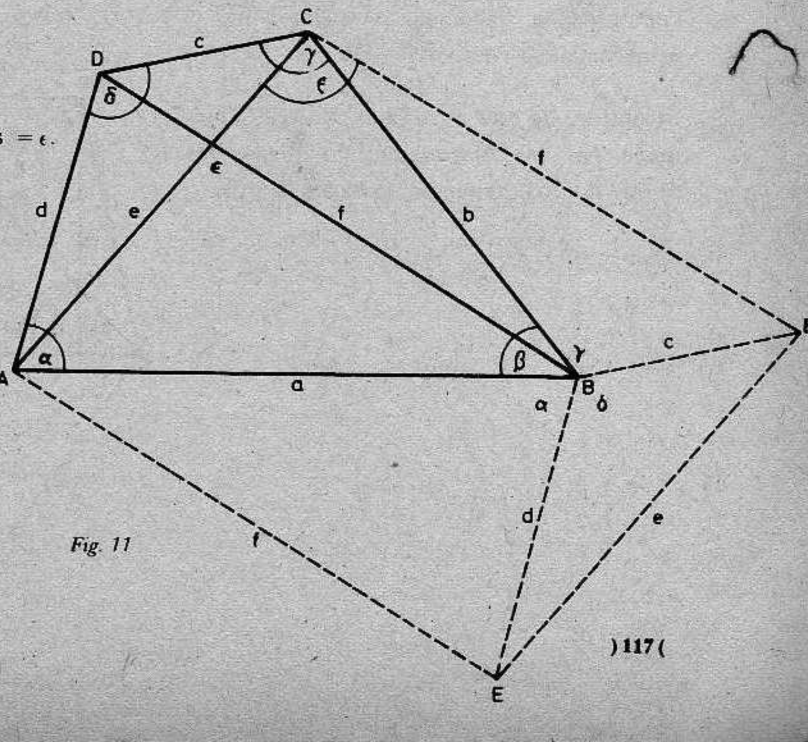


Fig. 11

19) cuadrilátero circunscriptible: a, b, c, e;
20) cuadrilátero circunscriptible: a, α, β, γ;
21) cuadrilátero circunscriptible: a, b, c, α;
22) cuadrilátero inscriptible y circunscriptible a la vez: α, β, ρ;
23) cuadrilátero inscriptible y circunscriptible a la vez: a, α, β;
24) cuadrilátero inscriptible y circunscriptible a la vez: a, γ, ρ.

214. RELACIONES EN UN PARALELOGRAMO (Fig. 12)

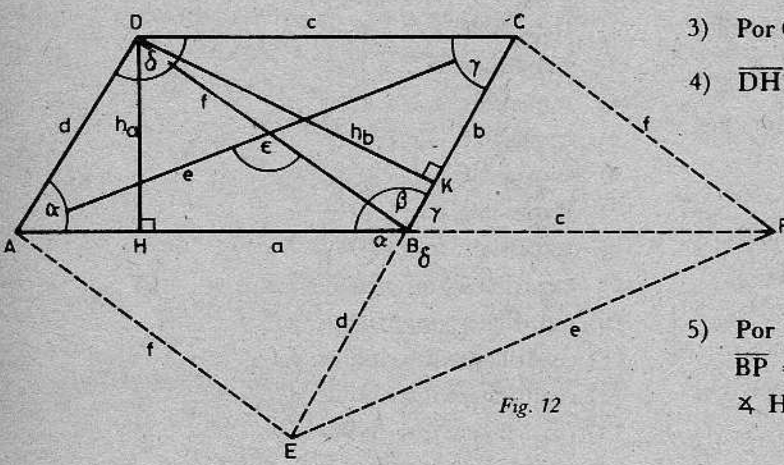


Fig. 12

1) $a = c$, $b = d$; $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$,

$\alpha + \delta = \beta + \gamma = 180°$

$\overline{DH} = h_a$; $\overline{DK} = h_b$

2) Por A y C se trazan las paralelas a $\overline{BD}$ y se prolonga $\overline{CB} \longrightarrow B$ y $\overline{AB} \longrightarrow B$.

3) Se obtiene de esta manera el # AEFC formado por las diagonales; las diagonales de este nuevo paralelogramo miden 2a y 2b.

215. EJERCICIOS (Fig. 12)

1) # : a, e, ϵ;
2) # : e, f, ϵ;
3) # : a, b, f;
4) # : a, h_a, ϵ;
5) # : e, f, α;
6) # : e, ϵ, β;
7) # : b, h_b, ϵ;
8) # : a, e, f;
9) a, b, h_a;
10) # : e, f, h_b;
11) # $\sphericalangle$(a, e), $\sphericalangle$(b, e), h_a;
12) rombo: a, e;
13) rombo: α, h_a;
14) rombo: α, h_b;
15) rombo: e, f.

216. RELACIONES EN UN TRAPECIO (Fig. 13)

1) Por C y A la paralela a $\overline{BD}$; $\overline{AB} \longrightarrow B$ determina # AEFC de lados »e« y »f« y $\sphericalangle ACF = \epsilon$

2) $\overline{BF} = c$, $\overline{BE} = d$, $\overline{AF} = a + c$.

3) Por C // $\overline{AD} \Rightarrow \overline{AL} = c \Rightarrow \overline{LB} = a - c$

4) $\overline{DH} = h = \overline{CH'}$; $\overline{CL} = d$; $\sphericalangle CLB = \sphericalangle LBE = \alpha$

5) Por B // $\overline{AC}$ y por A // $\overline{BC} \Rightarrow \overline{AP} = b$, $\overline{BP} = e$, $\overline{PE} = c$, $\overline{CQ} = 2 \cdot h$;
$\sphericalangle HBQ = \beta$

217. EJERCICIOS (Fig. 13)

1) Trapecios: a, b, e, α;
2) a, b, e, f;
3) a, b, h, α;
4) a, b, c, d

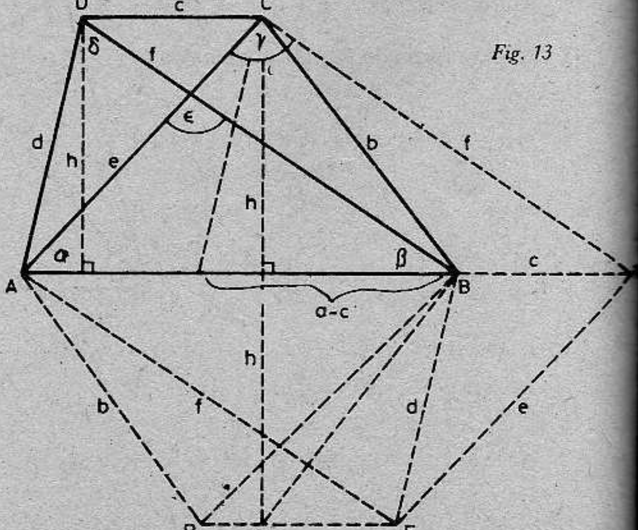


Fig. 13

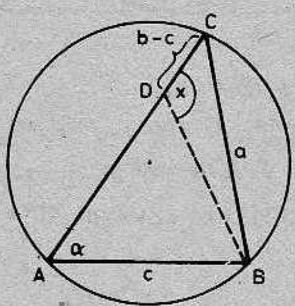
5) a, b, α, ∡(c, f);
6) a + c, e, f, γ;
7) a + c, ϵ, h, δ;
8) a − c, b, e, β;
9) a − c, b, f, β;
10) b, h, e, ϵ;
11) e, h, a − c, α;
12) a + c, h, f, δ;
13) a, b, d, $\alpha + \beta$;
14) a − c, h, f, β;
15) trapecio isósceles: α, h, f;
16) trapecio isósceles: a, α, ϵ;
17) trapecio isósceles: a, h, ϵ;
18) trapecio trisolátero: a, b, α;
19) trapecio trisolátero: a, b, ϵ;
20) trapecio rectángulo: a, b, β.

218. EJERCICIOS GENERALES

(Construcción de triángulos y cuadriláteros).

1) $\triangle$: r, γ, t_c;

2) $\triangle$: r, α, a − b (Ind.: r y α determinan »a«);

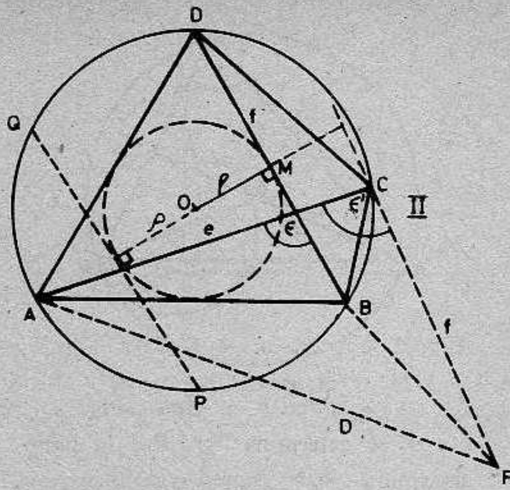


I

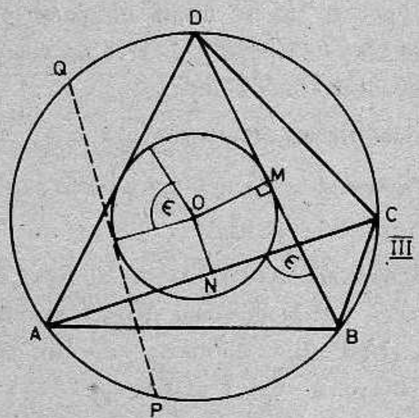
3) $\triangle$: r, α, b − c
Análisis: (Fig. 1). Con r y α se determina a = BC.
El ∡x = 90° + $\frac{\alpha}{2}$; por lo tanto, el $\triangle$ aux. BCD se construye con $\overline{BC}$ = a, $\overline{CD}$ = b − c y ∡x, etc.

4) $\triangle$: s, ρ_a, b

5) Construir un cuadrilátero inscriptible dados: r, f, e, ϵ.
(Ind.: (Fig. II). 1) ⊙ (O, r); 2) $\triangle$ aux. AFC con $\overline{AC}$ = e, $\overline{CF}$ = f, ∡ ACF = ϵ; 3) se copia f = $\overline{PQ}$ como cuerda en cualquier parte y se determina ρ. 4) Desde 0 la perpendicular a $\overline{FC}$ determina M; 5) en M la tangente determina B y D).

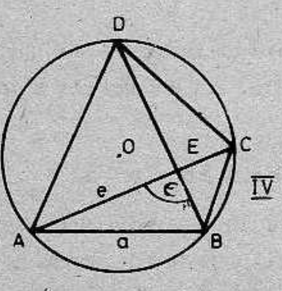


Otra solución (Fig. III): 1) ⊙ (O, r); 2) $\overline{AC}$ = e; 3) en cualquier parte cuerda $\overline{PQ}$ = f; 4) ⊙ (O, ρ); 5) se traza $\overline{ON} \perp \overline{AC}$; 6) se copia ϵ en O y se determina M; 7) la perpendicular en M determina $\overline{BD}$.
(Los ∡ ϵ marcados son iguales por tener sus lados perpendiculares).

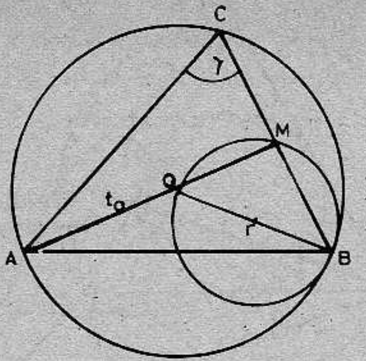


III

6) Construir un cuadrilátero inscriptible dados: r, a, e, ϵ.
(Ind. (Fig. IV): 1) ⊙ (O, r); 2) $\overline{AB}$ = a; 3) arco ⊙ (A, e) determina C; 4) arco capaz de ϵ con cuerda $\overline{AB}$.).



IV



$\overline{V}$

7) $\triangle$: c:t = m:n, r, γ (Ind. (Fig. V): con r y γ se determina »c«. Por lo tanto, se determina »t_a« como cuarta proporcional.
L.G. para M: 1) $\odot$ de diámetro $\overline{OB}$; 2) arco $\odot$ (A, t_a); etc.).

8) # a, ϵ, h_a.

9) # e, f, α.

10) $\triangle$: γ, c, ρ (Determine el ángulo formado por las bisectrices de α y β).

11) $\triangle$: t_a, t_b, t_c (Ind.: trazar por B // t_a y por A//t_b; se forma un paralelogramo de lado 2/3 de t_a y 2/3 de t_b; una de las diagonales mide 2 /3 de t_c).

12) Cuadrilátero circunscrito: a, ρ, α, f.

13) $\triangle$: a, α, ρ.

14) $\triangle$: a $-$b, $\alpha - \beta$, h_a.

15) Trapezoide ABCD dados: a, b, c, d y de modo que la diagonal $\overline{AC}$ sea bisectriz del $\measuredangle$ DAB. (Ind.: formar a $-$d $=\overline{EB}$; $\triangle$ aux. EBC con a $-$d, b, c $=\overline{CE}$).

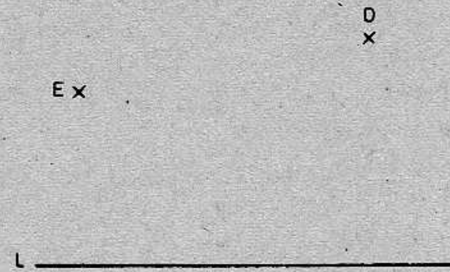
16) Construir un triángulo del cual se conocen los puntos medios de sus tres lados.

17) Construir un $\triangle$ ABC del cual se conocen el centro de gravedad G, el punto medio M del lado $\overline{AC}$ y el pie D de la altura h_c.
(Ind.: al final estudie la mediana del $\triangle$ ADC).

18) Construir un triángulo del cual se conocen el vértice A y los pies D y E de las alturas h_a y h_b.

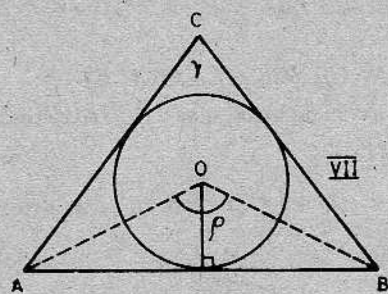
19) $\triangle$: t_a, b = 1,5 a, p = h_c.

20) Construir un $\triangle$ ABC del cual se conoce los pies D y E de las alturas h_a y h_b y una recta L sobre la cual está el lado $\overline{AB}$. (Ind.: trazar la simetral de $\overline{DE}$). (Fig. VI).

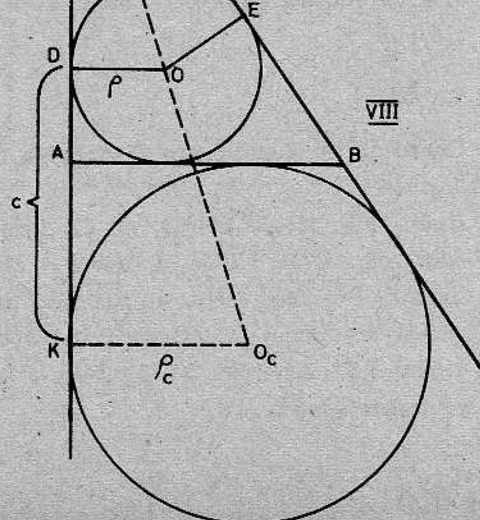


$\overline{VI}$

21) Construir un trapecio isósceles circunscriptible conocido su perímetro 2s y ρ. (Ind.: aproveche las propiedades: b + d = a + c = s; b = d $\Longrightarrow$ b = $\frac{s}{2}$; además h = $2 \cdot \rho$).

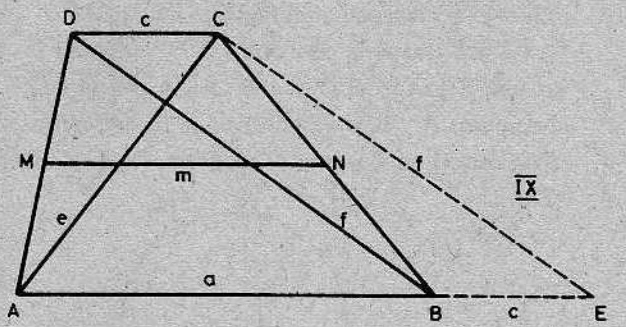


22) $\triangle$: r, γ, ρ. (Fig. VII).
1ª. solución: 1) con r y γ se determina »c«; 2) $\measuredangle$ AOB = $90° + \frac{1}{2} \cdot \gamma$; 3) L.G. para O: 1) arco capaz de $90° + \frac{1}{2} \cdot \gamma$ con



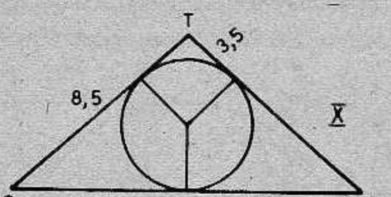
cuerda $\overline{AB}$; 2) paralela a la distancia ρ de $\overline{AB}$.

2ª. solución: 1) con γ y ρ se construye el deltoide CDOE; 2) $\overline{DK} = c$ y perpendicular en K determina O; 3) se dibuja la $\odot$ (O_c, $\overline{O_cK}$); 4) se traza la tangente común interior a las circunferencias de centro O y O_c la que determina A y B. (Fig. VIII).

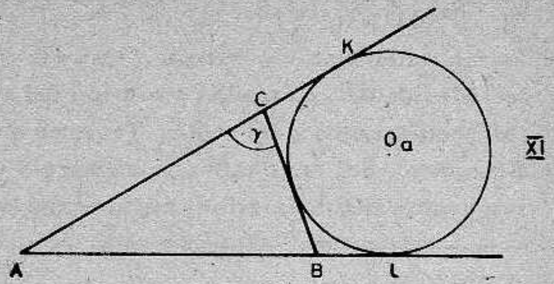


23) Construir un trapecio dados: e, f, α y la mediana »m«. (Fig. IX).
(Ind.:
1) $\overline{AE} = a + c$
2) $m = \frac{a+c}{2} \Rightarrow \overline{AE} = 2m$
3) $\triangle$ aux. AEC con $\overline{AE} = 2m$,
$\overline{AC} = e$, $\overline{CE} = f$; 4) etc.).

24) $\triangle$: c, γ, ρ_a (Ind.: determine previamente el $\measuredangle AO_aB$).



25) En el $\triangle$ SRT se obtiene una de las siguientes alternativas (Fig. X).
A) $\overline{SR} = 15$
B) $\overline{RQ} = 12$
C) perímetro $= 23{,}5$
D) perímetro $= 47$
E) faltan más antecedentes.



26) En la Fig. XI al mantenerse fijo el lado $\overline{AB}$ y constante el ángulo γ, el L.G. del centro O_a de la circunferencia ex inscrita es:
A) la $\odot$ (B, $\overline{AB}$) (Fig. XI)
B) arco capaz de γ con cuerda $\overline{AB}$
C) la $\odot$ (A, b_γ)
D) la $\odot$ (C, $\overline{BC}$)
E) arco capaz de $\frac{1}{2} \cdot \gamma$ con cuerda $\overline{AB}$.

219. DATUM

Ya vimos que para construir un triángulo se necesitan tres datos *independientes* entre sí, debiendo ser, por lo menos, uno de ellos un dato lineal.

Pero es frecuente que al darse estos tres datos dos de ellos determinan el tercero. En estos casos se habla de *datum.*

Cada uno de los siguientes ejemplos es un datum:

1) $\triangle$: c, γ, r. (Es el caso más conocido ya que cualquiera de dos de estos datos determinan al tercero: con »c« y »r« se determina γ; con γ y »r« se determina »c«, etc.). Análogamente son »datum«:
$\triangle: a, \alpha, r$; $\triangle: b, \beta, r$.
2) $\triangle: p, \beta, h_c$.
3) $\triangle: q, \alpha, h_c$.
4) $\triangle: h_c, b_\gamma, \alpha - \beta$.
5) $\triangle: p - q, h_c, t_c$.
6) trapecio dados: a, b, β, γ.
7) #: a, b, c.
8) #: a, α, γ.
9) trapecio isósceles: a, α, β.

La circunferencia y el círculo (Segunda parte). Relaciones entre cuerdas iguales y diferentes. Medida de un ángulo en función del arco que subtiende. Teoremas sobre ángulos inscritos, semiinscritos y del centro. Teorema de la semicircunferencia de Thales de Mileto. Lugar Geométrico del »arco capaz de un ángulo«. Cuadrilátero inscrito en una circunferencia. Teorema sobre ángulo interior y ángulo exterior en un círculo.

---

220. TEOREMA LXVII

»El diámetro es mayor que cualquier cuerda«.

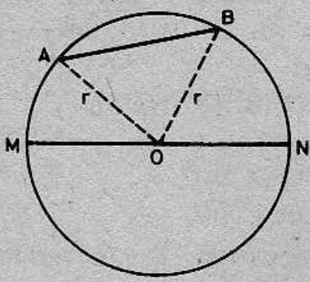


Fig. 1

H.) $\overline{MN}$ = diámetro (Fig. 1)
$\overline{AB}$ = cuerda

T.) $\overline{MN} > \overline{AB}$

D.) $\overline{AO} + \overline{OB} > \overline{AB}$

pero

$\overline{AO} + \overline{OB} = \overline{MN} = 2r$

$\therefore \ \overline{MN} > \overline{AB}$

221. TEOREMA LXVIII

»La perpendicular trazada desde el centro de un círculo a una cuerda la dimidia«. (A esta perpendicular se le llama *apotema,* que se designa por ρ = rho.).

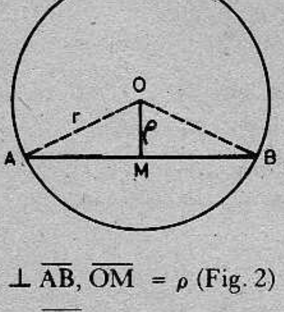


Fig. 2

H.) $\overline{OM} \perp \overline{AB}$, $\overline{OM} = \rho$ (Fig. 2)

T.) $\overline{MA} = \overline{MB}$

D.) Se tiene:

$\triangle$ AMO $\cong$ $\triangle$ BMO : $\left\{ \begin{array}{l} \overline{OA} = \overline{OB} = r \\ \overline{OM} = \text{lado común} \\ \measuredangle OMA = \measuredangle OMB = 90° \end{array} \right.$

(por 3ᵉʳ Teor. de $\cong$)

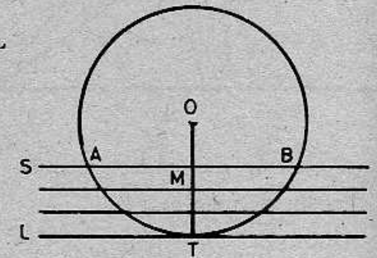
$\therefore \ \overline{MA} = \overline{MB}$

Corolario: »La tangente a una circunferencia es perpendicular al radio de contacto«.

Basta trazar la apotema $\overline{OM}$ y trasladar la secante S paralelamente a sí misma con lo cual los puntos A y B se van acercando hasta confundirse con M en el punto de tangencia T. Es decir (Fig. 3):

$\overline{OT} \perp L$

Fig. 3



Puede decirse también que:

lím sec S = tang. L

$\overline{OM} \rightarrow r$

222. TEOREMA LXIX

»De dos cuerdas que parten de un mismo punto de la circunferencia la mayor está a menor distancia del centro« (dista menos del centro).

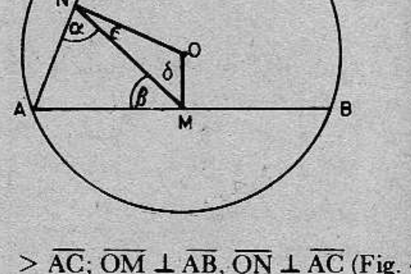


Fig. 4

H.) $\overline{AB} > \overline{AC}$; $\overline{OM} \perp \overline{AB}$, $\overline{ON} \perp \overline{AC}$ (Fig. 4)

T.) $\overline{OM} < \overline{ON}$

D.) Se une M con N. En el $\triangle$ AMN se tiene: $\alpha > \beta$, pues $\overline{AM} > \overline{AN}$ (por Teor. LII). Por lo tanto, el complemento ϵ de α es menor que el complemento δ de β. Luego, de acuerdo con el Teor. LIII aplicado al $\triangle$ NMO, se obtiene: $\overline{OM} < \overline{ON}$.

Corolarios: 1) Cuerdas iguales de un círculo distan igualmente del centro.

2) Cuerdas desiguales de un círculo la mayor dista menos del centro.

223. TEOREMA LXX

»En un mismo círculo o en círculos congruentes, a cuerdas iguales corresponden ángulos del centro iguales y arcos comprendidos iguales«.

(¡Demuéstrelo usted!).

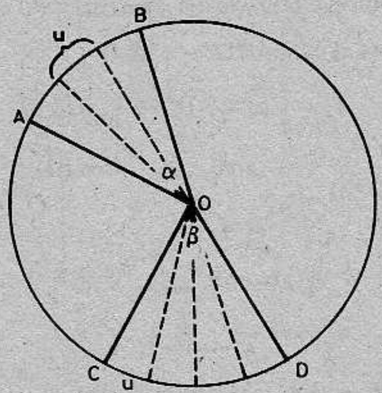


Fig. 5

224. TEOREMA LXX

»En un mismo círculo o en círculos congruentes la razón entre las medidas de dos ángulos del centro es igual a la razón entre las medidas de los arcos que comprenden entre sus lados«.

H.) α y β son ángulos del centro. (Fig. 5)

T.) $\dfrac{\measuredangle \alpha}{\measuredangle \beta} = \dfrac{\text{arco } \widehat{AB}}{\text{arco } \widehat{CD}}$

D.) Como »medir un arco es compararlo con otro que se toma como unidad«, tomaremos como arco unitario uno que llamaremos »$\hat{u}$« y que supondremos es »una medida común« para los arcos $\widehat{AB}$ y $\widehat{CD}$. (No es necesario que sea la »máxima común medida«).

Si este arco unitario »u« está contenido 3 veces en $\widehat{AB}$ y 4 veces en $\widehat{CD}$, tendremos:

$$\frac{\text{arco } \widehat{AB}}{\text{arco } \widehat{CD}} = \frac{3 \cdot \hat{u}}{4 \cdot \hat{u}} \quad \therefore \quad \frac{\text{arco } \widehat{AB}}{\text{arco } \widehat{CD}} = \frac{3}{4}$$

Pero como a »arcos iguales corresponden ángulos del centro iguales«, se tiene también:

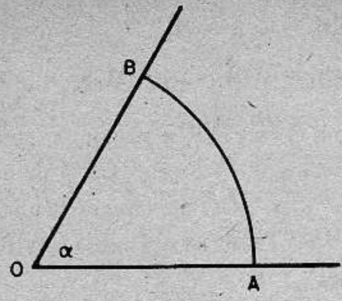


Fig. 6.

$$\frac{\measuredangle \alpha}{\measuredangle \beta} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{\measuredangle \alpha}{\measuredangle \beta} = \frac{\text{arco } \widehat{AB}}{\text{arco } \widehat{CD}}$$

Corolario: Si se toma β como ángulo unitario y $\widehat{CD}$ como arco unitario, resulta:

$$\boxed{\measuredangle \alpha = \text{arco } \widehat{AB}}$$

Es decir: »Un ángulo del centro tiene la misma medida que el arco comprendido entre sus lados«.

Entonces, para medir un ángulo cualquiera α basta trazar entre sus lados un arco $\widehat{AB}$ de centro en el vértice y medir este arco. De este modo se obtiene: $180° = \frac{1}{2} \odot$, $90° = \frac{1}{4} \odot$, etc.

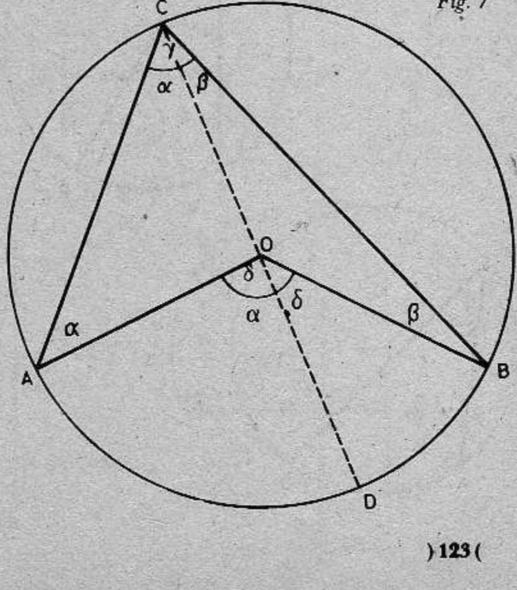
225. TEOREMA LXXII

»Todo ángulo inscrito en un círculo es igual a la mitad del ángulo del centro que comprende el mismo arco entre sus lados«.

H.) $\measuredangle ACB = \measuredangle$ inscrito en arco $\widehat{AB}$

$\measuredangle AOB = \measuredangle$ del centro correspondiente al inscrito

Fig. 7



T.) $\measuredangle ACB = \frac{1}{2} \measuredangle AOB$

O bien: $\measuredangle AOB = 2 \cdot \measuredangle ACB$

D.) Se une C con O y se prolonga, obteniéndose dos triángulos isósceles CAO de ángulo basal α y el BCO de ángulo basal β. Aplicando el Teor. XVII a estos dos triángulos, resulta:

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 \cdot \alpha \\ y = 2 \cdot \beta \end{array}\right\} +$$
$$\overline{x + y = 2 \cdot \underbrace{(\alpha + \beta)}}$$

$$\measuredangle AOB = 2 \cdot \measuredangle ACB \Rightarrow \measuredangle ACB = \frac{1}{2} \measuredangle AOB$$

Otra demostración: se basa en el corolario del Teor. LXXI. Entonces: la medida del $\measuredangle x$ equivale a la medida del arco $\widehat{AD}$; la medida del $\measuredangle y$ equivale a la medida del arco $\widehat{DB}$

Por lo tanto:

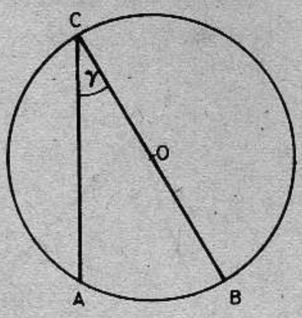
$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \frac{1}{2} \text{ arco } \widehat{AD} \\ \beta = \frac{1}{2} \text{ arco } \widehat{DB} \end{array}\right| +$$
$$\overline{\alpha + \beta = \frac{1}{2} (\text{arco } \widehat{AD} + \text{arco } \widehat{DB})}$$

luego:

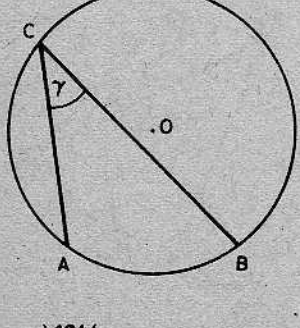
$$\measuredangle ACB = \frac{1}{2} \text{ arco } \widehat{AB}$$

226. EJERCICIOS

1) Demostrar que el Teor. LXXII es válido para el caso de ser un diámetro uno de los lados del ángulo inscrito (Fig. I).

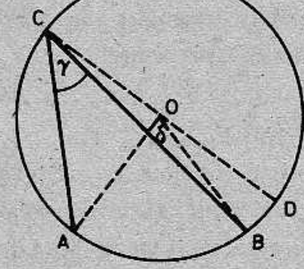


I



II

2) Demuestre que el Teor. LXXII es válido para el caso en que el centro O quede fuera de los lados del ángulo inscrito (Fig. II).



III

Dem. de 2). En la Fig. III se tiene, de acuerdo con el Corolario del Teorema LXXI que:

$$\measuredangle ACB = \measuredangle ACD - \measuredangle BCD$$
$$\gamma = \frac{1}{2} \text{ arco } \widehat{AD} - \frac{1}{2} \text{ arco } \widehat{BD}$$
$$\gamma = \frac{1}{2} (\text{arco } \widehat{AD} - \text{arco } \widehat{BD})$$
$$\gamma = \frac{1}{2} \text{ arco } \widehat{AB}$$

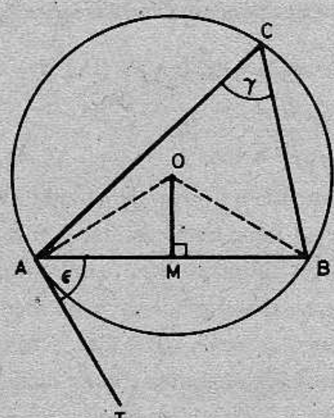
pero $\delta = \text{arco } \widehat{AB}$

$\therefore \quad \gamma = \frac{1}{2} \cdot \delta$

Busque usted otra demostración.

227. TEOREMA LXXIII

»Todo ángulo semiinscrito en una circunferencia es igual al ángulo inscrito en el mismo arco« (Fig. IV).



IV

H.) $\measuredangle ACB = \measuredangle \text{ inscrito} = \gamma$

$\measuredangle BAT = \measuredangle$ semiinscrito

$\widehat{AB}$ = arco comprendido por ambos

T.) $\epsilon = \gamma$

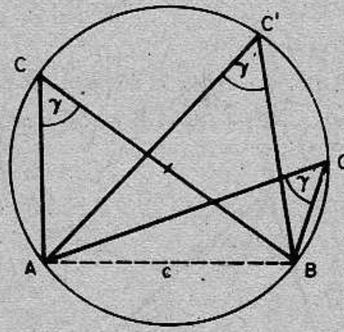
D.) Se traza la apotema $\overline{OM}$. Por lo tanto:

$$\sphericalangle AOB = 2 \cdot \gamma \Rightarrow \sphericalangle AOM = \gamma$$
$$\text{pero } \sphericalangle AOM = \epsilon \text{ (Teo. XV)}$$
$$\therefore \epsilon = \gamma$$

(Esta conclusión la aplicaremos, un poco más adelante, en la construcción del »arco capaz« de un ángulo.).

228. COROLARIOS DEL TEOR. LXXII Y DEL LXXIII

1) »Todos los ángulos inscritos en el mismo arco son iguales entre sí« (Fig. v).



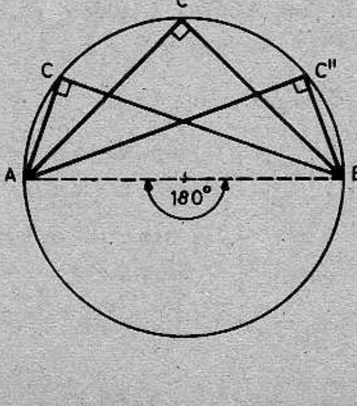
V

En efecto:

$$\gamma = \frac{1}{2} \cdot \text{arco } \widehat{AB}$$
$$\gamma' = \frac{1}{2} \text{ arco } \widehat{AB}$$
$$\gamma'' = \frac{1}{2} \text{ arco } \widehat{AB}$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$\therefore \gamma = \gamma' = \gamma'' = \ldots$$

2) »Todos los ángulos inscritos en una semicircunferencia son rectos«. (Este corolario se conoce históricamente como *Teorema de Thales de Mileto*, año 600 a.JC.). En efecto:

$$\sphericalangle ACB = \frac{1}{2} \sphericalangle AOB = \frac{180°}{2} = 90° \text{ (Fig. VI).}$$



VI

229. ARCO CAPAZ DE UN ANGULO

En la figura v los $\triangle$ ABC, ABC', ABC'', ..., tienen todos la misma base $\overline{AB} = c$ y el ángulo γ *opuesto* a ella. Por lo tanto, al conocerse el lado »c« se conocen los vértices A y B; sólo quedaría por determinar el *tercer vértice* C el cual se encuentra en un punto del arco ACC'C''B que se llama »arco capaz del ángulo«.

Luego:

L.G. Nº 13: »Cuando en un triángulo se conoce *un lado* y *el ángulo opuesto a él*, el L.G. del tercer vértice del triángulo es »el arco capaz del ángulo« que subtiende como cuerda el lado dado«.

230. SEMICIRCUNFERENCIA DE THALES

En la figura VI los $\triangle$ ABC, ABC', ABC'', ..., son todos triángulos rectángulos que tienen *la misma hipotenusa* $\overline{AB}$ y sólo varía la posición del vértice C del ángulo recto. Pero, éste se encuentra en un punto de la semicircunferencia ACC'C''B que tiene por diámetro a la hipotenusa $\overline{AB}$.

Luego:

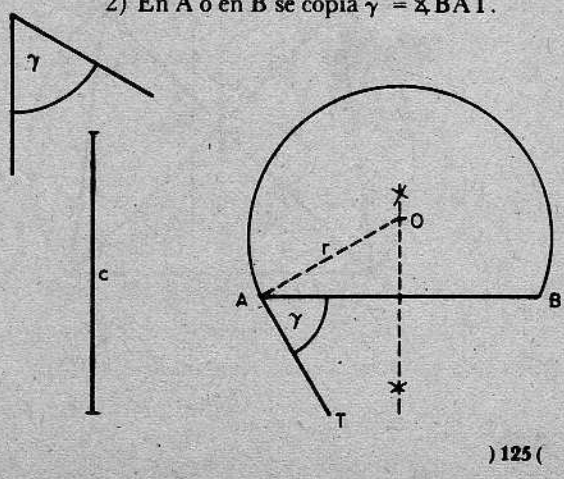
L.G. Nº 14: »El L.G. del vértice del ángulo recto de todos los triángulos rectángulos que tienen la misma hipotenusa es la semicircunferencia que tiene por diámetro a la hipotenusa«. (En la práctica se dice simplemente: »El L.G. es la semicircunferencia de Thales«).

231. PROBLEMA FUNDAMENTAL

Dados un trazo »c« y un ángulo γ, construir el »arco capaz del ángulo«.

1) Se copia el trazo $c = \overline{AB}$ (Fig. VII).

2) En A o en B se copia $\gamma = \sphericalangle BAT$.



VII

3) Como el arco pasa por A y B, un L.G. para el centro O es la simetral de $\overline{AB}$ y, el otro L.G., es la perpendicular en A a $\overline{AT}$ (pues la tangente es perpendicular al radio en el punto de tangencia). La intersección de estos dos L.G. determina el centro O y el radio $\overline{OA} = r$ del arco capaz.

Por lo tanto, basta dibujar el arco de ⊙ (O, OA).

Observación: 1) si $\gamma < 90°$ el arco capaz es mayor que una semi ⊙; 2) si $\varphi = 90°$ el arco capaz es igual a una semicircunferencia; 3) si $\gamma > 90°$ el arco capaz es menor que una semicircuferencia.

232. EJERCICIOS

1) Construir un triángulo dados: c, γ, h_c.

Análisis: Sea ABC el △ pedido en el cual $c = \overline{AB}$, $\measuredangle ACB = \gamma$, $\overline{CD} = h_c$ (Fig. 1). Con »c« se determina A y B. Para C se tienen los siguientes L.G.:

1) arco capaz de γ con cuerda $c = \overline{AB}$;

2) la paralela a la distancia h_c de $\overline{AB}$.

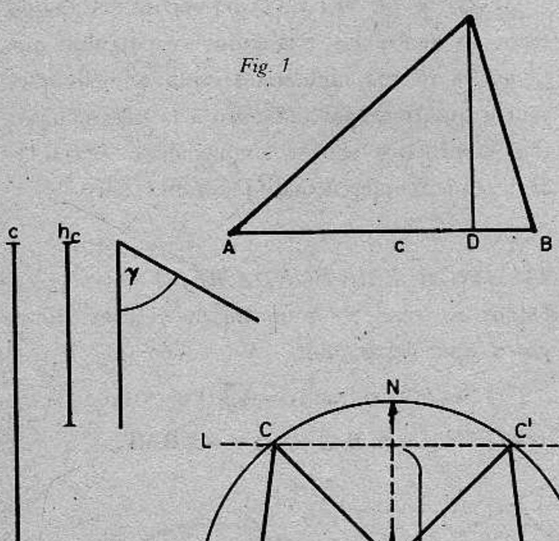


Fig. 1

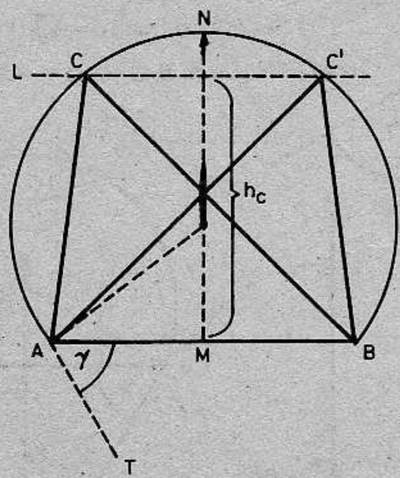


Fig. 2

Construcción:

1) se copia $c = \overline{AB}$ (Fig. 2);

2) se construye el arco capaz de γ con cuerda »c« (según # 231);

3) sobre la simetral y a partir de M se copia h_c y se traza $L // \overline{AB}$;

4) la intersección de la paralela con el arco capaz determina el tercer vértice C que se une con A y B.

Discusión:

si $h_c <$ flecha $\overline{MN}$ hay 2 soluciones

si $h_c =$ flecha $\overline{MN}$ hay 1 solución

si $h_c >$ flecha $\overline{MN}$ no hay solución, pues la paralela no corta el arco capaz.

2) $\triangle: c, \gamma, t_c$

Análisis: sea ABC el △ pedido en el cual $\overline{AB} = c$, $\overline{CM} = t_c$, $\measuredangle ACB = \gamma$ (Fig. 3);

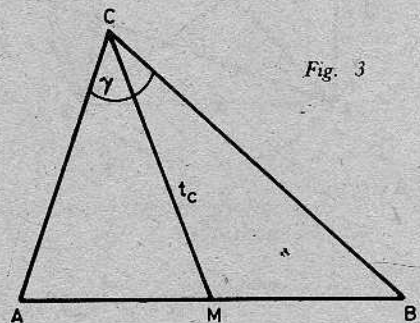


Fig. 3

1) con »c« se determinan A y B;

2) L.G. para C: 1°) arco capaz de γ con cuerda »c«; 2°) la ⊙ (M, t_c).

Construcción: ¡Hágala Ud.!

Discusión:

si $\frac{c}{2} < t_c <$ flecha $\overline{MN}$ hay 2 soluciones

si $\frac{c}{2} > t_c >$ flecha $\overline{MN}$ no hay solución

si $t_c =$ flecha $\overline{MN}$ hay 1 solución.

3) $\triangle: c, \gamma, h_a$

Análisis: Sea ABC el △ pedido en el cual $\overline{AB} = c$, $\overline{AD} = h_a$, $\measuredangle ACB = \gamma$ (Fig. 4);

1) con »c« se determina A y B;

2) L.G. para D: $\begin{cases} 1°) \text{ semi ⊙ (AB) de Thales} \\ 2°) \text{ arco ⊙ } (A, h_a) \end{cases}$

3) L.G. para C: $\begin{cases} 1°) \text{ arco capaz de } \gamma \text{ con cuerda »c«} \\ 2°) \ B(-)D \to D \end{cases}$

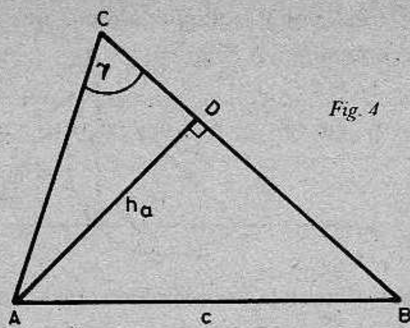


Fig. 4

Construcción: Dése Ud. los datos y haga la construcción siguiendo el orden indicado por el análisis.

Discusión: ¡Hágala usted!

4) $\triangle: c, h_a, h_b$

5) $\triangle: p, q, \gamma$

6) $\triangle: u, v, \gamma$

7) $\triangle: a+b+c, h_c, \gamma$
(Ind.: formar el $\triangle$ DEC (Fig 5), en el cual $\overline{DE} = a + b + c$. Determine el valor del $\measuredangle$ DCE).

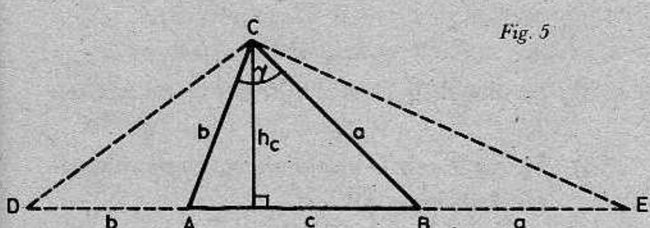


Fig. 5

233. TEOREMA LXXIV

»En todo cuadrilátero inscrito en un círculo la suma de dos ángulos opuestos es 180°«.

H.) ABCD = cuadrilátero inscrito

T.) $\alpha + \gamma = 180°$
$\beta + \delta = 180°$

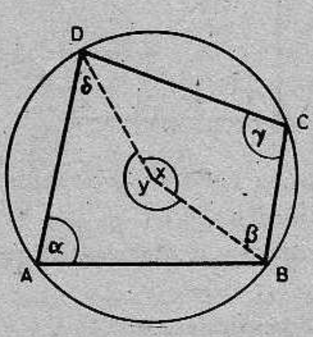


Fig. 6.

D.) Por el Teor. LXXII, se obtiene (Fig. 6):

$$\left.\begin{aligned}\alpha &= \tfrac{1}{2}\cdot x\\ \gamma &= \tfrac{1}{2}\cdot y\end{aligned}\right\}+$$

$$\alpha + \gamma = \tfrac{1}{2}(x+y), \text{ pero } x+y = 360°$$

$$\therefore \alpha + \gamma = 180°$$

Observación: Enuncie el Teor. recíproco del anterior.

234. ANGULO INTERIOR Y ANGULO EXTERIOR EN UN CIRCULO

Definición: »*Angulo interior* es el que forman dos cuerdas al cortarse«. »*Angulo exterior* es el que forman dos secantes que parten de un mismo punto«.

235. TEOREMA LXXV

»Un ángulo interior en un círculo tiene por medida la semisuma de los arcos que comprenden sus lados y sus prolongaciones«.

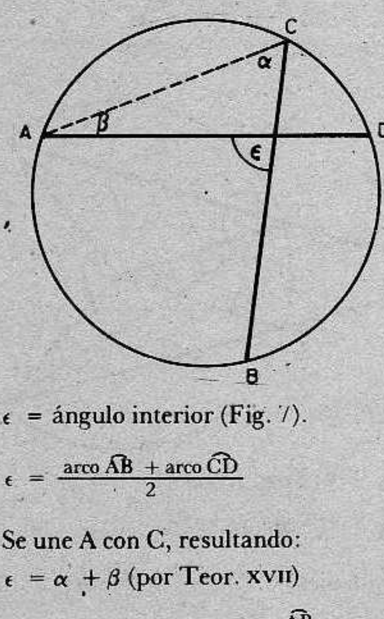


Fig. 7

H.) ϵ = ángulo interior (Fig. 7).

T.) $\epsilon = \dfrac{\text{arco } \widehat{AB} + \text{arco } \widehat{CD}}{2}$

D.) Se une A con C, resultando:
$\epsilon = \alpha + \beta$ (por Teor. XVII)

pero: medida de $\alpha = \dfrac{\text{arco } \widehat{AB}}{2}$

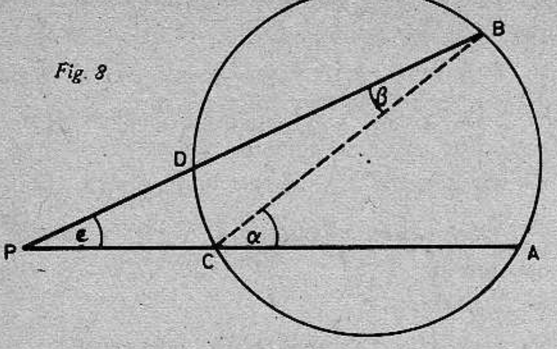
medida de $\beta = \dfrac{\text{arco } \widehat{CD}}{2}$

por lo tanto: $\epsilon = \dfrac{\text{arco } \widehat{AB} + \text{arco } \widehat{CD}}{2}$

236. TEOREMA LXXVI

»Un ángulo exterior en un círculo tiene por medida la semidiferencia de los arcos que comprende entre sus lados«.

Fig. 8



H.) ϵ = ángulo exterior (Fig. 8).

T.) $\epsilon = \dfrac{\text{arco}\,\widehat{AB} - \text{arco}\,\widehat{CD}}{2}$

D.) Se une B con C. Resulta por el Teor. XVII:

$\alpha = \epsilon + \beta \Longrightarrow \epsilon = \alpha - \beta;$

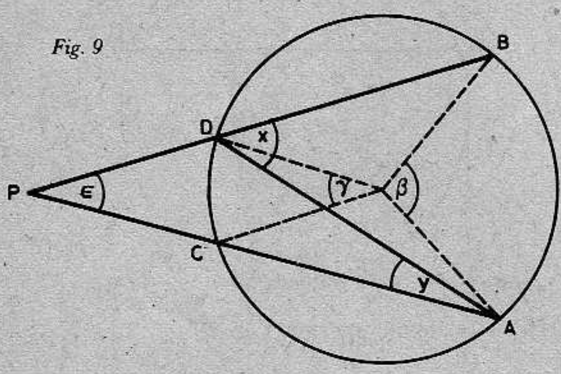
pero $\alpha = \dfrac{\text{arco}\,\widehat{AB}}{2}$ y $\dfrac{\text{arco}\,\widehat{CD}}{2}$

luego, se obtiene:

$\epsilon = \dfrac{\text{arco}\,\widehat{AB} - \text{arco}\,\widehat{CD}}{2}$

Otra demostración (Fig. 9):

Fig. 9



$$\left.\begin{array}{l} x = \epsilon + y \text{ (Teor. XVIII)} \\ x = \frac{1}{2}\beta \quad \text{(Teor. LXXII)} \end{array}\right\} \Longrightarrow \epsilon + y = \frac{1}{2}\beta$$

pero, también $\quad y = \frac{1}{2}\gamma$ (Teor. LXXII)

luego: $\quad \epsilon + \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}\beta \Longrightarrow \epsilon = \dfrac{\beta - \gamma}{2}$

Como, además

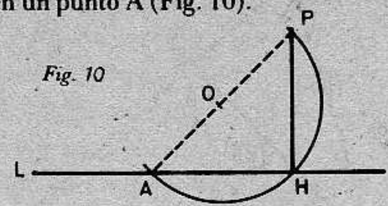
$$\left.\begin{array}{l} \beta = \text{arco}\,\widehat{AB} \\ \hline \gamma = \text{arco}\,\widehat{CD} \end{array}\right\} \Longrightarrow \epsilon = \frac{\widehat{AB} - \widehat{CD}}{2}$$

237. EJERCICIOS

A) Trazar desde un punto dado P la perpendicular a una recta L:

1) Se traza por P cualquier oblicua que corte a L en un punto A (Fig. 10).

Fig. 10

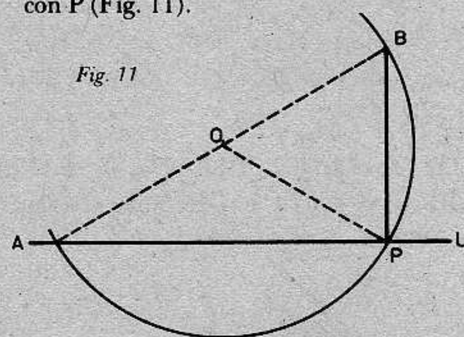


2) Se dibuja la semicircunferencia de diámetro $\overline{AP}$ que corta a L en un punto H.
3) $\overline{PH}$ es la perpendicular a L. ¿Por qué?

B) Trazar la perpendicular a una recta L en un punto P de ella:

1) Se elige un punto tal como el O que se une con P (Fig. 11).

Fig. 11

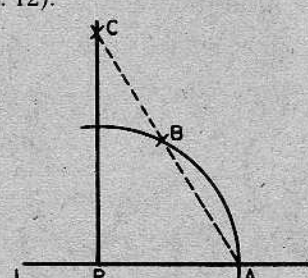


2) Se dibuja la $\odot$ (O, $\overline{OP}$) que corta a L en A.
3) Se une A con O y se prolonga hasta completar el diámetro $\overline{AB}$.
4) Finalmente se une B con P.

C) Trazar la perpendicular en un punto P de una recta L. (Otra solución):

1) Se dibuja un arco de cualquier radio $\overline{PA}$ (Fig. 12).

Fig. 12



2) Con el mismo radio se corta desde A determinándose B.
3) Se une A con B y se prolonga $\overline{AB}$ en $\overline{BC} = \overline{BA}$.
4) $\overline{PC}$ es la perpendicular pedida.

Demostración: ¡Hágala usted!

D) En los extremos de un trazo $\overline{AB}$ se trazan las perpendiculares $\overline{CA}$ y $\overline{DB}$ a $\overline{AB}$. Determinar un punto P que pertenezca al trazo $\overline{AB}$ de modo que las visuales trazadas desde C y D sean perpendiculares (Fig. 13).

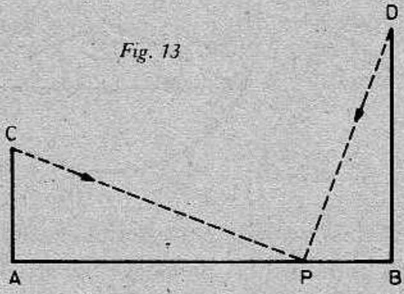


Fig. 13

E) En los extremos de un trazo $\overline{AB}$ se trazan las perpendiculares $\overline{CA}$ y $\overline{DB}$ a $\overline{AB}$. Determinar en el trazo un punto P de modo que las visuales trazadas desde C y D formen un ángulo de 30°

F) Determinar el L.G. del punto de intersección de todas las diagonales de los rombos que tienen la misma base.

G) Desde un punto P fuera de un círculo se trazan dos secantes que forman un ángulo α. Calcular la medida de este ángulo si $\measuredangle$ AOB = 80° y $\measuredangle$ COD = 50° (Fig. 14).

(Resp.: $\alpha = \frac{\pi}{12}$ rad.)

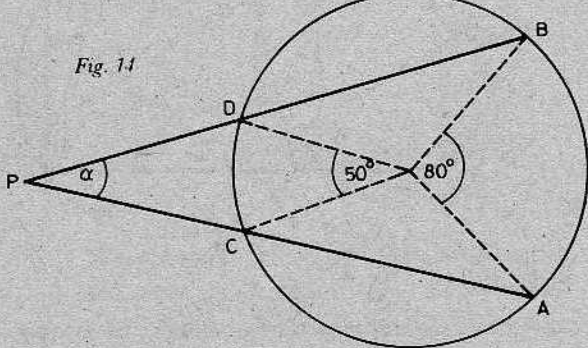


Fig. 14

H) Determinar el L.G. del ortocentro H de todos los triángulos ABC inscritos en una circunferencia y que tienen todos la misma base $\overline{AB}$. (Ind.: determinar el $\measuredangle$ AHB).

I) Se dan dos rectas paralelas L' y L''; entre ellas (o fuera de ellas) se dan dos puntos A y B. Determinar los puntos sobre las paralelas de modo que las visuales dirigidas de ellos a los puntos A y B formen un ángulo de 60°.

J) Un ángulo del centro recto AOB de un círculo (Fig. 15), gira en torno al centro O. Si $\overline{CD}$ es un diámetro fijo, determinar el L.G. del punto de intersección de las rectas $\overline{CA}$ y $\overline{DB}$. (Ind.: Teor. LXXVI).

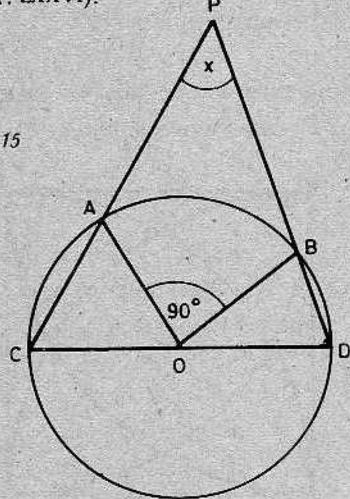


Fig. 15

K) Un ángulo del centro de 90° = $\measuredangle$ AOB de un círculo gira en torno al centro O. Si $\overline{CD}$ es un diámetro fijo, determinar el L.G. del punto de intersección de las cuerdas $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ (Fig. 16). (Ind.: Teor. LXXV).

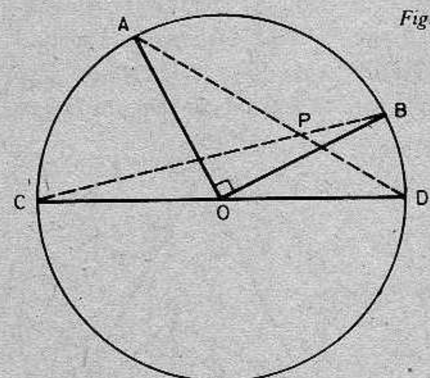


Fig. 16

L) Si un arco $\widehat{AB}$ mide 39 cm y el diámetro del círculo 60 cm, ¿cuál es la medida del ángulo γ en grados y minutos? (Fig. 17).

(Resp.: 37°15').

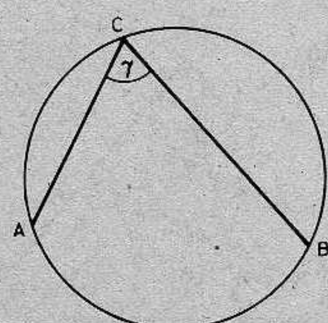


Fig. 17

M) Un ángulo mide 78°45'. Determinar el valor de su complemento y de su suplemento en grados centesimales (g) y en radianes (rad).

(Resp.: complemento $= 12^{g}50^{cg} = 0{,}1963$ rad.
suplemento $= 112^{g}50^{cg} = 1{,}7668$ rad)

N) En un cuadrado de lado »a« se trazan arcos de centro en cada vértice y radio »a«.

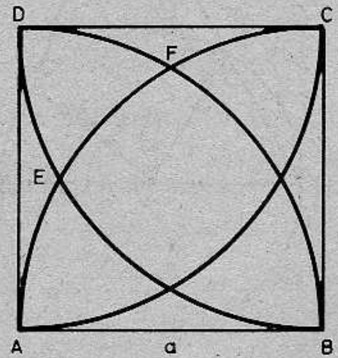


Fig. 18

Demostrar que:

arco $\widehat{AE}$ = arco $\widehat{EF}$ = arco $\widehat{FC}$.

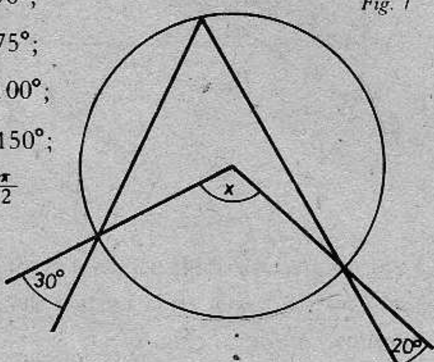
(Indicación: ver la trisección del ángulo recto # 79).

238. TESTS

1) En la Fig. 1 la medida del ángulo »x« es:

A) 50°;
B) 75°;
C) 100°;
D) 150°;
E) $\frac{\pi}{2}$

Fig. 1



2) En la Fig. 2 la medida de »x« es:

A) 20°;
B) 40°;
C) 60°;
D) 80°;
E) otro valor.

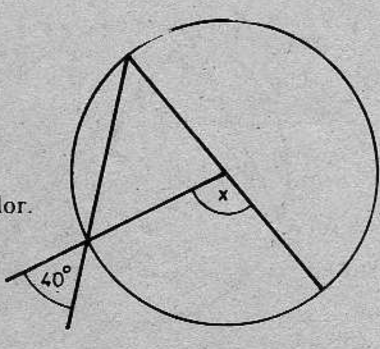


Fig. 2

3) La medida del ángulo »x« en la Fig. 3 es:

A) 50°;
B) 115°;
C) 65°;
D) 100°;
E) otro valor.

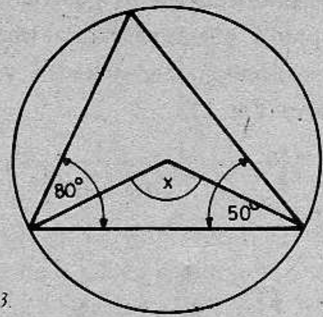
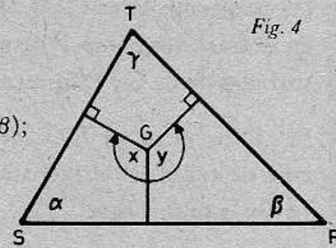


Fig. 3.

4) Desde el centro de gravedad G del triángulo SRT se trazan las perpendiculares a los lados. Entonces, la medida del ángulo (x + y) es (Fig. 4):

A) $180° - \gamma$;
B) $\alpha + \beta$
C) $180° + (\alpha + \beta)$;
D) $180° + \gamma$;
E) 270°.

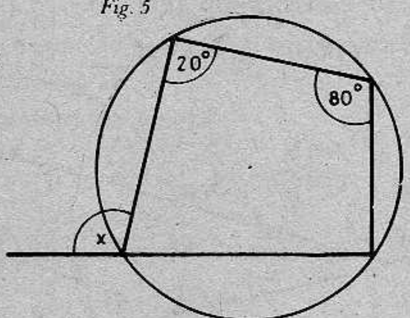
Fig. 4



5) El ángulo »x« de la Fig. 5 mide:

A) 80°;
B) 100°;
C) 60°;
D) 160°
E) 20°

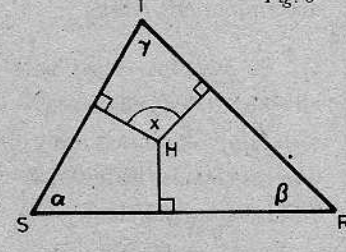
Fig. 5



6) Los ángulos interiores del △ SRT son α, β, γ. Si desde el ortocentro H se trazan las perpendiculares a los lados, el ángulo »x« mide (Fig. 6):

A) $\alpha + \beta$;
B) $\alpha + \gamma$;
C) $\beta + \gamma$;
D) $180 - \alpha$
E) $\alpha + \beta - \gamma$.

Fig. 6



7) En la Fig. 7 el segmento $\overline{OD}$ es un tercio del radio. Entonces, el ángulo »x« mide:

A) $\frac{1}{3}\,\alpha$;

B) $\frac{2}{3}\,\alpha$;

C) $1{,}5 \cdot \alpha$;

D) $0{,}5 \cdot \alpha$;

E) α.

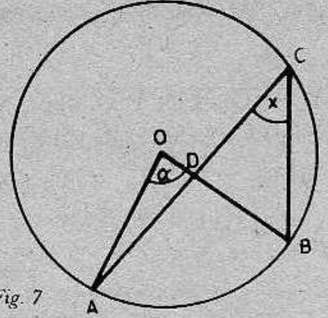


Fig. 7

8) En la Fig. 8 se trazó $\overline{AE} \perp \overline{BC}$ y $\overline{BD} \perp \overline{AC}$. El ángulo »x« mide:

A) $180° - \alpha$;

B) $90° - \alpha$;

C) $90° + \alpha$;

D) $\frac{180° - \alpha}{2}$;

E) α.

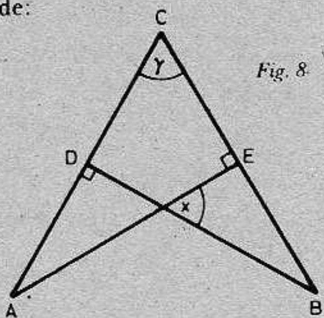


Fig. 8

9) En una circunferencia se toma una cuerda $\overline{AB}$ correspondiente al lado del decágono regular inscrito (Fig. 9). Entonces, el ángulo »x« mide:

A) 72°;

B) 36°;

C) 24°;

D) 18°;

E) 15°.

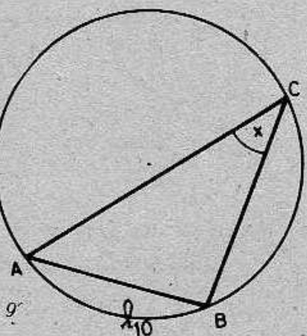


Fig. 9

10) En una circunferencia se toma una cuerda $\overline{AB}$ correspondiente al lado del decágono regular inscrito y la cuerda $\overline{BC}$ correspondiente al lado del pentadecágono regular inscrito. Entonces, el ángulo »x« mide (Fig. 10):

A) 14°, 4;

B) 60°;

C) 30°;

D) 45°;

E) otro valor.

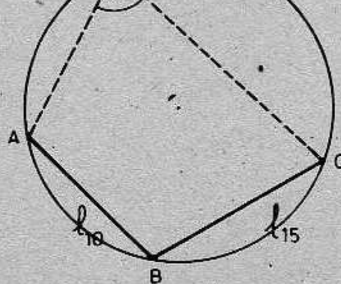


Fig. 10

11) En la figura 11 se tiene $\overline{AB} = l_8$ y $\overline{BC} = l_{24}$. Entonces, el ángulo ABC mide:

A) 60°;

B) 150°;

C) 135°;

D) 120°;

E) otro valor.

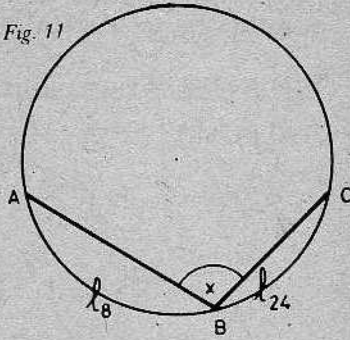


Fig. 11

12) En una circunferencia (Fig. 12), se marcan tres arcos iguales: $\widehat{MN} = \widehat{NP} = \widehat{PQ}$.
Si $\measuredangle$ MOP $= \alpha$, el ángulo PRQ mide:

A) $\frac{1}{2}\,\alpha$;

B) $\frac{1}{4}\,\alpha$;

C) $\frac{1}{3}\,\alpha$;

D) α;

E) $1{,}5 \cdot \alpha$.

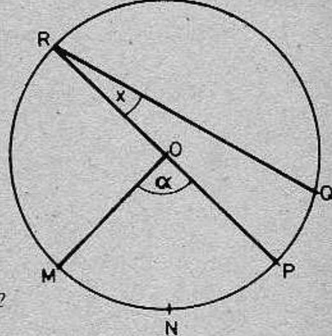


Fig. 12

13) En una circunferencia (Fig. 13) se marcan tres arcos iguales: $\widehat{MN} = \widehat{NP} = \widehat{PQ}$.
Si $\measuredangle$ MOQ $= \alpha$, entonces el ángulo »x« mide:

A) $\frac{1}{2}\,\alpha$;

B) $\frac{1}{6}\,\alpha$;

C) $\frac{1}{3}\,\alpha$;

D) $\frac{2}{3}\,\alpha$;

E) $1{,}5 \cdot \alpha$.

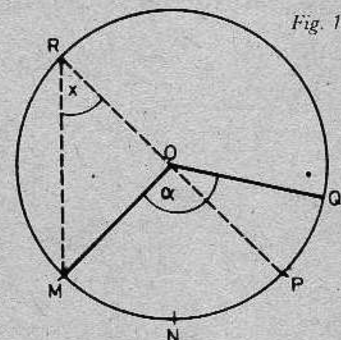


Fig. 13

14) En la figura 14 al mantenerse fijo el lado $\overline{AB}$ y constante el ángulo γ, el L.G. del

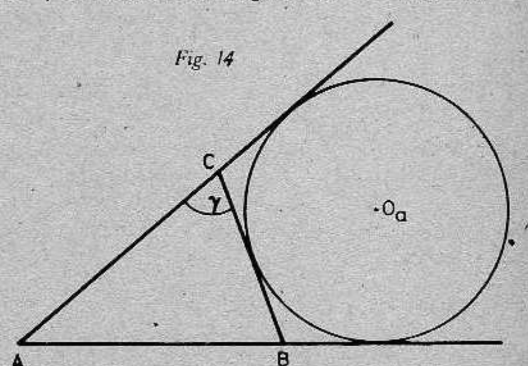


Fig. 14

centro O_a de la circunferencia ex inscrita al triángulo es:

A) $\odot$ (B, $\overline{AB}$);

B) arco capaz de γ con cuerda $\overline{AB}$;

C) $\odot$ (A, b_α);

D) $\odot$ (C, $\overline{BC}$);

E) arco capaz de $\frac{\gamma}{2}$ con cuerda $\overline{AB}$.

Resp.: 1) C; 2) D; 3) D; 4) D; 5) A; 6) A; 7) D; 8) E; 9) D; 10) C; 11) B; 12) B; 13) C; 14) E.

Posición relativa de dos circunferencias. Trazar las tangentes desde un punto a una circunferencia. Cuadrilátero circunscrito. Tangentes comunes exteriores e interiores a dos circunferencias.

---

239. *POSICION RELATIVA DE DOS CIRCUNFERENCIAS*

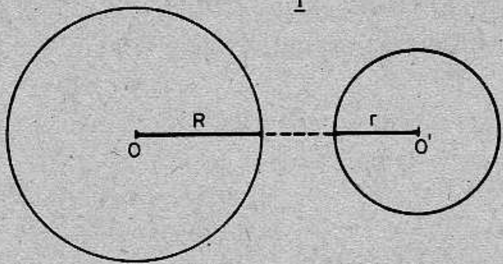
El segmento que une los centros de dos circunferencias se llama *central*.

Consideremos dos circunferencias exteriores que no tengan ningún punto común y acerquemos sus centros paulatinamente conservando la magnitud de los radios. Designemos por R y r los radios de estas circunferencias, por $\overline{OO'}$ la central y observemos qué le sucede a la central cuando se acercan los centros.

1er caso (Fig. I): Si las dos circunferencias son exteriores la medida de la central es:

$\overline{OO'} > R + r$

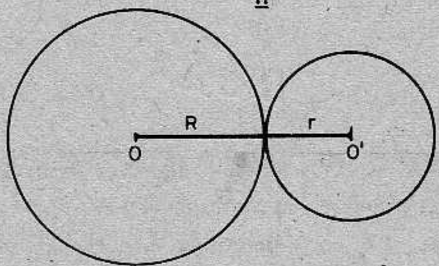
I



2º caso (Fig. II): Si las dos circunferencias son tangentes exteriormente la central mide:

$\overline{OO'} = R + r$

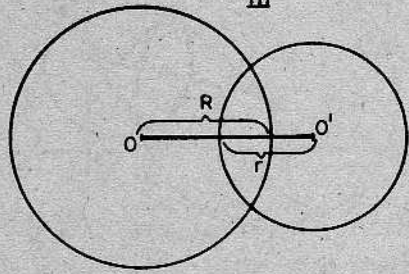
II



3er caso (Fig. III): Si las circunferencias son secantes, es decir, se cortan, la central mide:

$R - r < \overline{OO'} < R + r$

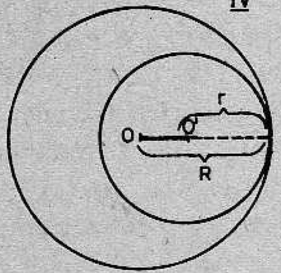
III



4º caso (Fig. IV): Si las dos circunferencias son tangentes interiormente, la central mide:

$\overline{OO'} = R - r$

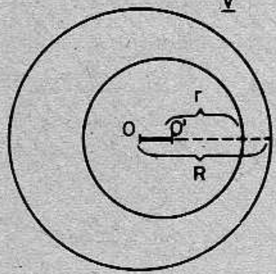
IV



5º caso (Fig. V): Si las circunferencias son interiores (una respecto a la otra), se obtiene para la central:

cero $< \overline{OO'} < R - r$

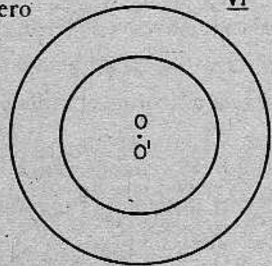
V



6º caso (Fig. VI): Si las circunferencias son concéntricas (tienen el mismo centro), se obtiene:

$\overline{OO'} =$ cero

VI



centro O_a de la circunferencia ex inscrita al triángulo es:

A) $\odot$ (B, $\overline{AB}$);

B) arco capaz de γ con cuerda $\overline{AB}$;

C) $\odot$ (A, b_α);

D) $\odot$ (C, $\overline{BC}$);

E) arco capaz de $\frac{\gamma}{2}$ con cuerda $\overline{AB}$.

Resp.: 1) C; 2) D; 3) D; 4) D; 5) A; 6) A; 7) D; 8) E; 9) D; 10) C; 11) B; 12) B; 13) C; 14) E.

22ª UNIDAD

Posición relativa de dos circunferencias. Trazar las tangentes desde un punto a una circunferencia. Cuadrilátero circunscrito. Tangentes comunes exteriores e interiores a dos circunferencias.

239. POSICION RELATIVA DE DOS CIRCUNFERENCIAS

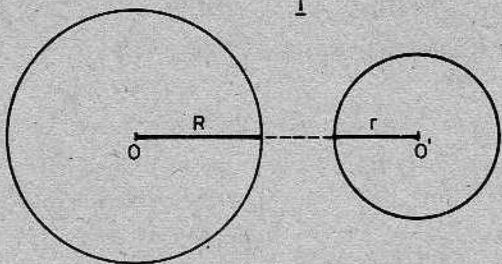
El segmento que une los centros de dos circunferencias se llama *central*.

Consideremos dos circunferencias exteriores que no tengan ningún punto común y acerquemos sus centros paulatinamente conservando la magnitud de los radios. Designemos por R y r los radios de estas circunferencias, por $\overline{OO'}$ la central y observemos qué le sucede a la central cuando se acercan los centros.

1er caso (Fig. I): Si las dos circunferencias son exteriores la medida de la central es:

$\overline{OO'} > R + r$

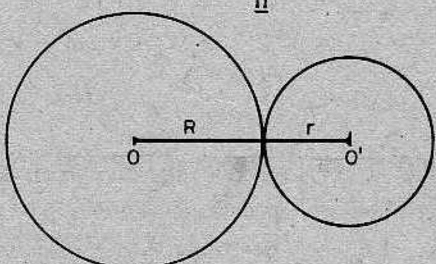
I



2° caso (Fig. II): Si las dos circunferencias son tangentes exteriormente la central mide:

$\overline{OO'} = R + r$

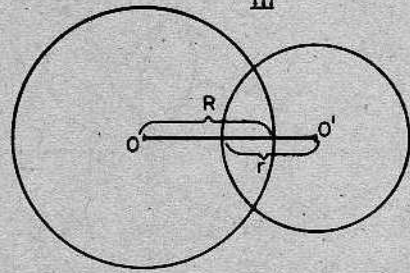
II



3er caso (Fig. III): Si las circunferencias son secantes, es decir, se cortan, la central mide:

$R - r < \overline{OO'} < R + r$

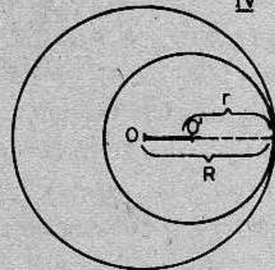
III



4° caso (Fig. IV): Si las dos circunferencias son tangentes interiormente, la central mide:

$\overline{OO'} = R - r$

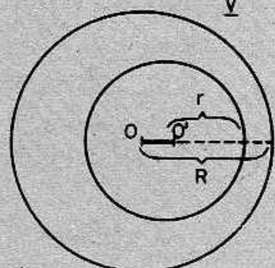
IV



5° caso (Fig. V): Si las circunferencias son interiores (una respecto a la otra), se obtiene para la central:

cero $< \overline{OO'} < R - r$

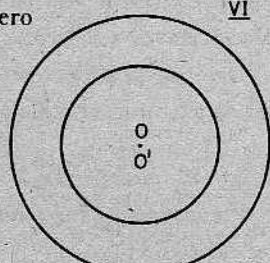
V



6° caso (Fig. VI): Si las circunferencias son concéntricas (tienen el mismo centro), se obtiene:

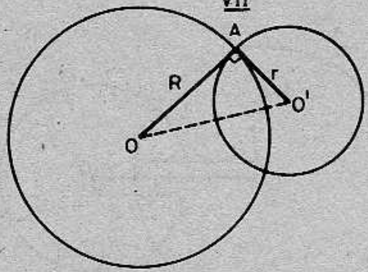
$\overline{OO'}$ = cero

VI



Observación (Fig. VII): Dos circunferencias se cortan *ortogonalmente* cuando los radios que parten de los puntos de intersección son perpendiculares entre sí.

VII



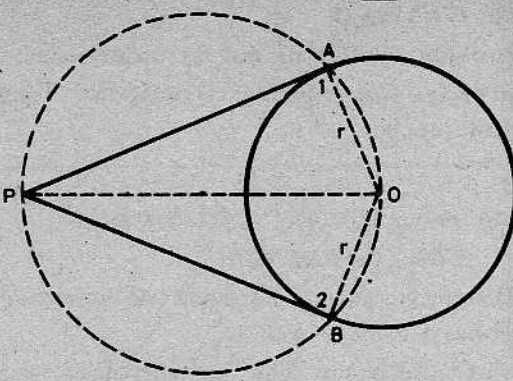
Si $R \perp r \Longrightarrow \measuredangle OAO' = 90°$

y, por lo tanto, las circunferencias son ortogonales.

240. TRAZAR LAS TANGENTES DESDE UN PUNTO A UNA CIRCUNFERENCIA

1) Se traza la central $\overline{OP}$ (Fig. VIII).
2) Se dibuja la circunferencia de diámetro OP.

VIII

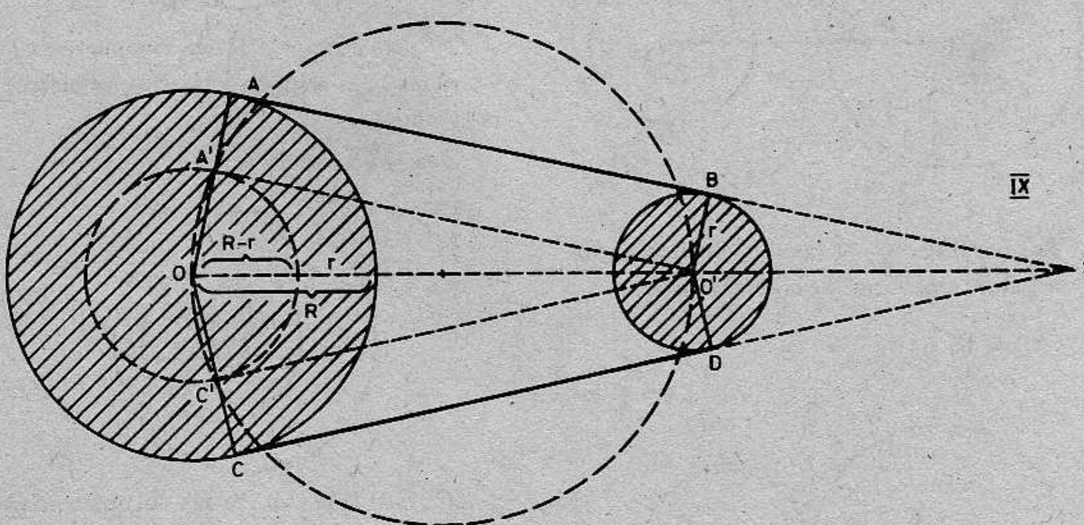


3) La intersección de las dos circunferencias determinan los puntos de tangencia A y B.
4) $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ son las dos tangentes desde el punto P.

   Dem.) Por el Teor. de Thales se tiene:
   $\measuredangle 1 = \measuredangle 2 = 90°$. Luego: $\overline{PA} \perp \overline{OA}$ y $\overline{PB} \perp \overline{OB}$.
   Por lo tanto, $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ son tangentes a la $\odot (O, \overline{OA})$.

241. TRAZAR LAS TANGENTES COMUNES EXTERIORES A DOS CIRCUNFERENCIAS

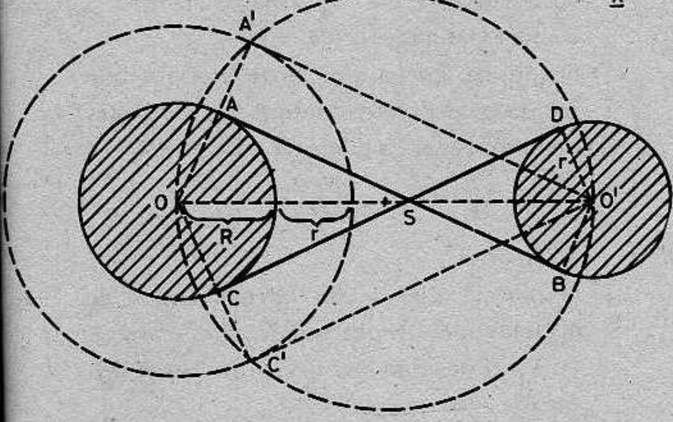
1) Se traza la central $\overline{OO'}$ (Fig. IX).



2) Se dibuja la $\odot$ (O, R −r), es decir, a la circunferencia mayor se le resta el radio de la menor (también se dice: »se contrae la circunferencia mayor en el radio de la menor«).
3) Se dibuja la circunferencia de diámetro $\overline{OO'}$ la que determina los puntos A' y C' los cuales se unen con O'.
4) $\overline{O'A'}$ y $\overline{O'C'}$ son las tangentes desde O' a la circunferencia contraída (O, R −r).
5) O (−) A' → A' determina A y O (−) C' → C' determina C.
6) Por O', se traza la paralela a $\overline{OA}$ y a $\overline{OC}$.
7) $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son las tangentes comunes exteriores a las dos circunferencias dadas.
   ¡Demuestre usted que son tangentes!

242. TRAZAR LAS TANGENTES COMUNES INTERIORES A DOS CIRCUNFERENCIAS

1) Se traza la central $\overline{OO'}$ (Fig. x).
2) Se dibuja la ⊙ (O, R +r), es decir, al radio mayor se le suma el menor. (Se dice también: »se dilata la circunferencia mayor en el radio de la menor«).



X

3) Se dibuja la ⊙ ($\overline{OO'}$) que determina los puntos A' y C' los cuales se unen con O'.
4) $\overline{O'A'}$ y $\overline{O'C'}$ son las tangentes desde O' a la ⊙ (O, R +r).
5) Se traza $\overline{O'B} \,//\, \overline{OA'}$ y $\overline{O'D} \,//\, \overline{OC'}$.
6) $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son las tangentes interiores a las dos circunferencias.
¡Demuéstrelo usted!

243. TEOREMA LXXVII

»Las dos tangentes trazadas desde un punto a una circunferencia son iguales« (miden lo mismo). (Fig. VIII).

H.) $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ son las tangentes.

T.) $\overline{PA} = \overline{PB}$

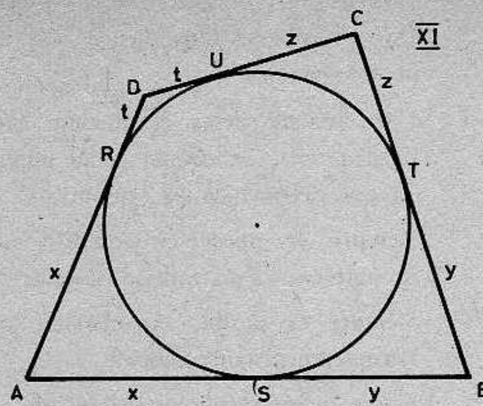
D.) Se tiene:

$\triangle POA \cong \triangle POB$ porque (por 3° Teor. de $\cong$) $\left\{ \begin{array}{l} \overline{OA} = \overline{OB} = \text{radios} \\ \overline{OP'} = \overline{OP} \text{ (lado común)} \\ \measuredangle 1 = \measuredangle 2 = 90° \end{array} \right.$

$\therefore\ \overline{PA} = \overline{PB}$

244. TEOREMA LXXVIII

»En todo cuadrilátero circunscrito a una circunferencia la suma de dos lados opuestos es igual a la suma de los otros dos lados«.



XI

H.) ABCD es cuadrilátero circunscrito (Fig. XI): S, T, U, R son los puntos de tangencia.

T.) $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$

D.) De acuerdo con el Teor. LXXVII se tiene:
$\overline{AS} = \overline{AR} = x$; $\overline{BS} = \overline{BT} = y$; $\overline{CT} = \overline{CU} = z$; $\overline{DU} = \overline{DR} = t$

Entonces: $\overline{AB} + \overline{CD} = x + y + z + t$
$\overline{AD} + \overline{BC} = x + t + y + z$

$\therefore\ \overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$

Observación: Enuncie usted el Teorema recíproco de éste.

245. EJERCICIOS

1) ¿Qué condición debe reunir un cuadrilátero para que se le pueda inscribir una circunferencia?
2) ¿Qué condición debe reunir un cuadrilátero para que se le pueda circunscribir una circunferencia?
3) ¿A qué cuadriláteros se les puede inscribir siempre una circunferencia?
4) ¿A qué cuadriláteros se les puede circunscribir siempre una circunferencia?
5) ¿A qué cuadriláteros se les puede a veces circunscribir una circunferencia?
6) ¿A qué cuadrilátero nunca se le puede circunscribir una circunferencia?
7) ¿A qué cuadrilátero nunca se le puede inscribir una circunferencia?

246. TEST DE VERDADERO O FALSO

Dentro del paréntesis que precede a cada pregunta coloque una »V« si la proposición es Verdadera o una »F« si es Falsa.

1) ( ) Dos círculos secantes tienen sólo dos puntos comunes.

2) ( ) Dos circunferencias de distinto radio pueden tener en común como mínimo 1 punto y como máximo 2 puntos.

3) ( ) Siempre se puede circunscribir una circunferencia a un trapecio isósceles.

4) ( ) Siempre es posible circunscribir una circunferencia a un romboide.

5) ( ) Nunca se puede circunscribir una circunferencia a un rombo.

6) ( ) Siempre se puede circunscribir una circunferencia a un trapezoide.

7) ( ) A veces se puede circunscribir una circunferencia a un trapecio.

8) ( ) A un triángulo se le puede inscribir y circunscribir simultáneamente una circunferencia.

9) ( ) A un cuadrado se le puede inscribir y circunscribir simultáneamente una circunferencia.

10) ( ) A un rectángulo se le puede inscribir y circunscribir una circunferencia.

11) ( ) A un trapezoide siempre se le puede inscribir una circunferencia.

12) ( ) Nunca es posible circunscribir un trapecio a una circunferencia.

13) ( ) A veces a un trapecio isósceles se le puede inscribir una circunferencia.

14) ( ) Siempre se puede inscribir una circunferencia a un rombo.

15) ( ) Nunca se puede inscribir una circunferencia a un rectángulo.

16) ( ) Siempre se puede circunscribir una circunferencia a un rectángulo.

17) ( ) Nunca se puede circunscribir una circunferencia a un deltoide.

18) ( ) Siempre se puede inscribir una circunferencia a un deltoide.

247. TEST DE »ALTERNATIVAS«

19) Se tienen dos círculos en los cuales la central es menor que la suma de los radios (Fig. III, N° 239). Entonces, los puntos comunes a ambos círculos son:

A) sólo uno; B) sólo dos;
C) sólo cuatro; D) muchos;
E) falta más información.

20) Se afirma que a dos circunferencias exteriores se les puede trazar sólo comunes:

A) una tangente; B) 2 tangentes;
C) 3 tangentes; D) 4 tangentes;
E) todas las que se desee.

21) Se afirma que a dos circunferencias que son tangentes exteriormente, las tangentes comunes que se les puede trazar son sólo:

A) 1; B) 2;
C) 3; D) 4;
E) muchas.

22) Se afirma que a dos circunferencias de distintos radio y que son secantes entre sí, las tangentes comunes que se les puede trazar son:

A) 1; B) 2;
C) 3; D) 4;
E) muchas.

23) Se afirma que a dos circunferencias que son tangentes interiormente, las tangentes comunes que se les puede trazar son solamente:

A) 1; B) 2;
C) 3; D) 0;
E) muchas.

24) El número máximo de tangentes comunes que se les puede trazar a dos circunferencias que se cortan ortogonalmente es:

A) 1; B) 2;
C) 3; D) 4;
E) ninguna.

25) Dos circunferencias de radios diferentes R y r, son tangentes. Entonces, se afirma que la distancia »d« entre sus centros (la »central«), mide:

I) $d = R + r$;
II) $d = R - r$;
III) d = cero.

De estas afirmaciones son verdaderas solamente:

A) I; B) II;
C) I y II; D) I y III;
E) las tres.

26) Dos circunferencias de radios diferentes, R y r, no se cortan. Entonces, se afirma que la distancia »d« entre sus centros mide:

I) $d > R + r$;

II) $d < R - r$;

III) $d = \text{cero}$.

De estas afirmaciones son verdaderas solamente:

A) I; B) II;

C) I y II; D) I y III;

E) las tres.

Resp.: 1 = F; 2 = V; 3 = V; 4 = F; 5 = V; 6 = F; 7 = V; 8 = V; 9 = V; 10 = F; 11 = F; 12 = F; 13 = V; 14 = V; 15 = V; 16 = V; 17 = V; 18 = V; 19 = D; 20 = D; 21 = C; 22 = B; 23 = A; 24 = B; 25 = C; 26 = E.

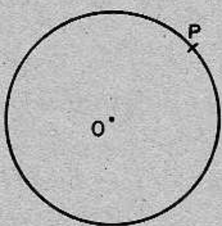
OPTATIVO

23ª UNIDAD

Lugares Geométricos (Tercera Parte). Ejercicios resueltos y por resolver.

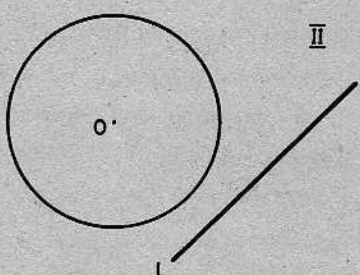
248. EJERCICIOS

1) Determinar el L.G. de los centros de todas las circunferencias que son tangentes a una circunferencia dada en un punto dado P de ella (Fig. I).



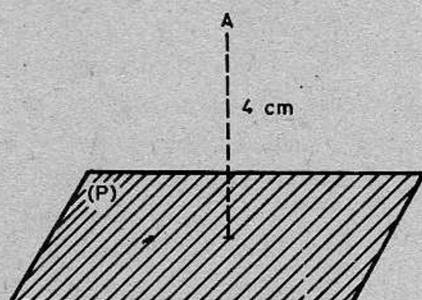
I

2) Dada una circunferencia O y una recta L, trazar las tangentes que tengan la misma dirección que la recta L (Fig. II).



II

3) Determinar y enunciar el L.G. de los centros de todas las circunferencias tangentes a dos rectas paralelas L' y L''.
4) Determinar y enunciar el L.G. de los centros de todas las circunferencias de radio dado »a« que son tangentes a una recta dada L.
5) Determinar y enunciar el L.G. del centro de todas las circunferencias que son tangentes a dos rectas L' y L'' que se cortan.
6) Determinar y enunciar el L.G. de los centros de todas las circunferencias tangentes a dos circunferencias concéntricas.
7) Se da una circunferencia de 5 cm de radio. Determinar y enunciar el L.G. de los centros de todas las circunferencias de 1,5 cm de radio y que son tangentes a la circunferencia dada.
8) Enunciar y determinar el L.G. de los puntos medios de todas las cuerdas iguales de un círculo.
9) Determinar y enunciar el L.G. de los centros de todas las circunferencias que pasan por dos puntos dados A y B.
10) Determinar y enunciar el L.G. de los centros de todas las circunferencias que tienen una cuerda común.
11) Se da una circunferencia de 101 cm de radio. Determinar y enunciar el L.G. de los centros de todas las circunferencias de 25 cm de radio que intercepte (determine) en la circunferencia dada cuerdas de 40 cm.
12) Se da una circunferencia de 4 cm. Determinar y enunciar el L.G. de todos los puntos desde los cuales se pueden trazar tangentes de 3 cm.
13) Se da un plano (P) y un punto A situado a 4 cm del plano. Determinar y enunciar el L.G. de todos los puntos del plano que están a 5 cm del punto A (Fig. III).



III

14) Dos puntos A y B del espacio están a 10 cm entre sí. El L.G. de los puntos que están a 10 cm de A y B es:
A) dos esferas de 5 cm de radio con centros en A y B;

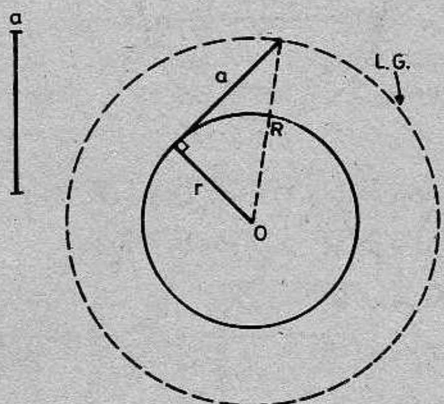
B) una esfera de 10 cm de radio y con centro en A o en B;

C) una circunferencia situada en el plano equidistante de A y B que tiene por radio $5\sqrt{3}$ cm y su centro coincide con el punto medio de AB;

D) es una esfera de radio $5\sqrt{3}$ cm y de centro en la mitad de AB;

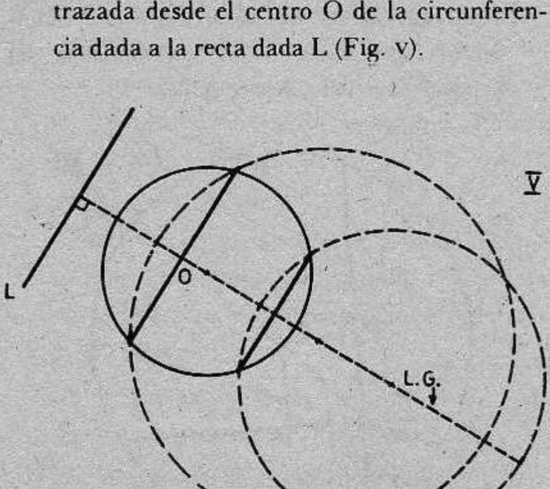
E) falta más información.

15) *L.G. N° 15.* »El L.G. de los centros de todas las circunferencias de radio dado »a« que cortan ortogonalmente a una circunferencia dada de radio »r«, es la circunferencia concéntrica con la dada y que tiene por radio a la hipotenusa R del triángulo rectángulo de catetos »a« y »r« (Fig. IV).

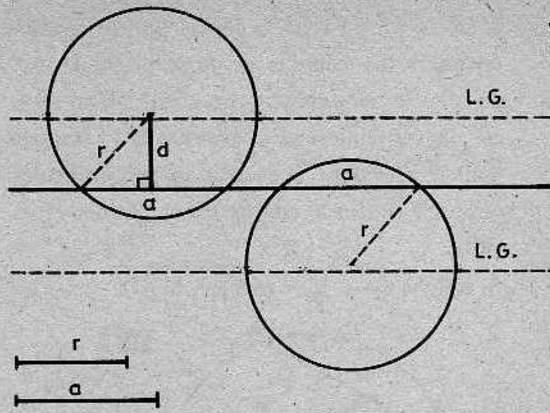


IV

16) *L.G. N° 16.* El L.G. de los centros de todas las circunferencias que cortan a una circunferencia dada O según una cuerda paralela a una dirección dada L, es la perpendicular trazada desde el centro O de la circunferencia dada a la recta dada L (Fig. V).



V



VI

17) *L.G. N° 17.* El L.G. de los centros de todas las circunferencias de radio dado »r« que cortan a una recta dada L según un trazo de magnitud dada »a«, se compone de las dos paralelas trazadas a la distancia

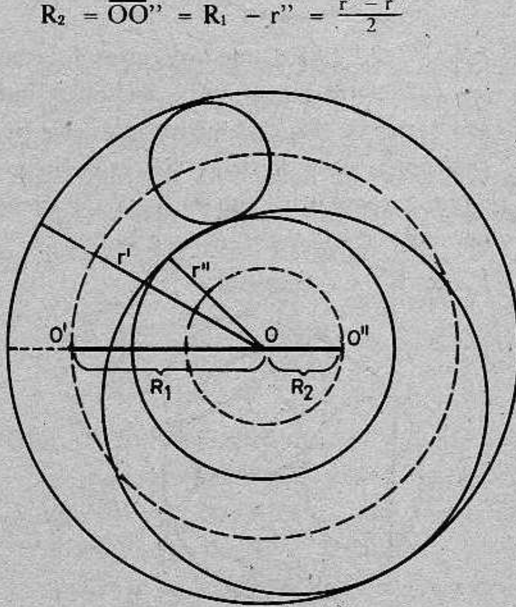
$d = \sqrt{r^2 - (a/2)^2}$ de L (Fig. VI).

(d = cateto de un $\triangle$ rectángulo de hipotenusa »r« y el otro cateto $\frac{a}{2}$; o bien, d = altura del $\triangle$ isósceles de base »a« y lados »r«).

18) *L.G. N° 18.* El L.G. de los centros de todas las circunferencias tangentes a dos circunferencias concéntricas dadas de radios r' y r'', se compone de dos circunferencias concéntricas con las dadas y que tienen por radios la semisuma y la semidiferencia de los radios dados (Fig. VII).

O sea: $R_1 = \overline{OO'} = r' - \frac{r' - r''}{2} = \frac{r' + r''}{2}$

$R_2 = \overline{OO''} = R_1 - r'' = \frac{r' - r''}{2}$

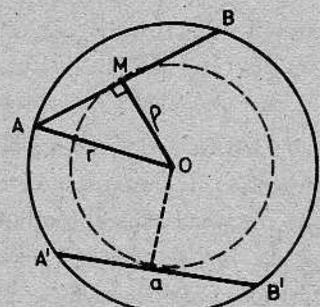


VII

19) *L.G. N° 19.* El L.G. de los puntos medios de todas las cuerdas de longitud dada »a« de una circunferencia de radio dado »r«, es la circunferencia concéntrica con la dada y que tiene por radio la perpendicular desde el centro a una de estas cuerdas (Fig. VIII).

Si $\overline{AB} = a \Rightarrow \rho = \sqrt{r^2 - (a/2)^2}$

VIII



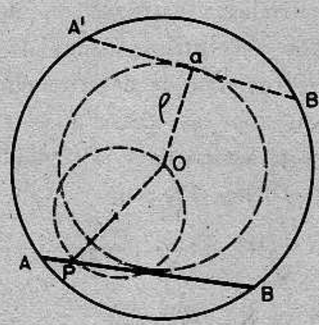
20) Problema: Dentro de un círculo dado se da un punto P. Trazar por P una cuerda de longitud dada »a« (Fig. IX).

Solución: 1) la ⊙ (O, ρ).

2) la tangente desde P determina $\overline{AB}$.

Discuta este problema.

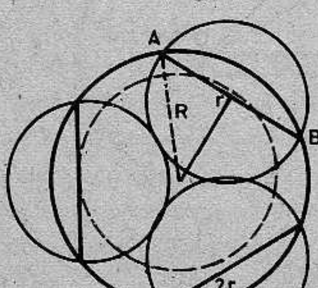
IX



21) *L.G. N° 20.* El L G. de los centros de todas las circunferencias de radio dado »r« que son cortadas »bajo diámetro« por una circunferencia dada de radio »R«, es la circunferencia concéntrica con la dada que tiene por radio

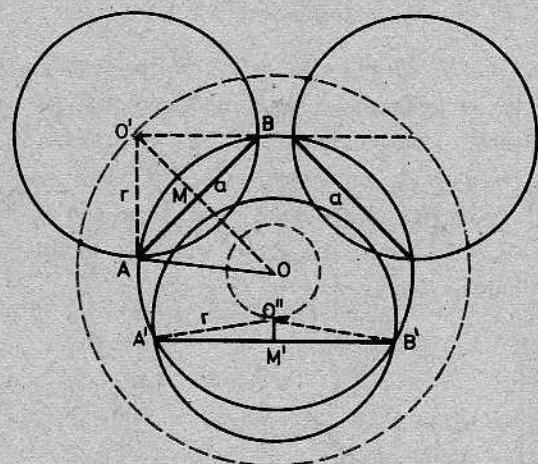
$\rho = \sqrt{R^2 - r^2}$ (Fig. x).

X



22) *L.G. N° 21.* El L.G. del centro de todas las circunferencias de radio dado »r« que al cortar a una circunferencia dada R determinan una cuerda de longitud dada »a«, se compone de dos circunferencias concéntricas con la dada de radios $\overline{OO'}$ y $\overline{OO''}$, respectivamente. Calcularemos estos radios (Fig. XI):

XI



se tiene $\overline{AB} = a$, $\overline{OA} = R$, $\overline{O'A} = \overline{O''A'} = r$

$$\overline{O'M} = \overline{O''M'} = \sqrt{r^2 - (a/2)^2}$$

$$\overline{OM} = \sqrt{R^2 - (a/2)^2}$$

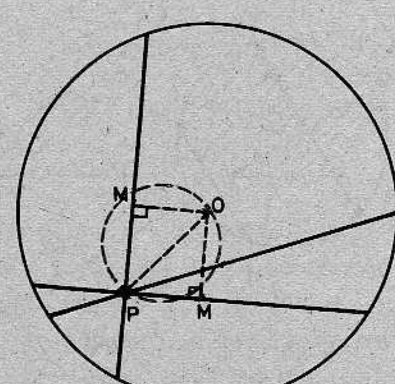
$$\overline{OO'} = \sqrt{R^2 - (a/2)^2} + \sqrt{r^2 - (a/2)^2}$$

luego:

$$\overline{OO''} = \sqrt{r^2 - (a/2)^2} - \sqrt{r^2 - (a/2)^2}$$

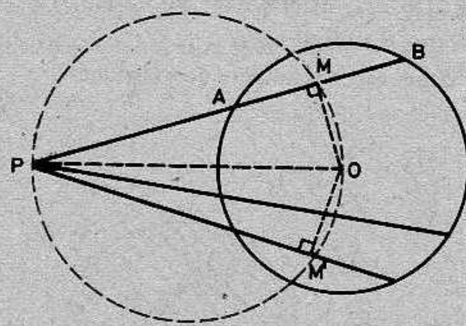
23) *L.G. N° 22.* El L.G. de los puntos medios de todas las cuerdas que pasan por un punto P situado dentro de un círculo es la circunferencia de diámetro $\overline{OP}$ (la distancia del punto P al centro O) (Fig. XII).

XII



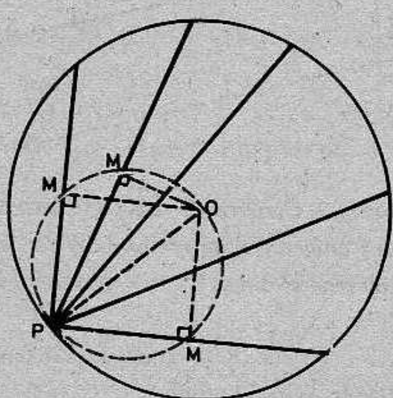
24) *L.G. N° 23.* El L.G. de los puntos medios de todas las cuerdas que pasan por un punto P situado fuera del círculo, es la circunferencia que tiene por diámetro la distancia del punto al centro del círculo (Fig. XIII).

XIII



25) *L.G. N° 24.* El L.G. de los puntos medios de todas las cuerdas que parten de un mismo punto P situado sobre la circunferencia, es la circunferencia que tiene por diámetro el radio de la circunferencia dada, es decir: diámetro $\overline{OP}$ (Fig. XIV).

XIV



26) *L.G. N° 25.* El L.G. de todos los puntos cuyas distancias a dos rectas dadas concurrentes tienen una suma o una diferencia dada, se compone de cuatro rectas que forman un rectángulo.

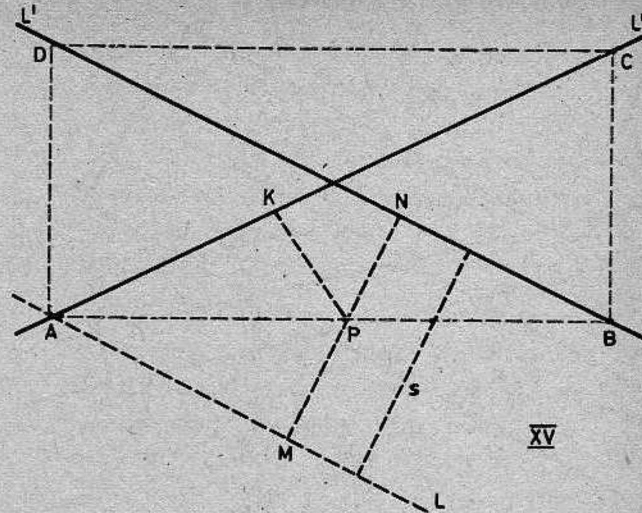
1er caso: se da la suma »s«.

1) se traza la paralela a la distancia »s« a una de las rectas, por ejemplo, a L'. Esta paralela determina el punto A en la otra recta L'' (Fig. XV).

2) Se trazan las bisectrices del $\measuredangle$ L'' AL (formado por la paralela y la recta L'').

3) Se completa el rectángulo ABCD.

Al tomar un punto P cualquiera de este rec-



XV

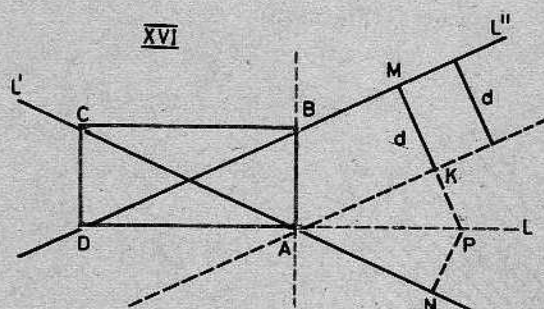
tángulo y trazar las perpendiculares a L' y a L'' se obtiene:

$$\overline{PM} = \overline{PK} \text{ pues } P \in \text{bisectriz del } \measuredangle(L, L'')$$
$$\overline{PM} + \overline{PN} = s$$
$$\therefore\ \overline{PK} + \overline{PN} = s$$

2° caso: se da la diferencia »d«.

1) Se traza la paralela a la distancia »d« de L'' (o de L') (Fig. XVI).

XVI



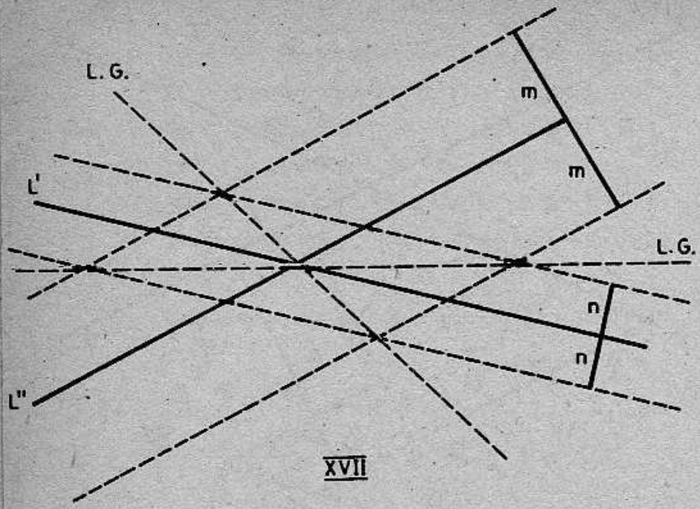
2) Se completa el rectángulo ABCD, habiendo trazado la bisectriz L.

3) Se toma un punto P cualquiera en la prolongación de uno de los lados del rectángulo ABCD y se trazan las perpendiculares a L' y L'' desde P. Resulta:

$$\overline{PN} = \overline{PK} \text{ pues } P \in \text{bisectriz del } \measuredangle(L, L')$$
$$\text{pero } \overline{PM} - \overline{PK} = \overline{MK} = d$$
$$\text{luego: } \overline{PM} - \overline{PN} = d$$

27) *L.G. N° 26.* Determinar el L.G. de todos los puntos cuyas distancias a dos rectas concurrentes dadas estén en una razón dada m : n (Fig. XVII).

Solución: 1) Se trazan las paralelas a la dis-



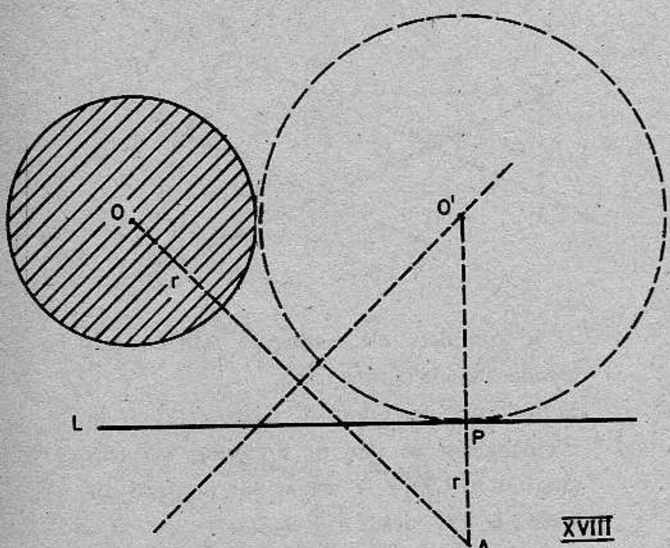
XVII

tancia »m« de una de las rectas y a la distancia »n« de la otra.

2) Se une el vértice del ángulo que forman las rectas con los puntos de intersección de estas paralelas. Estas rectas son el L.G. pedido.

(Demuéstrelo usted).

28) *Problema:* Construir una circunferencia tangente a una recta dada L en un punto P de ella y, a su vez, tangente a una circunferencia dada O (Fig. XVIII).



XVIII

Solución: 1) la perpendicular en P;

2) se copia r = $\overline{PA}$

3) simetral de $\overline{OA}$ determina el centro O';

4) la circunferencia pedida es ⊙ (O' $\overline{PO'}$).

29) *Problema:* Construir una circunferencia de radio dado »r« que sea tangente a una circunferencia dada de radio »R« y a una recta dada L (Fig. XIX).

Solución: 1) Se suman los radios: R + r;

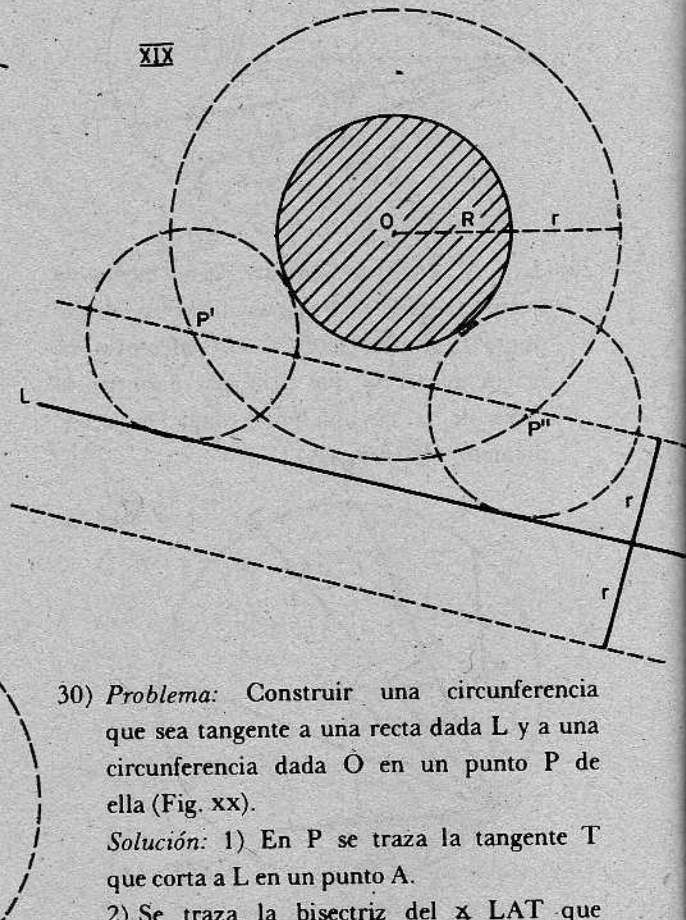
2) Se dibuja la ⊙ de radio R + r;

3) Se trazan las paralelas a la distancia »r« de L.

La intersección de estas paralelas con la ⊙ (R + r) determinan los puntos P' y P'' que son los pedidos.

Discuta sobre el número de soluciones.

XIX

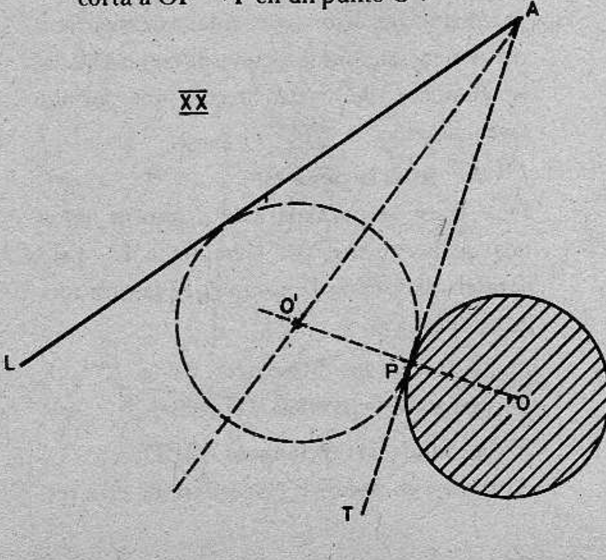


30) *Problema:* Construir una circunferencia que sea tangente a una recta dada L y a una circunferencia dada O en un punto P de ella (Fig. XX).

Solución: 1) En P se traza la tangente T que corta a L en un punto A.

2) Se traza la bisectriz del ∡ LAT que corta a $\overline{OP} \longrightarrow$ P en un punto O'.

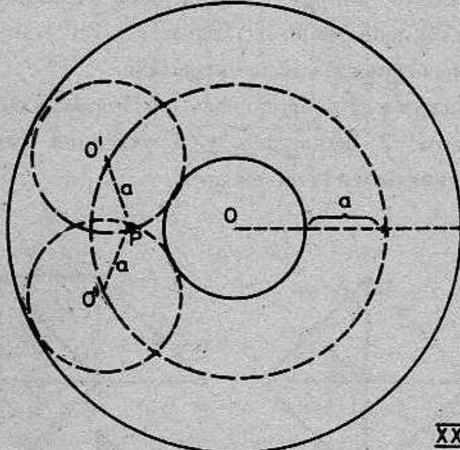
XX



3) la ⊙ (O', $\overline{PO'}$) es la circunferencia pedida.

¡Haga usted la discusión!

31) *Problema:* Construir una circunferencia que sea tangente a dos circunferencias concéntricas dadas y que pase por un punto P situado entre ellas (Fig. XXI).



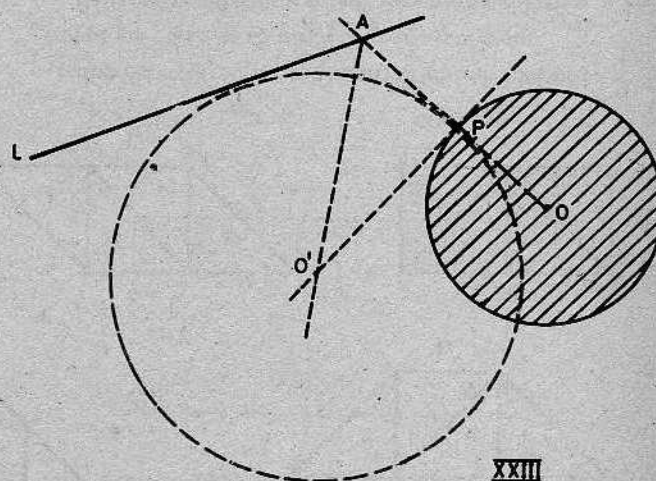
XXI

Solución: 1) Se dibuja la circunferencia equidistante de las dos dadas.
2) El arco de la ⊙ (P, a) determina los centros de las circunferencias pedidas.

32) *Problema:* Construir una circunferencia tangente a dos circunferencias concéntricas dadas y a otra circunferencia O' también dada (Fig. XXII).

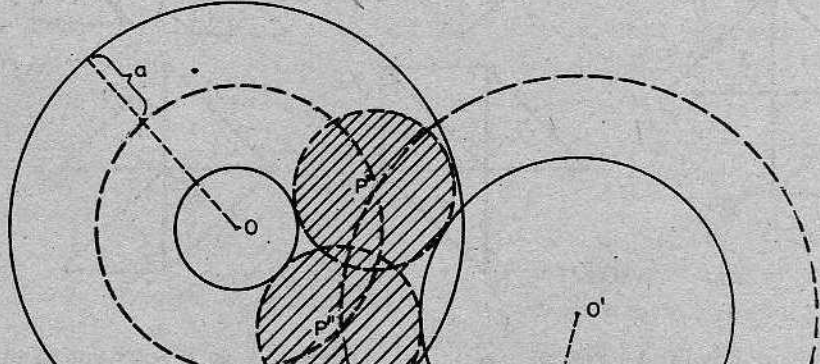
Solución: 1) Se dibuja la circunferencia media (equidistante) concéntrica con las O.
2) Se dibuja la ⊙ (O', R + a) concéntrica con O'. La intersección de esta circunferencia con la circunferencia equidistante, determina los centros P' y P'' de las circunferencias pedidas.

33) *Problema:* Construir una circunferencia tangente a una recta dada L y que corte a una circunferencia dada ortogonalmente en un punto P dado de ella (Fig. XXIII).



XXIII

Solución: 1) La prolongación de $\overline{OP}$ determina A.
2) La bisectriz del ∡ LAP y la tangente en P determinan O' que es el centro de la circunferencia pedida de radio $\overline{O'P}$.



XXII

24ª UNIDAD

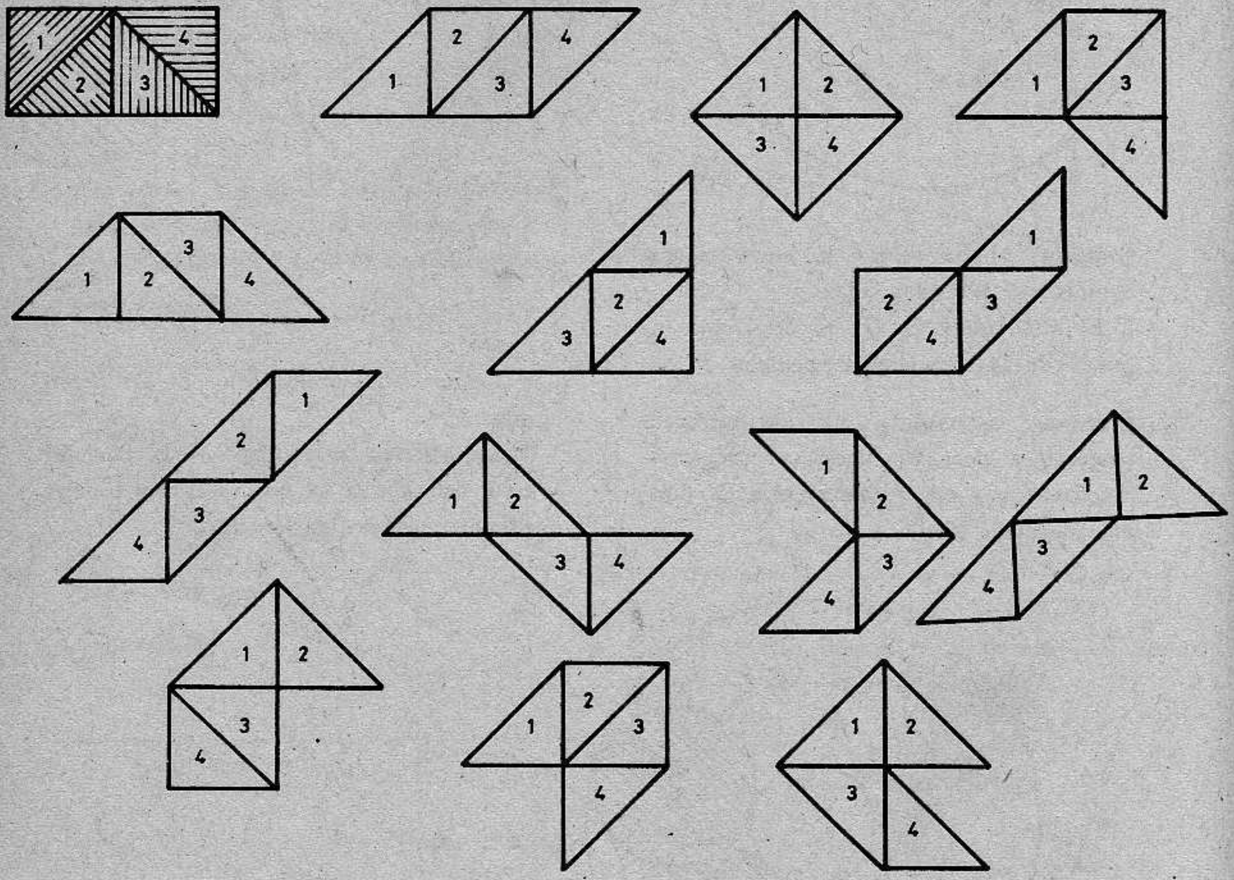
Figuras equivalentes. Equivalencias entre paralelogramos, triángulos y trapecios. Proyecciones de un trazo sobre una recta o eje. Teoremas de Euclides. Teorema particular de Pitágoras. Cálculo de áreas.

249. FIGURAS EQUIVALENTES

Si se dispone de cuatro triángulos isósceles rectángulos congruentes que designaremos con los números, 1, 2, 3 y 4, se pueden agrupar en 14 diferentes formas, pero en todas ellas los diferentes polígonos formados tienen *la misma área.*

Superficie de una figura es la parte del plano limitada por el perímetro de ella. Así, una superficie puede ser triangular si está limitada su región interior por un triángulo; será rectangular si está limitada por un rectángulo, etc. En cambio, el *área* es la medida de una superficie.

En estos 14 polígonos hay 1 triángulo, 5 cuadriláteros, 2 pentágonos y 6 exágonos, pero *todos* ellos tienen la misma área.



Definición: »Figuras equivalentes« son las que tienen la misma área y distinta forma.

Esto significa que un triángulo puede ser equivalente a un paralelogramo, un cuadrado a un círculo, etc., siempre que tengan la misma área.

Como »unidad« de área se elige el área de un cuadrado de *lado unidad* (1 cm, 1 mm, 1 m, 1 pulg, etc.) y de acuerdo con la unidad elegida se mide la superficie de la figura.

Ahora, la medición se hará de acuerdo con la forma de la figura. Si ésta tiene forma geométrica bien determinada como cuadrado, rectángulo, trapecio, etc., se aplicará la fórmula geométrica correspondiente. Si la figura tiene forma irregular se puede proceder de varios métodos que veremos a continuación.

Tomando un cuadrado de lado unitario »u« su área es u^2 la que será la »unidad de área« (Fig. 1). Así obtendremos que:

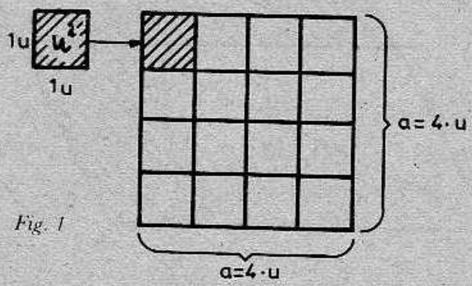


Fig. 1

A) El área de un cuadrado es igual al cuadrado de su lado. Si su lado mide $4 \cdot u$ su área será $16\ u^2$ (Fig. 1). En general, si el lado mide »a« el área del cuadrado es: $\boxed{A = a^2}$

B) »El área de un rectángulo es igual al producto de sus dos lados distintos« (comúnmente se dice: »largo por ancho«) (Fig. 2).

$\boxed{\text{Area} = a \cdot b}$

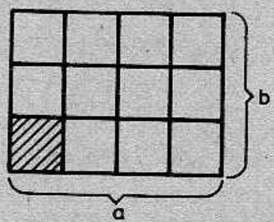


Fig. 2

C) Corolario de B: »El área de un triángulo rectángulo es igual al semiproducto de sus catetos«. En efecto, al trazar la diagonal de un rectángulo se forman dos triángulos rectángulos. Como el área del rectángulo es »ab«, el de cada △ rectángulo será la mitad de ab, es decir (Fig. 3):

$\boxed{\text{Area} = \frac{1}{2} \cdot ab}$

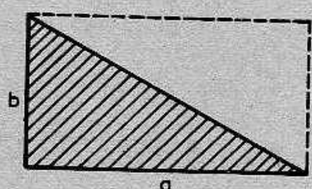


Fig. 3

250. TEOREMA LXXIX

»Dos paralelogramos son equivalentes cuando tienen la misma base y la misma altura«.

H.) Los # ABCD y ABEF tienen la misma base $\overline{AB}$ y la misma altura »h« (Fig. 4).

T.) # ABCD = # ABEF

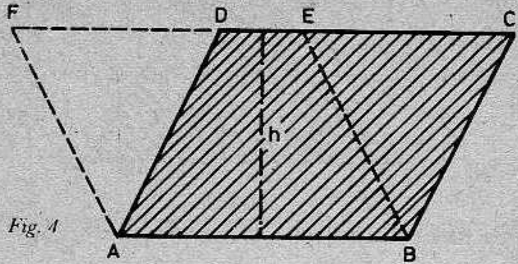


Fig. 4

D.) # ABCD = trapecio ABED + △ CEB

ABEF = trapecio ABED + △ DFA

pero: △ CEB ≅ △ DFA (por 1° Teor. de ≅)

∴ # ABCD = # ABEF

Problema: Transformar un romboide en un rectángulo.

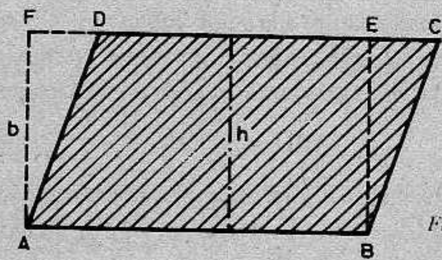


Fig. 5

Solución: Siendo ABCD el romboide (Fig. 5) basta trazar la perpendicular en A y en B hasta cortar el lado opuesto. Resulta el rectángulo ABEF equivalente al romboide ABCD por tener igual base $\overline{AB}$ e igual altura »h«.

251. COROLARIO

Sabemos que el área del rectángulo ABEF es $a \cdot b$; pero como $b = h$ se obtiene $a \cdot h$. Por lo tanto: »el área de un paralelogramo es igual al producto de la base por la altura« (Fig. 5).

$\boxed{\text{Area del \# } = a \cdot h}$

252. TEOREMA LXXX

Un triángulo es equivalente a la mitad del paralelogramo que tiene la misma base y la misma altura«.

H.) El # ABCD y el △ ABE tienen la misma base $\overline{AB}$ y la misma altura »h« (Fig. 6).

T.) △ ABE $= \frac{1}{2}$ # ABCD

D.) Se completa el # ABEF que es equivalente al # ABCD (Teor. LXXIX).

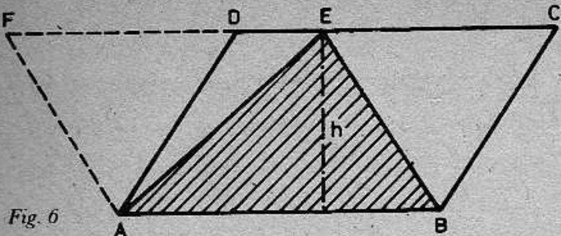


Fig. 6

Pero la diagonal $\overline{AE}$ divide al # ABEF en dos triángulos congruentes. Luego:

$$\triangle \text{ ABE } = \frac{1}{2} \text{ \# ABEF}$$

$$\text{pero } \underline{\text{\# ABCD } = \text{ \# ABEF}}$$

$$\therefore \triangle \text{ ABE } = \frac{1}{2} \text{ \# ABCD}$$

253. COROLARIOS

1) »Los triángulos que tienen la misma base y la misma altura son equivalentes«.

2) Sabemos que el área del paralelogramo es a·h; por lo tanto, el área del triángulo

$$\text{ABE } = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$$

Como cualquier lado de un triángulo puede ser la base, se obtiene que: »el área de un triángulo es igual al semiproducto de un lado por la altura correspondiente al lado« (comúnmente se dice: »base por altura partido por dos«).

Por lo tanto:

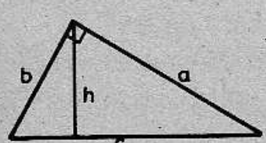
$$\boxed{\text{área del } \triangle \ = \frac{1}{2}\, c \cdot h_c = \frac{1}{2}\, a \cdot h_a = \frac{1}{2}\, b \cdot h_b}$$

(Fig. 2 del N° 61).

3) De lo anterior se obtiene nuevamente que: »El área de un triángulo rectángulo es igual al semiproducto de sus catetos« como, asimismo, »es al igual semiproducto de la hipotenusa por la altura«. O sea (Fig. 7):

$$\boxed{\triangle \text{ rectángulo } = \frac{1}{2}\, c \cdot h = \frac{1}{2}\, a \cdot b}$$

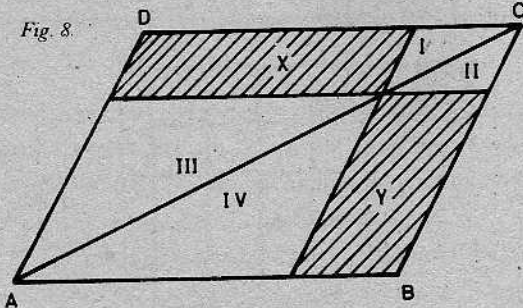
Fig. 7



254. PARALELOGRAMOS COMPLEMENTARIOS

Cuando por un punto de la diagonal de un paralelogramo se trazan las paralelas a los lados se forman varios paralelogramos (¿cuántos?) de los cuales sólo dos no son cortados por la diagonal. En la fig. 8 son los # X e Y que se llaman *paralelogramos complementarios.*

Fig. 8



255. TEOREMA LXXXI

»Los paralelogramos complementarios son equivalentes«.

H.) # X ∧ # Y son complementarios (Fig. 8).

T.) # X = # Y

D.) Se tiene:

$$\triangle \text{ ACB} \cong \triangle \text{ CAD}$$
$$\triangle \text{ I} \cong \triangle \text{ II}$$
$$\underline{\triangle \text{ III} \cong \triangle \text{ IV}}$$
$$\text{\# X} = \triangle \text{ CAD} - \triangle \text{ I} - \triangle \text{ III}$$
$$\underline{\text{\# Y} = \triangle \text{ ACB} - \triangle \text{ II} - \triangle \text{ IV}}$$
$$\therefore \text{\# X} = \text{\# Y}$$

TEOREMA LXXXII

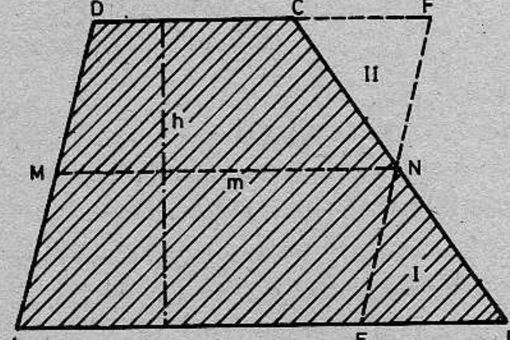
»Un trapecio es equivalente a un paralelogramo que tiene la misma altura y por base la mediana del trapecio«.

H.) $\overline{MN}$ = m es la mediana del trapecio ABCD (Fig. 9).

$\overline{AE}$ = m es la base del # AEFD;

h = altura del trapecio y del paralelogramo.

Fig. 9



T.) trapecio ABCD = # AEFD

D.) trap. ABCD = pentágono AENCD + △ I
AEFD = pentágono AENCD + △ II
pero △ I ≅ △ II (por 1° Teo. ≅)
∴ trapecio ABCD = # AEFD

257. COROLARIO

1) El área del # AEFD es $\overline{AE} \cdot h = m \cdot h$ que es también el área del trapecio ABCD. Luego: »el área de un trapecio es igual al producto de la mediana por la altura«. Es decir:

$$\boxed{\text{área trapecio} = m \cdot h}$$

2) Pero, por Teorema XLIX, se tiene: $m = \frac{a+c}{2}$ con lo que se obtiene:

$$\boxed{\text{área del trapecio} = \frac{a+c}{2} \cdot h}$$

Luego: »el área de un trapecio es igual a la semisuma de las bases por la altura«.

258. PROYECCIONES DE UN TRAZO SOBRE UNA RECTA O EJE (Fig. 10)

Para determinar las proyecciones de un trazo sobre una recta ó eje L se trazan las perpendiculares desde los extremos del trazo a la recta o eje. Estas perpendiculares se llaman *rectas proyectantes* y la distancia entre los pies de estas perpendiculares es la *proyección del trazo* en la recta o eje de proyección.

Se pueden presentar diferentes casos (Fig. 10-11).

La proyección de un punto P es el punto P' sobre la recta.

En I la proyección del trazo $\overline{AB}$ sobre L es $\overline{A'B'}$ y es de menor magnitud que el trazo.

En II un extremo del trazo está sobre el eje L y, por lo tanto, la recta proyectante de C vale cero y la proyección de $\overline{CD}$ es $\overline{CD'}$.

En III la proyección de EF es E'F' y ésta corta al eje.

En IV la proyección de $\overline{HG}$ es G'H pues la recta proyectante de H es nula.

En V el trazo $\overline{KL}$ es paralelo a L y la proyección $\overline{K'L'}$ es de igual magnitud que el trazo $\overline{KL}$.

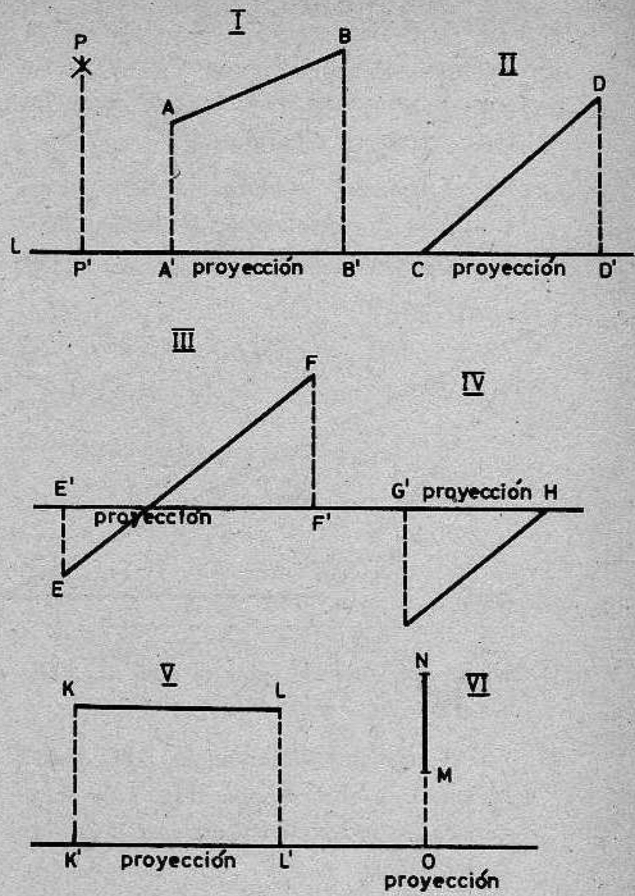


Fig. 10-11

En VI el trazo $\overline{MN}$ es perpendicular al eje L y su proyección es un punto O.

259. PROYECCIONES DE LOS CATETOS DE UN TRIANGULO RECTANGULO EN LA HIPOTENUSA

Para determinar las proyecciones de los catetos »a« y »b« en la hipotenusa $\overline{AB}$, basta trazar la altura $\overline{CD} = h$ que es la recta proyectante en este caso. Las proyecciones son (Fig. 12):

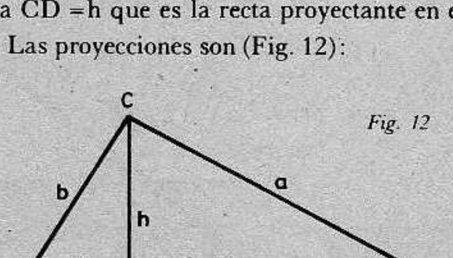


Fig. 12

$p = \overline{DB}$ es la proyección del cateto »a« sobre la hipotenusa $\overline{AB} = c$

$q = \overline{DA}$ es la proyección del cateto »b« sobre la hipotenusa $\overline{AB} = c$.

260. EJERCICIOS

1) Determinar las proyecciones de la altura »h« de un triángulo rectángulo sobre los catetos y sobre la hipotenusa.

2) En el triángulo obtusángulo ABC determinar las proyecciones de los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ en el lado $\overline{AB}$ (Fig. 13).

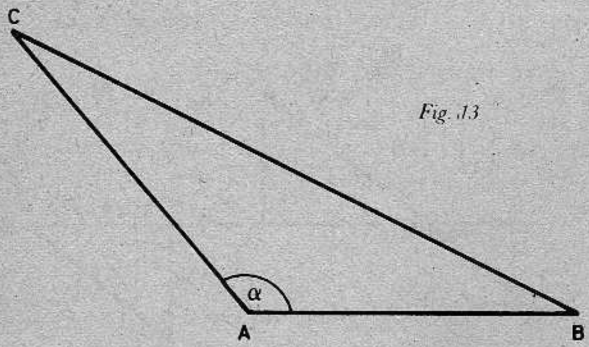


Fig. 13

3) Idem., del lado $\overline{AB}$ sobre el lado $\overline{BC}$ y sobre el lado $\overline{AC}$.

4) En el triángulo obtusángulo ABC trazar la altura h_c. En seguida (Fig. 13), determinar las proyecciones de esta altura en los tres lados.

5) En un triángulo rectángulo, ¿cuál es la proyección de la hipotenusa sobre uno de los catetos?

6) Consideremos dos paredes de una sala de clases y el piso de ella. Cada una es un plano que, para ubicarnos mejor, les llamaremos:

(P.V.) = plano vertical

(P.H.) = plano horizontal

(P.P.) = plano de perfil.

Entre estos tres planos un profesor de gimnasia enseña la manera correcta y la incorrecta de lanzar la jabalina $\overline{AB}$. El profesor de Matemática aprovecha esta lección para dar a sus alumnos la siguiente »tarea« (Fig. 14).

Determinar la proyección de la jabalina:

a) cuando la jabalina está situada oblicuamente a estos tres planos;

b) cuando la jabalina está situada al mismo tiempo paralela al plano (P.H.) y al plano (P.V.);

c) cuando la jabalina está situada perpendicular al plano horizontal (P.H.) y tiene su extremo A en este plano;

d) cuando la jabalina está situada paralela al plano horizontal (P.H.) y oblicua a los otros dos.

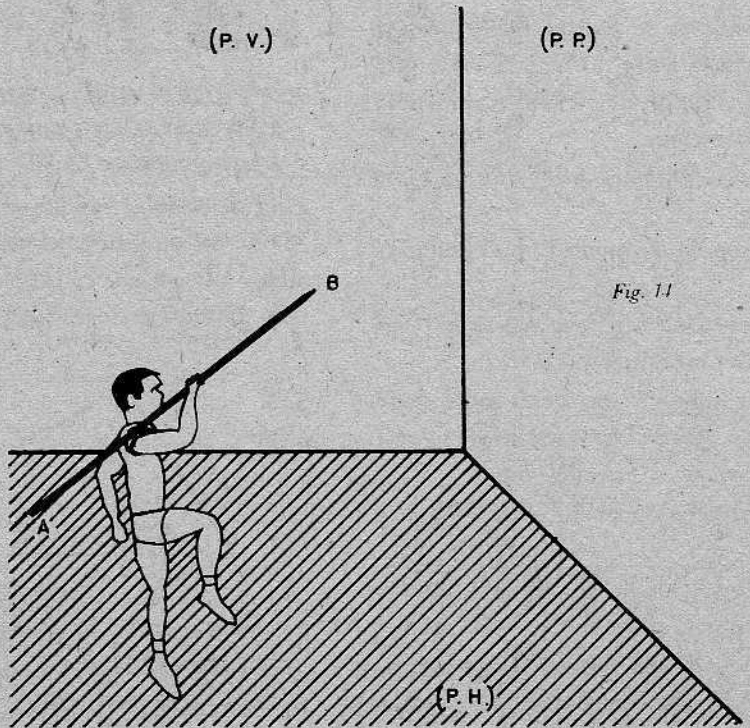


Fig. 14

261. *PROYECCION ORTOGONAL DE UNA POLIGONAL SOBRE UN EJE*

Se entiende por esta proyección a la distancia comprendida entre los pies de las perpendiculares trazadas en los *extremos* de la poligonal (Figs. 15 y 16).

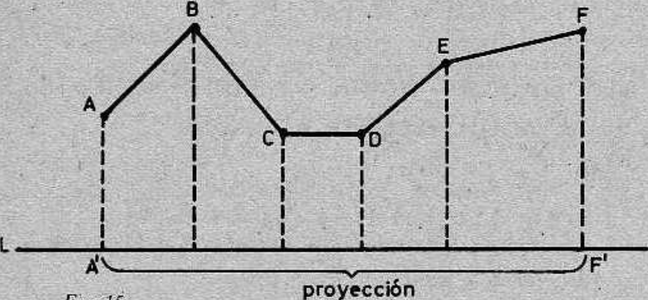


Fig. 15

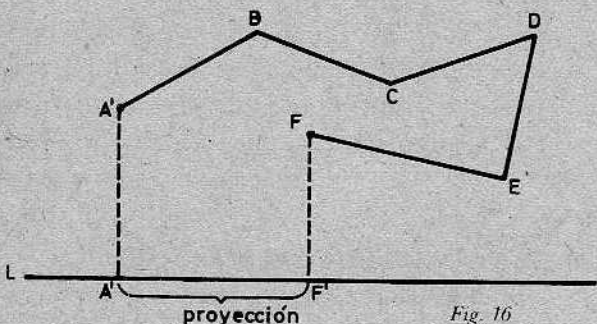


Fig. 16

262. *PRIMER TEOREMA DE EUCLIDES*

»En un triángulo rectángulo el cuadrado construido sobre un cateto es equivalente al rectángulo que tiene por lados a la hipotenusa y a la proyección del cateto en ella«.

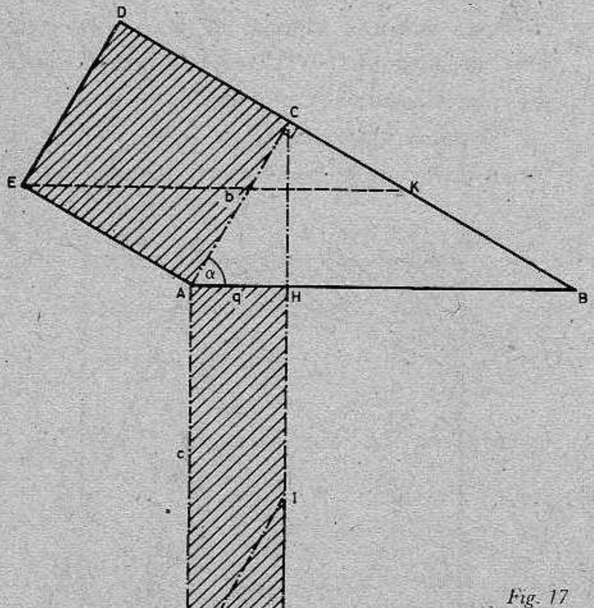


Fig. 17

H.) Se forma el cuadrado ACDE de lados el cateto $\overline{AC} = b$ y el rectángulo de lados la hipotenusa $\overline{AF} = \overline{AB} = c$ y la proyección $\overline{AH} = q$ del cateto $\overline{AC}$ sobre la hipotenusa $\overline{AB} = c$ (Fig. 17).

T.) $\square$ ACDE $=$ ▭ AFGH

D.) Se traza por E // $\overline{AB}$ y por F // $\overline{AC}$. Resulta:

$$\# ABKE \cong \# AFIC \text{ pues } \begin{cases} \overline{AB} = \overline{AF} = c \\ \overline{AE} = \overline{AC} = b \\ \sphericalangle EAB = \sphericalangle CAF \\ \qquad = 90^\circ + \alpha \end{cases}$$

Pero, por Teor. LXXIX, se tiene:

$\square$ ACDE $=$ # EABK (igual base $\overline{EA}$ e igual altura $\overline{AC}$)

▭ AFGH $=$ # AFIC (igual base $\overline{AF}$ e igual altura $\overline{AH}$)

luego: $\square$ ACDE $=$ ▭ AFGH

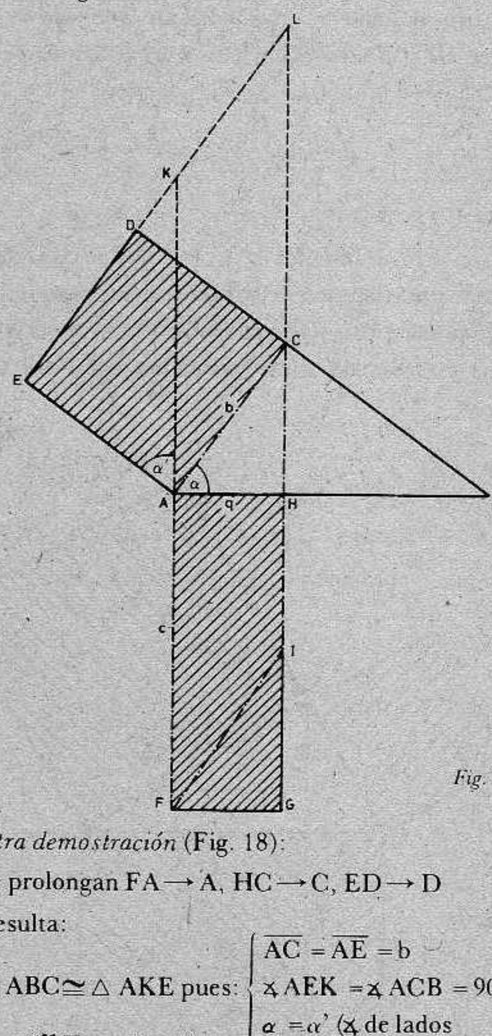


Fig. 18

Otra demostración (Fig. 18):

Se prolongan FA → A, HC → C, ED → D

Resulta:

$$\triangle ABC \cong \triangle AKE \text{ pues: } \begin{cases} \overline{AC} = \overline{AE} = b \\ \sphericalangle AEK = \sphericalangle ACB = 90^\circ \\ \alpha = \alpha' \text{ (}\sphericalangle\text{ de lados perpendiculares)} \end{cases}$$

(por 1er Teor. de $\cong$)

luego: $\overline{AK} = \overline{AB} = c$

Al trazar por $F // \overline{AC}$ se determina I, obteniéndose:

$\# \ AFIC = \# \ KACL$ (igual base $\overline{AF} = \overline{AK} = c$, igual altura $\overline{AH} = q$)

Entonces:

$$\square \ ACDE = \# \ LKAC \quad (\text{igual base } \overline{AC} = b, \text{ igual altura } \overline{CD})$$

$$▭ \ AFGH = \# \ AFIC \quad (\text{igual base } \overline{AF} = c, \text{ igual altura } \overline{AH})$$

Luego: $\square \ ACDE = ▭ \ AFGH$

o bien: $\boxed{b^2 = c \cdot q}$

En forma análoga se demuestra que:

$$\boxed{a^2 = c \cdot p}$$

Existen otras demostraciones de este histórico teorema y más adelante volveremos sobre él, con otro enunciado y otra demostración. (N° 309 y N° 320).

263. TEOREMA PARTICULAR DE PITAGORAS

»En un triángulo rectángulo el cuadrado construido sobre la hipotenusa es equivalente a la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos«.

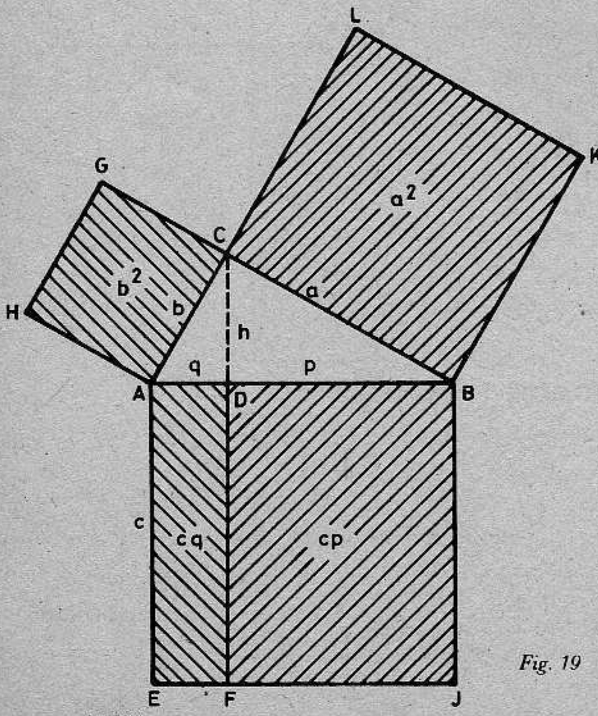


Fig. 19

T.) $\square \ AEJB = \square \ CBKL + \square \ ACGH$

o bien: $\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$

D.) Por el 1er Teor. de Euclides se tiene: (Fig. 19).

$$\left.\begin{array}{l} \square \ ACGH = ▭ \ AEFD \\ \square \ CBKL = ▭ \ DFJB \end{array}\right\} +$$

$$\square \ ACGH + \square \ CBKL = ▭ \ AEFD + ▭ \ DFJB$$

$$\square \ ACGH + \square \ CBKL = \square \ AEJB$$

$$\therefore \ b^2 + a^2 = c^2$$

Otra demostración: Por el 1er Teor. de Euclides, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = c \cdot p \\ b^2 = c \cdot q \end{array}\right\} +$$

$$a^2 + b^2 = c \cdot (p + q)$$

$$\therefore \ a^2 + b^2 = c^2 \quad \text{puesto que } p + q = c$$

264. COROLARIO DE PITAGORAS

»El cuadrado de un cateto es equivalente al cuadrado de la hipotenusa *menos* el cuadrado del otro cateto«.

Es decir:

$$\boxed{a^2 = c^2 - b^2; \quad b^2 = c^2 - a^2}$$

Observación: El histórico y fundamental Teorema de Pitágoras puede demostrarse de muchísimas maneras, algunas de las cuales veremos más adelante (N° 319). A continuación daremos una demostración muy sencilla.

Se toma un cuadrado de lado $(a + b)$ y se forma dentro de él los cuatro triángulos rectán-

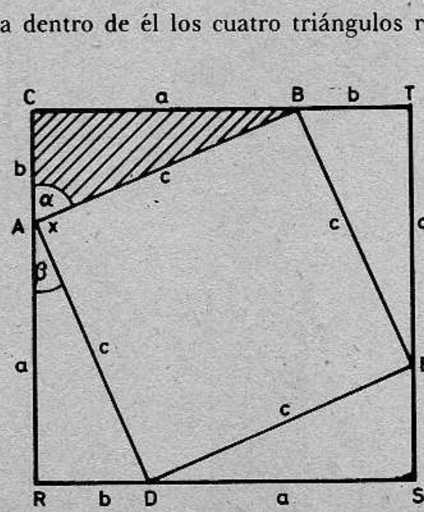


Fig. 20

gulos congruentes entre sí. Uno de ellos es el △ ABC de catetos a, b y de hipotenusa c.

En A tenemos que $\alpha + \beta + x = 180^\circ$ pero como $\alpha + \beta = 90^\circ$, resulta: $x = 90^\circ$. Por lo tanto, ADEB es un cuadrado de lado »c« construido sobre la hipotenusa del △ ABC (Fig. 20).

Entonces:

$$\square ADEB = \square RSTC - 4 \cdot \triangle ABC$$

$$c^2 = (a+b)^2 - 4 \cdot \frac{ab}{2}$$

$$c^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 2ab$$

luego: $\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$

265. SEGUNDO TEOREMA DE EUCLIDES

»En un triángulo rectángulo el cuadrado construido sobre la altura es equivalente al rectángulo que tiene por lados las dos proyecciones de los catetos en la hipotenusa«.

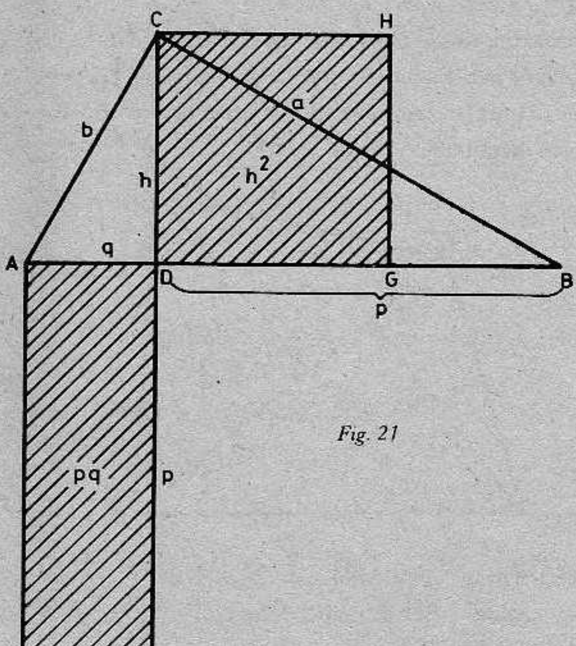


Fig. 21

H.) □ DGHC tiene por lado la altura $\overline{CD} = h$ (Fig. 21).

▭AEFD tiene por lados las proyecciones $\overline{AD} = q$, $\overline{DF} = \overline{DB} = p$

T.) □DGHC = ▭AEFD

o bien: $\boxed{h^2 = p \cdot q}$

D.) Por el corolario de Pitágoras, se tiene:

1) $h^2 = b^2 - q^2$ pero por el 1er Teor. de Euclides, se tiene:

2) $b^2 = (p+q) \cdot q$.

Al sustituir 2) en 1) resulta:

$$h^2 = (p+q) \cdot q - q^2$$

$$h^2 = pq + q^2 - q^2$$

Luego: $\boxed{h^2 = pq}$

Otra demostración: se aplica el Teor. de Pitágoras a los △ ADC y CDB, resultando (Fig. 21):

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= h^2 + p^2 \\ b^2 &= h^2 + q^2 \end{aligned}\right\} +$$

$$\underbrace{a^2 + b^2}_{c^2} = 2 \cdot h^2 + p^2 + q^2; \text{ pero } a^2 + b^2 = c^2$$

$$c^2 = 2 \cdot h^2 + p^2 + q^2; \text{ pero } c = p + q$$

$$(p+q)^2 = 2 \cdot h^2 + p^2 + q^2$$

Al desarrollar y reducir, se obtiene: $\boxed{h^2 = pq}$

266. CALCULO DE AREAS

Ya sabemos cómo calcular el área del cuadrado, **del rectángulo, del paralelogramo, del trapecio y del triángulo. Veremos, ahora, otros polígonos.**

267. TEOREMA LXXXIII

»El área de un polígono regular es igual al producto de su semiperímetro por la apotema«.

H.) l = **longitud del lado del polígono**

ρ = apotema

n = número de lados

2s = perímetro

s = semiperímetro.

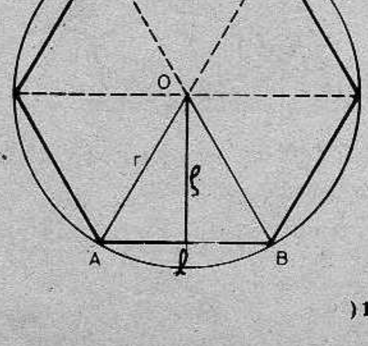


Fig. 22

T.) $\boxed{\text{área} = s \cdot \rho}$

D.) Como el polígono es regular se le descompone en »n« triángulos congruentes al $\triangle$ ABO. Por lo tanto, el área del polígono regular será »n« veces el área de este triángulo. Es decir (Fig. 22):

área polígono regular =

$$n \cdot \triangle ABO = n \cdot \frac{l \cdot \rho}{2} = \frac{n \cdot l \cdot \rho}{2}$$

pero $n \cdot l = 2s$; por lo tanto: $\boxed{A = s \cdot \rho}$

268. COROLARIO

Si el número de lados »n« del polígono crece indefinidamente terminará su perímetro por confundirse con la circunferencia cuya longitud o perímetro se designa por C. Al mismo tiempo el apotema se confunde con el radio »r«. Con estas consideraciones el área del círculo es:

$$\boxed{A = \frac{1}{2} C \cdot r}$$

Observación: Más adelante demostraremos que $C = 2\pi r$ con lo cual se obtiene para el área del círculo:

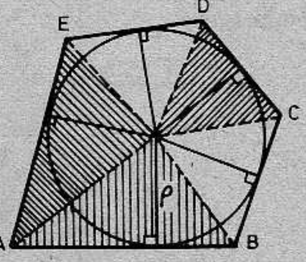
$$\boxed{A = \pi \cdot r^2}$$

siendo π una constante geométrica cuyo valor es aproximadamente $\pi = 3{,}14 = \frac{22}{7} = \frac{355}{113}$

269. TEOREMA LXXXIV

»El área de un polígono circunscrito a un círculo es igual al producto de su semiperímetro por el radio del círculo (apotema)«.

Fig. 23



H.) ABCDE es un polígono circunscrito al círculo de radio ρ (Fig. 23).

T.) $\boxed{\text{Area} = s \cdot \rho}$

D.) Se descompone el polígono en $\triangle$ ABO, $\triangle$ BCO, $\triangle$ CDO, etc., y se suman sus áreas... (¡Siga usted!).

270. COROLARIO

»El área de un triángulo cualquiera es igual al producto de su semiperímetro por el radio de la circunferencia inscrita al triángulo« (Fig. 24).

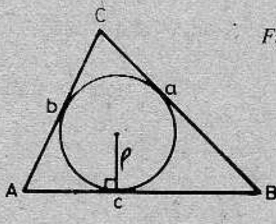


Fig. 24

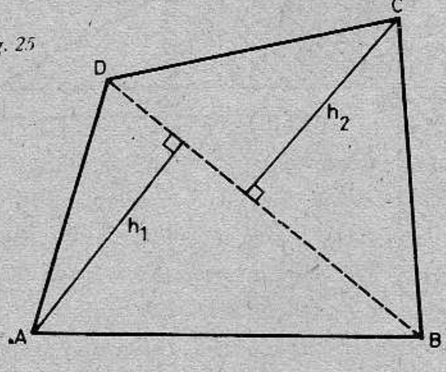
Siendo: $2s = a + b + c \Rightarrow s = \frac{a + b + c}{2}$

Luego: $\boxed{A = s \cdot \rho}$

271. TEOREMA LXXXV

»El área de un trapezoide es igual al producto de una de sus diagonales por la semisuma de las perpendiculares trazadas de los otros dos vértices a esta diagonal«.

Fig. 25



H.) ABCD es cualquier cuadrilátero (trapezoide) $\overline{BD}$ = una diagonal; $h_1 \perp \overline{BD}$, $h_2 \perp \overline{BD}$ (Fig. 25).

T.) $\boxed{\text{área } ABCD = \frac{1}{2} \overline{BD} \cdot (h_1 + h_2)}$

D.) Cuadrilátero

$$ABCD = \triangle BDA + \triangle BDC$$
$$= \frac{1}{2} \overline{BD} \cdot h_1 + \frac{1}{2} \overline{BD} \cdot h_2 =$$
$$= \frac{1}{2} \overline{BD} \cdot (h_1 + h_2)$$

272. EJERCICIOS

Problema 1) Calcular el área de un triángulo conocido el radio de una de las circunferencias ex inscritas.

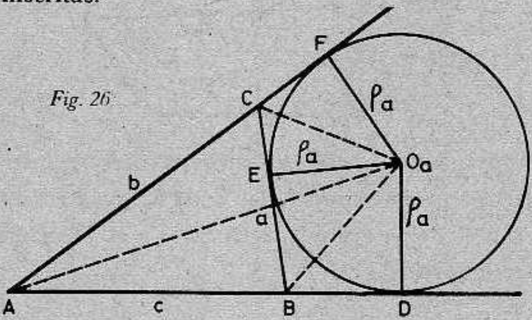


Fig. 26

ρ_a = radio de la ⊙ ex inscrita de centro O_a (Fig. 26).

$A = \triangle ABC = \triangle ABO_a + \triangle CAO_a - \triangle BCO_a$

$A = \frac{1}{2} c \cdot \overline{DO_a} + \frac{1}{2} b \cdot \overline{FO_a} - \frac{1}{2} a \cdot \overline{EO_a}$

$A = \frac{1}{2} c \cdot \rho_a + \frac{1}{2} b \cdot \rho_a - \frac{1}{2} a \cdot \rho_a$

$A = \frac{1}{2} \rho_a \cdot (c + b - a)$

pero $c + b - a = c + b + a - 2a$

$= 2s - 2a = 2 \cdot (s - a)$

Luego: $\boxed{A = \rho_a \cdot (s - a)}$

Análogamente se demuestra que:

$\boxed{A = \rho_b \cdot (s - b) = \rho_c \cdot (s - c)}$

Problema 2) Calcular el área de un triángulo conocidos sus tres lados.

Se sabe que: (ver pág. 111).

$\overline{BE} = s - b$, $\overline{BD} = s - c$,

$\overline{OE} = \rho$, $\overline{DO_a} = \rho_a$

De la semejanza del $\triangle$ BEO con el $\triangle$ BDO_a (por 1er Teor. de $\sim$) resulta (Fig. 27):

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{OE}} = \frac{\overline{DO_a}}{\overline{BD}}$$

o bien: $\frac{s - b}{\rho} = \frac{\rho_a}{s - c} \Rightarrow$ 1) $\rho \cdot \rho_a = (s - b)(s - c)$

pero: $\begin{cases} A = s \cdot \rho & (\# 270) \\ A = \rho_a \cdot (s - a) & (\# 272) \end{cases}$

Se multiplica miembro a miembro:

$$A^2 = s \cdot (s - a) \rho \cdot \rho_a$$

Al sustituir 1), se obtiene:

$$A^2 = s \cdot (s - a)(s - b)(s - c)$$

De aquí obtenemos lo que se conoce como *Fórmula de Herón:*

$$\boxed{A = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}}$$

Problema 3) Calcular el área de un triángulo en función de los radios de las circunferencias inscritas y ex inscritas.

De acuerdo con los N^{os} 270 y 272 podemos escribir:

$\left.\begin{array}{l} A = s \cdot \rho \\ A = \rho_a \cdot (s - a) \\ A = \rho_b \cdot (s - b) \\ A = \rho_c \cdot (s - c) \end{array}\right\}$ Se multiplican miembro a miembro:

$\left.\begin{array}{ll} & A^4 = \rho \cdot \rho_a \cdot \rho_b \cdot \rho_c \cdot s \cdot (s - a)(s - b)(s - c) \\ \text{pero} & A^2 = s(s - a)(s - b)(s - c) \quad (\text{por } \# 272\text{-}2) \end{array}\right\}$ se dividen:

$A^2 = \rho \cdot \rho_a \cdot \rho_b \cdot \rho_c$

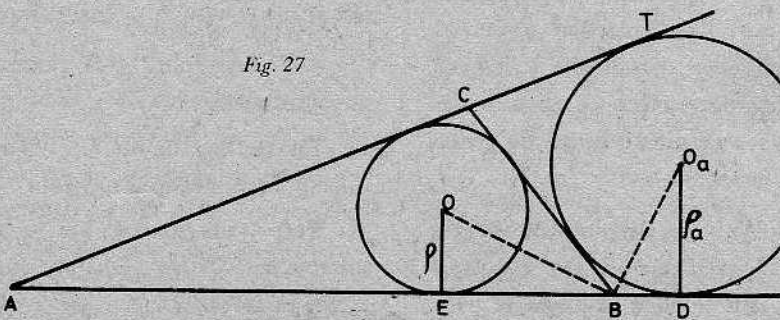
de donde: $\boxed{A = \sqrt{\rho \cdot \rho_a \cdot \rho_b \cdot \rho_c}}$

Problema 4) Demostrar que el área de un triángulo es:

$$\boxed{A = \frac{abc}{4r}}$$

r = $\overline{OB}$ = radio de la ⊙ circunscrita (Fig. 28).

Fig. 27



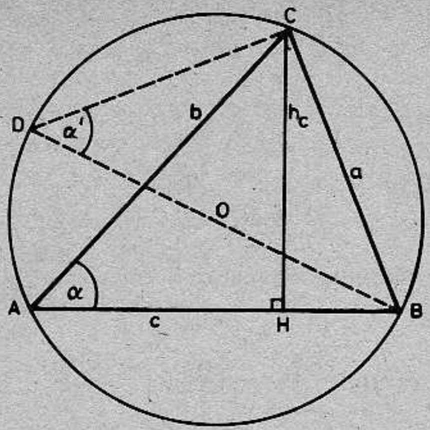


Fig. 28

Se traza el diámetro $\overline{BD}$ y se forma el △ BDC resultando ser rectángulo en C (Teor. de Thales) y el ∢ α = ∢ α' (son ángulos inscritos en el mismo arco BC). Por lo tanto, se tiene: △ AHC ~ △ DBC. De esta semejanza se obtiene (Fig. 28):

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CH}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{CB}} \Rightarrow \frac{b}{h_c} = \frac{2r}{a} \Rightarrow h_c = \frac{ab}{2r}$$

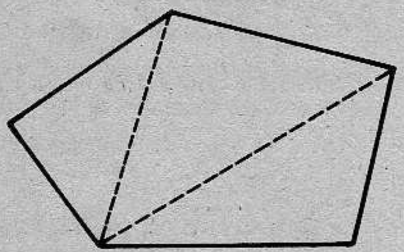
Pero como $\quad A = \frac{1}{2} c \cdot h_c$

resulta al sustituir el valor de h_c:

$$A = \frac{abc}{4r}$$

273. *AREA DE POLIGONOS IRREGULARES*

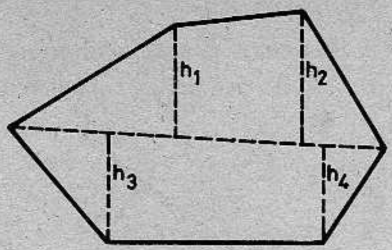
Existen varios métodos para determinar el área de estos polígonos de los cuales trataremos algunos.



I

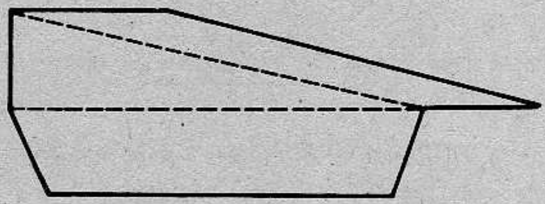
1^er^ Método: por »triangulación« (Fig. I). Consiste en descomponer el polígono en triángulos por medio de diagonales trazadas desde uno de los vértices y, en seguida, sumar las áreas de los triángulos obtenidos.

2° Método (Fig. II) se descompone el polígono en triángulos rectángulos y en trapecios rectángulos. Para esto se elige la diagonal más



II

conveniente y desde los otros vértices se trazan las perpendiculares a ella. En la figura II se obtuvieron dos trapecios rectángulos y 4 triángulos rectángulos.



III

3^er^ Método (Fig. III). A veces, según sea la forma del polígono, es más conveniente descomponerlo en figuras conocidas y fáciles de determinar su área como cuadrados, triángulos, paralelogramos, etc. Basta, finalmente, sumar las áreas de estos polígonos parciales.

274. *AREA DE CUALQUIER FIGURA*

1^er^ Método: Se »cuadricula« la figura dividiéndola por medio de paralelas en pequeños cuadrados de área conocida. (Cuando se emplee papel cuadriculado, como el de una hoja de cuaderno, se puede usar el cüadradito de la hoja como unidad).

Hecho esto se procede (Fig. IV):

1) A contar los »cuadrados enteros«;

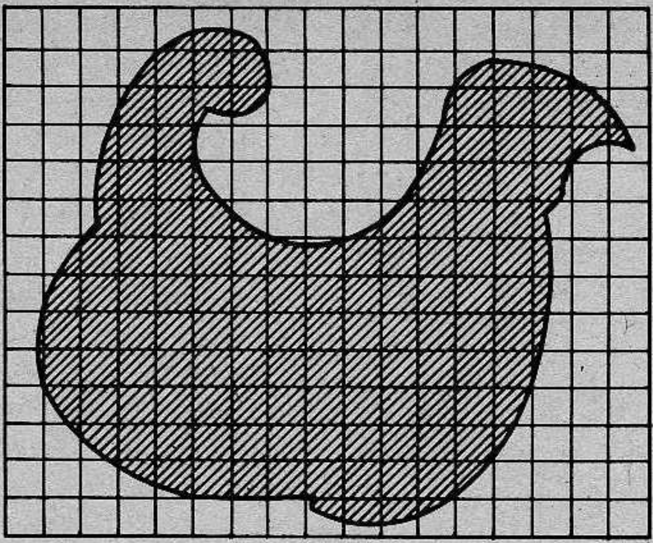
2) Con los »pedacitos sobrantes »se van« completando a ojo« unos con otros.

3) Se suman el número de »cuadrados enteros« con el número de los »completados«.

4) Se multiplica esta suma por el valor o medida de »un cuadrado«.

En nuestra figura hay 93 cuadrados enteros +27 completados, lo que da = 120 cuadrados.

Pero, cada uno de los »cuadraditos« tiene un área de 0,25 cm^2. Por lo tanto, el área de esta figura en cm^2 es:



IV

$$A = 120 \cdot 0{,}25\ cm^2 = 30\ cm^2$$

Si se quisiera tener una mayor aproximación se tendrían que tomar cuadrados más pequeños, por ej., el del papel milimetrado.

2° Método: por »pesada«:

1) Para este objeto se calca o copia la figura sobre un papel y se la recorta.

2) Del mismo papel se recorta una figura de área conocida, por ejemplo un cuadrado de 1 cm de lado.

3) En una balanza se pesan separadamente estas dos figuras.

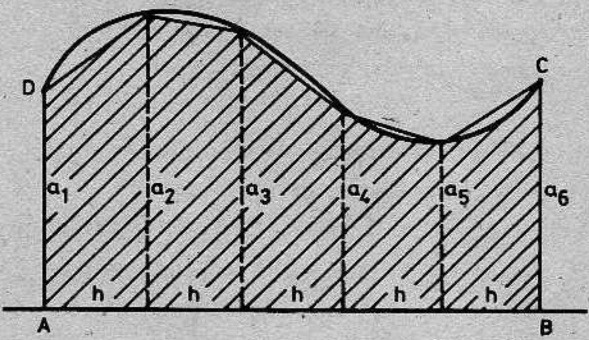
Para calcular el área de la figura pedida basta determinar las veces que la segunda pesada cabe en la primera.

Así, la figura IV del caso anterior calcada y recortada en un papel pesó 608 miligramos y un cuadrado de 1 cm^2 del mismo papel pesó 20 miligramos. Entonces, el área de la figura es:

$$608\ mgr : 20\ mgr/cm^2 = 30{,}4\ cm^2$$

275. *CALCULO DEL »AREA BAJO LA CURVA«*

En Física y en otros ramos es frecuente tener que calcular el área comprendida entre una curva, una recta o eje y las perpendiculares trazadas desde los extremos de la curva al eje. Todo lo anterior se expresa diciendo: »calcular el área bajo la curva« (Fig. V).



V

1^er Método: se puede hacer por »cuadriculación«, ya explicado en el N° 274.

2° Método: por descomposición en trapecios en vez de cuadrados (Fig. V). Para esto se procede a dividir la figura en trapecios de igual altura, lo que se consigue dividiendo la distancia $\overline{AB}$ en un número conveniente de partes iguales. Al trazar las perpendiculares en estos puntos de división la figura queda dividida en trapecios al unir también, entre sí, los puntos que se determinan en la curva.

Por lo tanto, el área »bajo la curva« será aproximadamente igual a la suma de las áreas de los trapecios que se han formado. Es decir:

$$A = \frac{1}{2}(a_1 + a_2) \cdot h + \frac{1}{2}(a_2 + a_3) \cdot h +$$

$$+ \frac{1}{2}(a_3 + a_4) \cdot h + \frac{1}{2}(a_4 + a_5) \cdot h +$$

$$+ \frac{1}{2}(a_5 + a_6) \cdot h$$

de donde:

$$A = \frac{h}{2} \cdot [a_1 + a_6 + 2(a_2 + a_3 + a_4 + a_5)]$$

3^er Método: por Cálculo Integral. Para esto debe conocerse la ecuación de la curva y los intervalos en que se debe integrar (véase Tomo II).

276. EJERCICIOS

1) En un triángulo rectángulo los catetos miden 35 cm y 84 cm. Calcular la transversal de gravedad correspondiente al ángulo recto. (Resp.: $t_c = 45{,}5$).

2) Demostrar que el área de un rombo es igual al semiproducto de sus diagonales. Es decir: $\boxed{A = \frac{1}{2}\, e \cdot f}$

3) Calcular las diagonales de un rombo si son entre sí como 5:4 y su área mide $1{,}6\ m^2$. Además, calcular su perímetro.
(Resp.: $e = 2$; $f = 1{,}6$; $p = 5{,}11$).

4) Calcular las diagonales de un rombo si su perímetro es 20 cm y su área $24\ cm^2$.
(Resp.: $e = 8$ cm, $f = 6$ cm).

5) Siendo »a« el lado de un octógono regular inscrito en una circunferencia, calcular su área en función del lado »a«.
(Resp.: $A_8 = 2a^2 \cdot (1 + \sqrt{2})$).

6) Calcular los lados de un triángulo rectángulo si $t_a = 10$ cm y $t_b = 4\sqrt{10}$ cm.
(Resp.: $a = 12$, $b = 8$, $c = 4\sqrt{13}$).

7) Desde un punto P perteneciente a la región interior de un triángulo se trazan las perpendiculares a los tres lados. Demostrar que (Fig. 1):

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 + s^2 + t^2$$

(Indicación: unir P con cada vértice y aplicar el Teor. de Pitágoras).

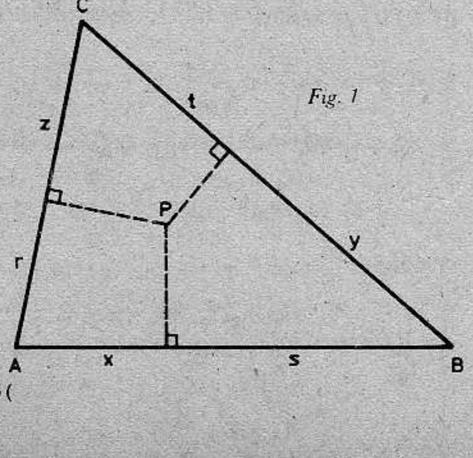


Fig. 1

8) Un trazo $\overline{AB} = a$ se prolonga en ambos sentidos en igual magnitud $n = \overline{AC} = \overline{BD}$. Se dibuja la semi⊙ ($\overline{CB}$) y la semi⊙ ($\overline{CD}$). La perpendicular en A corta a la primera semicircunferencia en E y a la segunda en F. Demostrar que: $\overline{CE} = \overline{AF}$.

9) Expresar el área de un triángulo rectángulo isósceles en función del radio ρ de la circunferencia inscrita.
(Indicación: calcular previamente la distancia de O al vértice del ángulo recto).
(Resp.: $A = \rho^2 \cdot (3 + 2\sqrt{2})$).

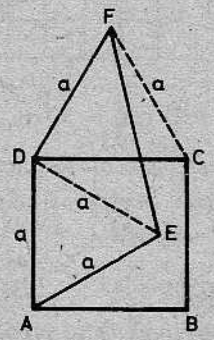


Fig. 2.

10) En el cuadrado ABCD de lado »a« se hace $\overline{AE} = \overline{DE} = \overline{DF} = \overline{CF} = a$ (Fig. 2). Calcular el perímetro del cuadrilátero AEFD.
(Resp.: $p = a \cdot (3 + \sqrt{2})$).

11) Idem., calcular el área del cuadrilátero AEFD (Fig. 2).
(Resp.: $A = \frac{1}{4} a^2 \cdot (2 + \sqrt{3})$).

12) En el △ STQ la altura desde Q mide lo mismo que la base $\overline{ST} = c$. La mediana $\overline{VM}$ se prolonga en $\overline{MP} = c/4$. Entonces, el área del cuadrilátero STPV es (Fig. 3):

A) $\frac{7}{16} c^2$;

B) $\frac{7}{8} c^2$;

C) $\frac{7}{4} c^2$;

D) $\frac{7}{6} c^2$;

E) $7 c^2$.

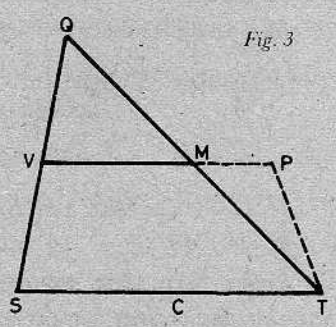


Fig. 3

13) En el △ STQ la altura desde Q mide lo mismo que el lado $\overline{ST} = c$. La mediana $\overline{VM}$ se prolonga en $\overline{MP} = c/4$. Entonces el área del △ QPS es (Fig. 4):

A) $0{,}75\ c^2$;

B) $0{,}375\ c^2$;

C) c^2;

D) $1{,}5\ c^2$;

E) $\frac{2c^2}{3}$.

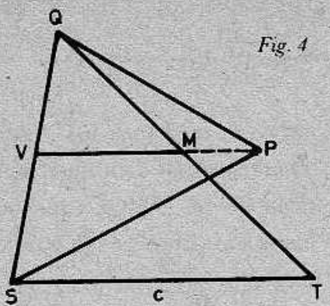


Fig. 4

14) En el △ RSQ la altura desde Q mide lo mismo que el lado $\overline{RS} = c$. La mediana TU se prolonga en $UP = c/4$. Marque cuál de las alternativas siguientes es la correcta (Fig. 5):

A) △ RUT = △ URS;

B) △ UPQ = △ URP = △ PUS;

C) cuadrilátero RSPU = △ TRP;

D) △ UPR +△ UPS +△ UPQ = △ TUQ;

E) △ TPQ = △ RSU.

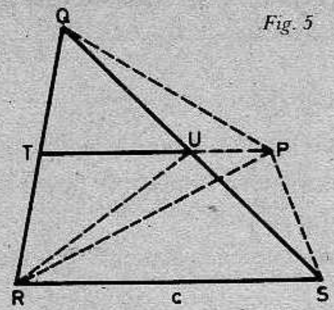


Fig. 5

15) Indicar cuál de las siguientes alternativas es falsa (véase Fig. 5):

A) △ QTU + △ TRU = △ SUR;

B) △ UPR + △ UPS = △ TUQ;

C) △ RSU = △ RSP;

D) cuadrilátero RSUT = △ QTU +△RSP;

E) sólo algunas de estas relaciones son verdaderas.

Resp.: 12) A; 13) B; 14) B; 15) E.

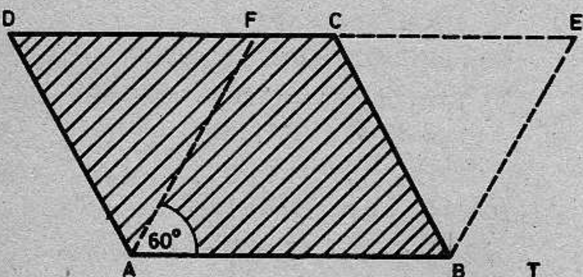
277. DEFINICION

La transformación de una figura geométrica en otra consiste en cambiar la forma de la figura sin alterar su área.

Desarrollaremos algunos problemas sencillos.

278. PROBLEMA 1)

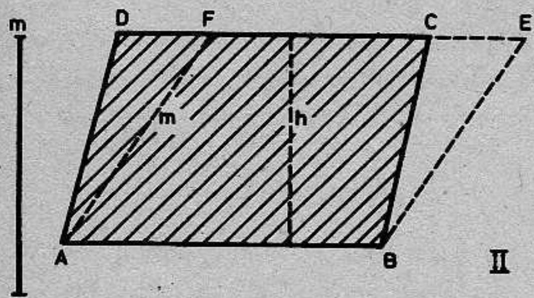
Dado un # ABCD transformarlo en otro que tenga el ángulo en A de 60°.



I

Solución: Se copia en A un ángulo de 60° resultando, de acuerdo con el Teor. LXXIX, *que (Fig.* I): # ABEF = # ABCD

Problema 2) Dado un # ABCD transformarlo en otro que tenga un lado de longitud dada »m«.



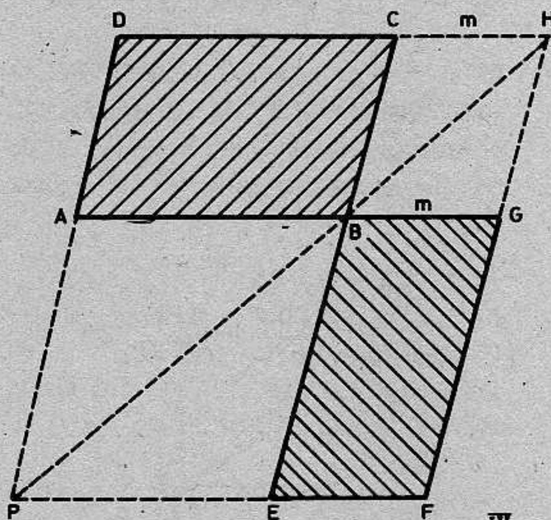
II

1er caso: m > h, siendo *h* la altura del # ABCD.

Solución: Con arco de ⊙ (A,m) se corta el lado opuesto resultando, por el Teor. LXXIX (Fig. II):

ABEF = # ABCD.

2º caso: m < h. En este caso la ⊙ (A,m) no alcanza a cortar el lado opuesto. Para solucionarlo se recurre a los »paralelogramos complementarios«. Se debe determinar el # complementario del # ABCD que tenga por uno de sus lados a *m*. Entonces (Fig. III):



III

1) se prolonga $\overline{AB}$ ⟶ B en $\overline{BG}$ = m y $\overline{DC}$ ⟶ C en $\overline{CH}$ = m.

2) H(–)B ⟶ B corta a $\overline{DA}$ ⟶ A en P.

3) por P // $\overline{AG}$ corta a $\overline{CB}$ ⟶ B y a $\overline{HG}$ ⟶ G en E y F.

Por Teor. LXXXI resulta:

BEFG = # ABCD.

Problema 3) Transformar un # ABCD en otro paralelogramo que tenga un ángulo de 60° y un lado de longitud dada m.

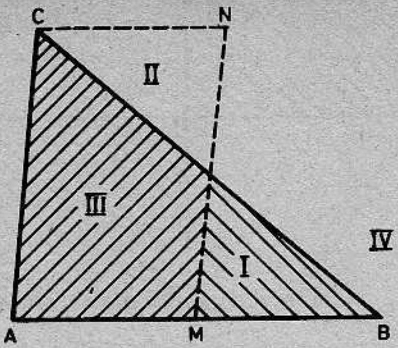
(Ind.: es una combinación de los dos problemas anteriores.)

Problema 4) Transformar un romboide ABCD en un rectángulo que tenga un lado de longitud dada m.

(Ind.: la misma del problema anterior.)

Problema 5) Transformar un cuadrado de 5 cm de lado en un rectángulo que tenga un lado de 3 cm. (Dé la solución geométrica y la algebraica).

Problema 6) Transformar un △ ABC en un paralelogramo que tenga la misma altura.

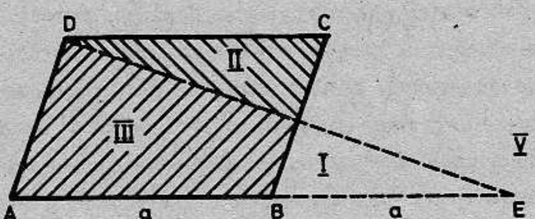


Solución: Al tener la misma altura se debe dimidiar la base (Teor. LXXX). Por lo tanto, se hace $\overline{AM} = \frac{\overline{AB}}{2}$ y se une M con N. Se obtiene (Fig. IV):

$$\# \text{ AMNC} = \triangle \text{ ABC}$$

D.)	$\triangle$ ABC	=	trapecio III + $\triangle$ I
	# AMNC	=	trapecio III + $\triangle$ II
pero	$\triangle$ I	$\cong$	$\triangle$ II
$\therefore$	$\triangle$ ABC	=	# AMNC.

Problema 7) Transformar un # ABCD en un triángulo que tenga la misma altura.



Solución: Al tener la misma altura se debe duplicar la base (Fig. V). Por lo tanto, se hace $\overline{BE} = \overline{AB}$ y se une D con E.

Resulta: # ABCD = $\triangle$ AED.

D.) la misma del problema anterior.

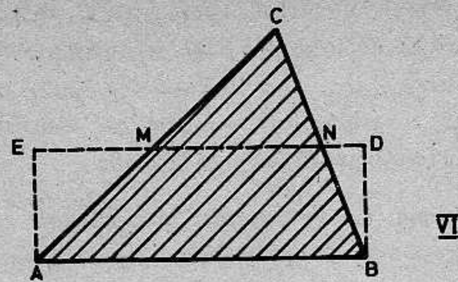
Problema 8) Transformar un $\triangle$ ABC en un paralelogramo que tenga la misma base.

(Ind.: se dimidia el lado $\overline{AC}$, lo que equivale a dimidiar la altura, y se completa el # de lados $\overline{AB}$ y $\frac{1}{2}\,\overline{AC}$; siga usted,...).

Problema 9) Transformar un # ABCD en un triángulo que tenga la misma base.

(Ind.: Se duplica el lado $\overline{AD}$, lo que equivale a duplicar la altura, y... siga usted.)

Problema 10) Transformar un triángulo en un rectángulo.



Solución: Se traza la mediana $\overline{MN}$ y las perpendiculares en A y B. En seguida, se completa el rectángulo ABDE (Fig. VI).

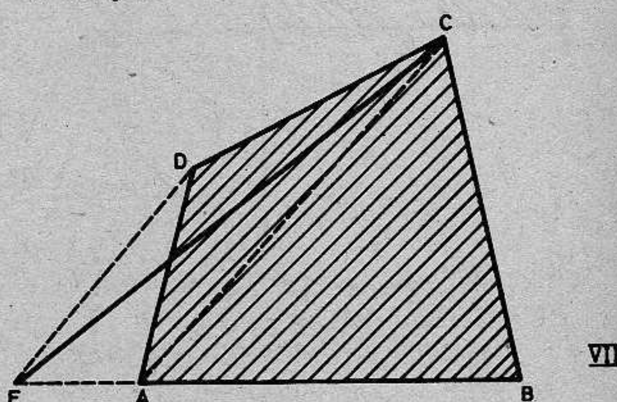
Problema 11) Transformar un triángulo ABC en otro que tenga la misma base $\overline{AB}$ y que el ángulo opuesto a ella mida 60°.

Solución: 1) por C // $\overline{AB}$; 2) el arco capaz de 60° con cuerda $\overline{AB}$ (véase N° 231); 3) siga usted.

Problema 12) Transformar un $\triangle$ ABC en otro triángulo que tenga la misma base $\overline{AB}$ y de modo que el ángulo opuesto a ella sea recto.

Solución: 1) por C// $\overline{AB}$; 2) semi ⊙ de Thales de diámetro $\overline{AB}$; etc.

Problema 13) Transformar un trapezoide en un triángulo.



Solución: 1) Se traza una diagonal por ej., $\overline{AC}$ (Fig. VII).

2) Por D // $\overline{AC}$ y $\overline{BA} \longrightarrow$ A determina E.

3) Resulta: $\triangle$ EBC = cuadril. ABCD.

D.)	Cuadrilátero ABCD	=	$\triangle$ABC + $\triangle$ACD
	triángulo EBC	=	$\triangle$ ABC + $\triangle$ACE
	pero: $\triangle$ ACD	=	$\triangle$ ACE (igual base, igual altura)
$\therefore$	cuadrilátero ABCD	=	$\triangle$ EBC.

Problema 14) Transformar un trapezoide en un rectángulo.

(Ind.: 1) el cuadrilátero ABCD se transforma en un triángulo EBC según el problema anterior.

2) el triángulo resultante se transforma en un rectángulo según el N° 278-10.

Problema 15) Transformar un polígono cualquiera mayor de tres lados en otro que tenga un lado menos.

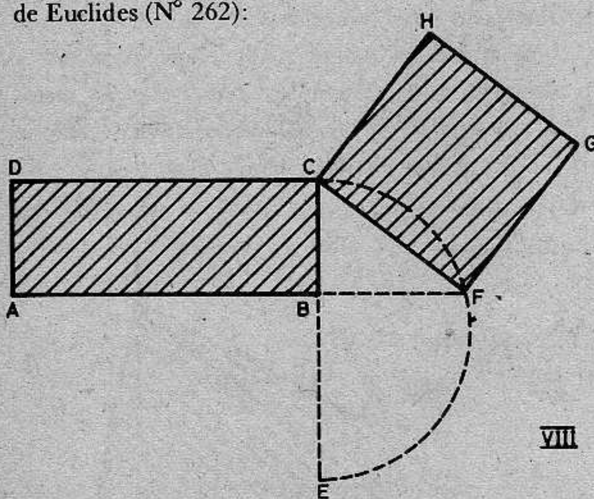
Ind.: guíese por el N° 278-13.

Problema 16) Transformar un paralelogramo en otro que tenga una altura dada »h«.

(Ind.: aplique los paralelogramos complementarios).

Problema 17) Trasnformar un rectángulo ABCD en un cuadrado.

1ª solución: se basa en el Primer Teorema de Euclides (N° 262):



VIII

1) Se prolonga CB→B de modo que $\overline{CE} = \overline{CD}$ (hipotenusa entera) (Fig. VIII).

2) semi ⊙ ($\overline{CE}$) y $\overline{AB}$ → B determinan F.

3) $\overline{CF}$ = lado del cuadrado pedido.

D.) Es por el 1er Teor. de Euclides siendo $\overline{CE}$ = hipotenusa, $\overline{CB}$ = proyección del cateto $\overline{CF}$ en la hipotenusa.

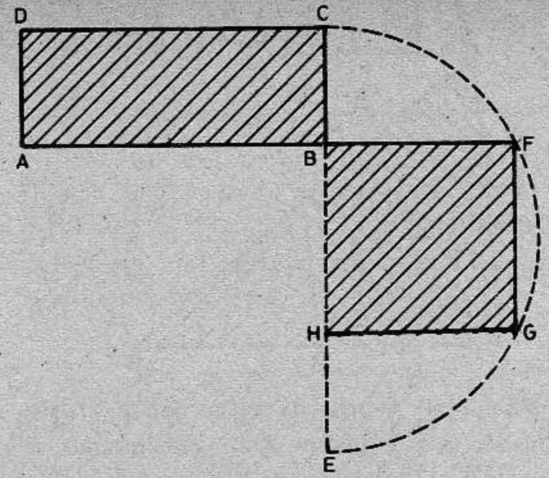
2ª solución: se basa en el Segundo Teorema de Euclides: (N° 265):

1) se prolonga $\overline{CB}$→B de modo que $\overline{BE} = \overline{BA}$ (Fig. IX).

2) semi ⊙ ($\overline{CE}$) y $\overline{AB}$→ determinan F.

3) $\overline{BF}$ = lado del cuadrado pedido BGHF.

D.) Por el 2° Teor. de Euclides siendo $\overline{CB}$ y $\overline{BE}$ las proyecciones de los catetos en la hipotenusa $\overline{CE}$ y $\overline{BF}$ la altura del △ CEF (no dibujado). (El punto G puede o no estar en la ⊙).



IX

Problema 18) Transformar un cuadrilátero cualquiera (un trapezoide) en un cuadrado.

Ind.: 1) se trasforma el cuadrilátero en un triángulo (# 278-13); 2) el △ en un rectángulo (N° 278-10); 3) el rectángulo en un cuadrado (N° 278-17).

Problema 19) Transformar un círculo en un cuadrado.

Este es uno de los antiguos problemas clásicos que en todas las épocas, desde los primeros matemáticos griegos, se han discutido y tratado de resolver geométricamente. Este problema se conoce como *cuadratura del círculo* y tiene soluciones sólo aproximadas puesto que el número π es inconmensurable (pertenece a los números irracionales).

Paralelo a este problema han sido también materia de preocupación los de la rectificación de la circunferencia, la duplicación del cubo y la trisección del ángulo.

La condición de la »cuadratura del círculo« es determinar geométricamente el lado de un cuadrado que tenga la misma área que un círculo dado de radio r.

Designando por x este lado, se debe cumplir que:

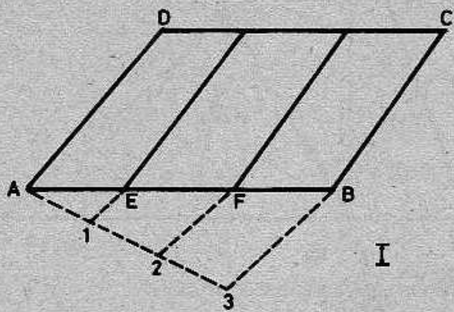
$$x^2 = \pi \cdot r^2$$

Más adelante daremos algunas soluciones aproximadas a este problema (N° 388).

279. DIVISION DE UNA FIGURA PLANA

Trataremos esta materia resolviendo algunos problemas sencillos.

Problema 1) Dividir un paralelogramo en tres partes equivalentes por medio de paralelas a un lado.



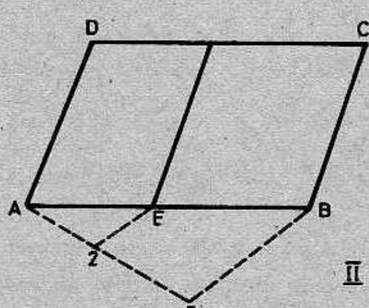
I

Solución: 1) Se divide el lado $\overline{AB}$ en tres partes iguales (N° 40) de modo que $\overline{AE} = \overline{EF} = \overline{FB}$ (Fig. I).

2) Por E y F se trazan las paralelas a $\overline{AD}$.

D.) Los tres paralelogramos resultantes son equivalentes por tener la misma base y la misma altura.

Problema 2). Dividir un paralelogramo en dos partes cuyas áreas sean entre sí como 2:3 por medio de paralelas a un lado.

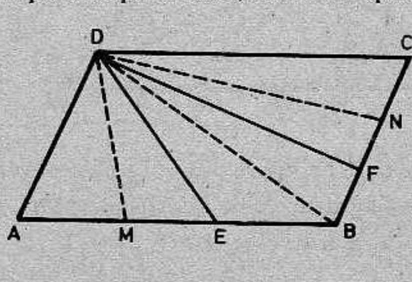


II

Solución: 1) Se divide la base $\overline{AB}$ en la razón 2:3 (Fig. II).

2) por E / / $\overline{AD}$, se determinan los paralelogramos pedidos.

Problema 3) Dividir un paralelogramo en tres partes iguales en área por medio de transversales que parten de un vértice (En general, en *n* partes equivalentes, siendo *n* impar.)



III

Solución. Tomaremos n = 3.

1) Se divide tanto $\overline{AB}$ como $\overline{BC}$ en tres partes iguales (en general, en *n* partes iguales) Fig. III.

2) Se une *punto por medio* con el vértice D.

3) Se obtiene:

△ AED = cuadrilátero EBFD = △ FCD.

D.) Se tiene: △ABD ≃ △ BCD pero, por Teor. LXXIX, resulta:

△ AMD = △ MED = △ EBD = x

análogamente:

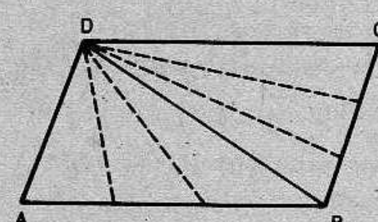
△ BFD = △ FND = △ NCD = x

Por lo tanto:

△ AED	= 2x
cuadrilátero EBFD	= 2x
△ FCD	= 2x

Luego: las tres partes son equivalentes.

Problema 4) Dividir un paralelogramo en seis partes equivalentes por medio de transversales que parten de un vértice. (En general, en *n* partes equivalentes siendo *n* par.)



IV

Solución: Tomaremos n = 6.

1) Se divide $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en 3 partes iguales (en general, en n / 2 partes iguales), Fig. IV.

2) Se unen todos los puntos con D, resultando las seis partes equivalentes.

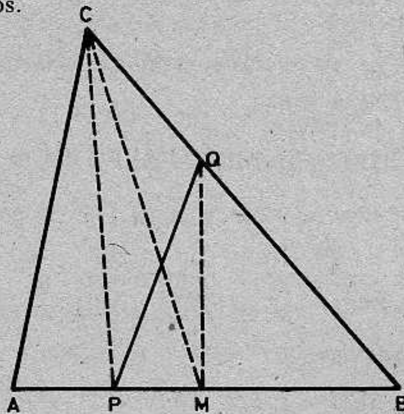
D.) análoga al problema anterior.

Problema 5) Dividir un triángulo en *n* partes equivalentes por medio de transversales que parten de un vértice.

Solución: Déla usted, y tome n = 3.

Problema 6) Dividir un triángulo en dos triángulos de modo que sus áreas sean entre sí como 2:3.

Problema 7) Dividir un triángulo dado en dos partes equivalentes por medio de una transversal que parta de un punto dado P en uno de sus lados.



V

Solución: 1) El punto medio M de $\overline{AB}$ se une con C; 2) P(–)C y por M / / $\overline{PC}$ determina Q; 3) $\overline{PQ}$ es la transversal que dimidia al △ ABC (Fig. v).

D.) △ AMC = △ MBC (Teor. LXVIII)
△ CPM = △ CPQ (Teor. LXVIII)

Entonces:

$\triangle AMC = \triangle APC + \triangle CPM = \frac{1}{2} \triangle ABC$

$\triangle AMC = \underbrace{\triangle APC + \triangle CPQ}$

$\triangle AMC$ = cuadrilátero APQC = $\frac{1}{2} \triangle ABC$

Luego: $\triangle PBQ = \frac{1}{2} \triangle ABC$.

Por lo tanto, cuadrilátero APQC = △PBQ

Otra demostración:

$\triangle MBC = \triangle MBQ + \triangle MQC = \frac{1}{2} \triangle ABC$

pero:

$\triangle MQC = \triangle MQP$ (igual base y altura)

luego:

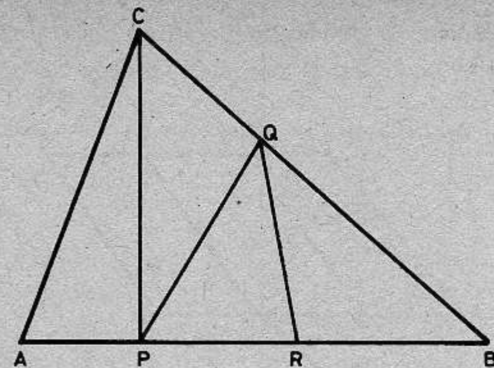
$\triangle MBC = \triangle MBQ + \triangle MQP = \triangle PBQ = \frac{1}{2} \triangle ABC$.

Por lo tanto: cuadrilátero APQC = △PBQ.

Problema 8) Dividir un triángulo ABC en *n* partes equivalentes, por ejemplo n = 4, por medio de una línea poligonal que parte del vértice C.

Solución: 1) Se divide $\overline{AB}$ en 4 partes iguales (en general, en *n* partes iguales), y de ellas se considera sólo el primer punto, es decir (Fig. VI):

$\overline{AP} = \frac{1}{4} \overline{AB} \rightarrow \triangle APC = \frac{1}{4} \triangle ABC$.



VI

Por lo tanto, el resto que es el

$\triangle PBC = \frac{3}{4} \triangle ABC$.

2) Se divide $\overline{BC}$ en 3 partes iguales (en general, (n –1) partes iguales) y se considera sólo $\overline{CQ} = \frac{1}{3} \overline{BC}$. Por lo tanto:

$\triangle QCP = \frac{1}{3} \triangle BCP = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \triangle ABC = \frac{1}{4} \triangle ABC$.

Además, resulta:

$\triangle PBQ = \frac{2}{3} \triangle BCP = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \triangle ABC = \frac{1}{2} \triangle ABC$.

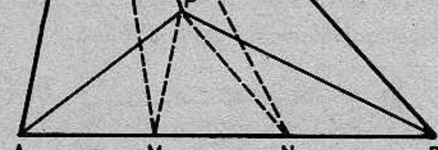
3) Se divide $\overline{PB}$ en 2 partes iguales (en general, en (n –2) partes iguales), obteniéndose:

$\triangle PRQ = \triangle RBQ = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \triangle ABC = \frac{1}{4} \triangle ABC$.

Por lo tanto:

$\triangle APC = \triangle QCP = \triangle PRQ = \triangle RBQ = \frac{1}{4} \triangle ABC$.

Problema 9) En un △ABC determinar un punto P que, unido con los vértices, determine 3 triángulos equivalentes.



VII

Solución: 1) Se divide $\overline{AB}$ en 3 partes iguales y se forman los $\triangle AMC = \triangle MNC = \triangle NBC = \frac{1}{3} \triangle ABC$ (Fig. VII).

2) Se traza por $M // \overline{AC}$ y por $N // \overline{BC}$; la intersección de estas paralelas determina el punto pedido P.

D.) Por el N° 253 se tiene:

$$\triangle CAP = \triangle CAM = \tfrac{1}{3}\triangle ABC$$

$$\triangle BCP = \triangle BCN = \tfrac{1}{3}\triangle ABC$$

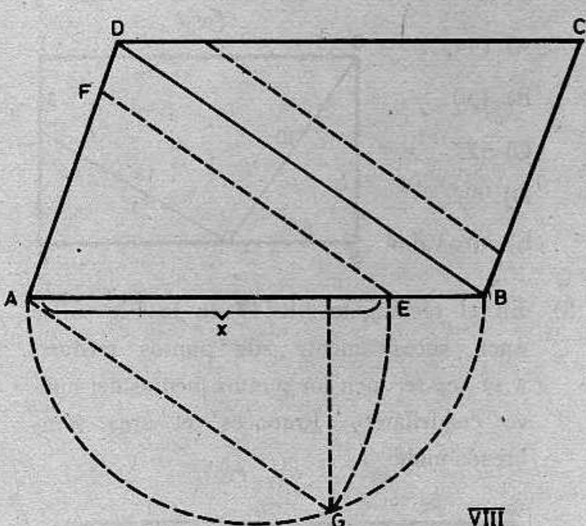
luego: $$\triangle ABP = \tfrac{1}{3}\triangle ABC.$$

Problema 10) En un $\triangle ABC$ determinar un punto P de modo que al unirlo con dos vértices del $\triangle$ se determine un $\triangle$ isósceles equivalente a los $\frac{2}{3}$ del área del $\triangle ABC$.

(Ind.: guíese por el problema anterior.)

Problema 11) Transformar un rectángulo dado en dos cuadrados de modo que uno sea el triple del otro.

Problema 12) En un paralelogramo trazar dos paralelas a una de las diagonales de modo que se obtengan tres partes equivalentes.



VIII

Solución: Sea $\overline{AB} = a$, $\overline{AD} = b$, $\overline{AE} = x$.

Entonces, por ser $\triangle EFA \sim \triangle BDA$:

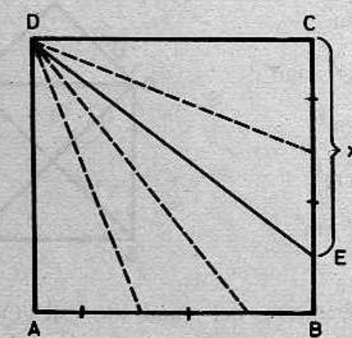
$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\triangle EFA}{\triangle BDA} = \dfrac{x^2}{a^2} \\[2ex] \dfrac{\triangle EFA}{\triangle BDA} = \dfrac{2}{3}\end{array}\right| \quad \therefore \ \dfrac{x^2}{a^2} = \dfrac{2}{3} \quad \text{de donde: } x^2 = \tfrac{2}{3}\,a \cdot a$$

Por lo tanto: x se construye como media proporcional geométrica entre $\frac{2}{3}$ a y a; etc.

Problema 13) En un rectángulo de lados 12 cm y 16 cm se trazan dos paralelas a una de sus diagonales de modo que queda dividido en 3 partes equivalentes entre sí. Calcular la medida de estas paralelas.

(Resp.: c/u $= \frac{20}{3}\sqrt{6}$ cm).

Problema 14) Desde un vértice de un cuadrado, trazar una recta que divida al cuadrado en dos partes que estén en la razón 2:3.



1ª solución: Se divide $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en 5 partes iguales cada uno. Si se unieran todos estos puntos con D el cuadrado quedaría dividido en 10 triángulos equivalentes. Al considerar cuatro de estos triángulos, la recta $\overline{DE}$ cumple con las condiciones del problema. En efecto (Fig. IX):

$$\left.\begin{array}{r|l}\triangle ECD & = 4\ \triangle \text{ chicos} \\ \text{trapecio DABE} & = 6\ \triangle \text{ chicos}\end{array}\right|$$

luego:

$$\frac{\triangle ECD}{\text{trapecio DABE}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

2ª solución: Sea $\overline{CE} = x$, $\overline{BE} = a - x$. Como $\triangle ECD = \frac{2}{5}$ del cuadrado, resulta:

$\frac{a \cdot x}{2} = \frac{2}{5}a^2 \Rightarrow x = \frac{4}{5}a$. Por lo tanto, basta dividir $\overline{BC}$ en 5 partes iguales y el cuarto punto desde C se une con D.

3ra solución:

$$\left.\begin{array}{r}\triangle ECD = \frac{1}{2}\,a \cdot x \\ \text{trapecio DABE} = \frac{a}{2}\cdot(2a - x)\end{array}\right|$$

Al dividir miembro a miembro, resulta:

$\triangle$ECD:trapecio DABE $= \frac{1}{2}\, a \cdot x : \frac{a}{2}(2a - x) = 2 : 3$

Al resolver esta ecuación, se obtiene:

$$x = \frac{4}{5}\, a.$$

280. TESTS

1) El área del cuadrado SRTQ de la figura 1 mide:

A) $1\ cm^2$;

B) $2\sqrt{2}\ cm^2$;

C) $2\ cm^2$;

D) $4\ cm^2$;

E) $2{,}5\ cm^2$.

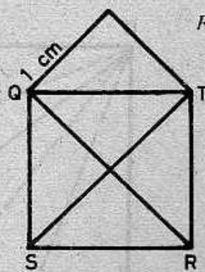


Fig. 1

2) El perímetro del cuadrado SRTQ de la Fig. 1 mide:

A) 2 cm; B) 4 cm;
C) $2\sqrt{2}$ cm; D) 2,5 cm;
E) $4\sqrt{2}$ cm.

3) El pentágono SRMTQ de la Fig. 2 está dividido en un cuadrado de $64\ cm^2$ y en un triángulo TRM de $24\ cm^2$. Entonces, la altura $\overline{MV}$ del triángulo mide:

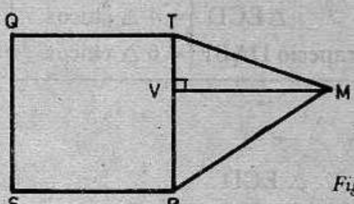


Fig. 2

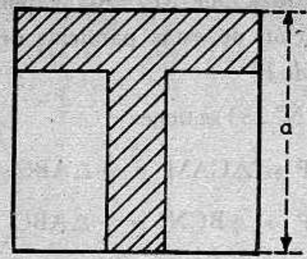
A) 3 cm; B) 6 cm;
C) 8 cm; D) 12 cm;
E) 4,5 cm.

4) Un sitio rectangular tiene un fondo que es el triple de su frente. Si el perímetro del sitio es 120 m, entonces su área en m^2 es:

A) 60; B) 225;
C) 2025; D) 675;
E) 337,5.

5) Dentro de un cuadrado de lado »a« se dibuja una T. Entonces, el perímetro de la parte sombreada de esta letra es (Fig. 3):

Fig. 3



A) 2a; B) 3a;
C) 4a; D) 3,5 a;
E) falta más información.

6) Un sitio rectangular de $640\ m^2$ tiene un frente de 16 m. Los otros tres lados se cierran con una »pandereta« en cuya construcción se emplean 20 ladrillos por metro lineal de »pandereta«. Entonces, el total de ladrillos empleados es:

A) 960; B) 2.240;
C) 1.920; D) 1.280;
E) 624.

7) El área del rectángulo SRTQ de la figura 4 es:

A) 144;

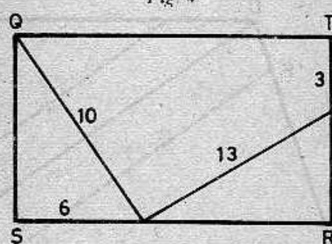
B) 130;

C) 52;

D) 99;

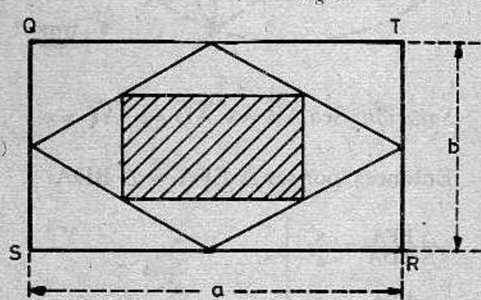
E) otro valor

Fig. 4



8) En el rectángulo SRTQ de la Fig. 5 se unen sucesivamente sus puntos medios; a su vez se unen los puntos medios del nuevo cuadrilátero. Entonces, el área sombreada mide:

Fig. 5



A) $\frac{ab}{2}$; B) $\frac{ab}{8}$;

C) $\frac{ab}{5}$; D) $\frac{3}{8}$ ab;

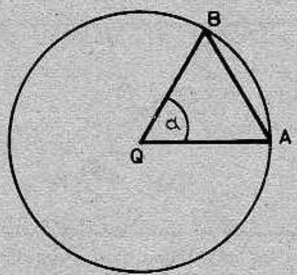
E) $\frac{ab}{4}$.

9) Los lados de un rectángulo miden 6 cm y 8 cm. Al unir los puntos medios de sus lados se forma el cuadrilátero MNPQ que es:

A) un rombo de 20 cm de perímetro;
B) un cuadrado de 25 cm^2 de área;
C) un rectángulo de 24 cm^2 de área;
D) un romboide de 14 cm de perímetro;
E) un deltoide de 24 cm^2 de área.

10) Si el radio $\overline{OA}$ permanece fijo y $\overline{OB}$ móvil, el $\triangle ABO$ adquiere su mayor área cuando el ángulo α vale (Fig. 6):

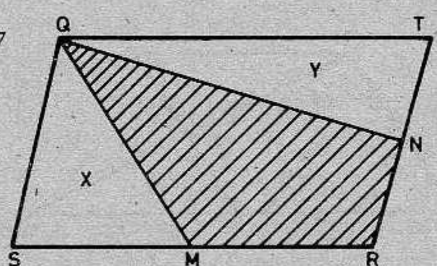
Fig. 6



A) 45°; B) 60°;
C) 90°; D) 120°;
E) 180°.

11) Siendo M y N los puntos medios de los lados $\overline{SR}$ y $\overline{RT}$ del # SRTQ (Fig. 7), se afirma que el área sombreada es:

Fig. 7



I) el doble de X;
II) el doble de Y;
III) igual a X + Y.

De estas afirmaciones son verdaderas sólo:

A) I; B) II;
C) III; D) I y II;
E) las tres.

12) Se dibuja un △ equilátero STM cuyo lado es la diagonal $\overline{ST}$ del cuadrado SRTQ (Fig. 8). Entonces, el ángulo MSR mide:

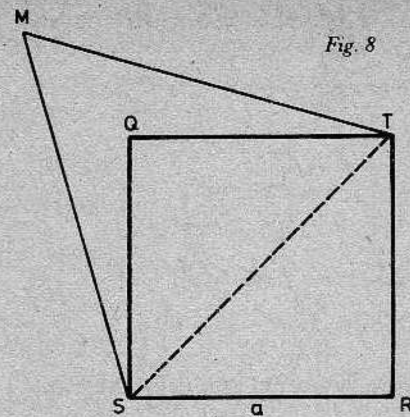


Fig. 8

A) 105°; B) 107°,5;
C) 112°,30'; D) 120°;
E) otro valor.

13) El perímetro del deltoide SRTM de la Fig. 8 es, siendo «a« el lado $\overline{SR}$:

A) $4a \cdot \sqrt{2}$; B) $3a \cdot \sqrt{2}$;
C) $a \cdot (2 + \sqrt{2})$; D) $2a \cdot (1 + \sqrt{2})$;
E) $2a + \frac{a}{2} \cdot \sqrt{2}$.

14) El área del deltoide SRTM, siendo $\overline{SR} = a$, es (Fig. 8):

A) $\frac{1}{2} a^2 \cdot (1 + \sqrt{3})$;
B) $\frac{1}{2} a^2 \cdot (\sqrt{6} + 1)$;
C) $a^2 \cdot (\sqrt{3} + 1)$;
D) $a^2 \cdot (1 + \sqrt{6})$;
E) otro valor.

15) En la figura 9 se hace AU = AS, que es la diagonal del cuadrado ARST. Con esto la medida del ∡ RSU es, siendo AR = a:

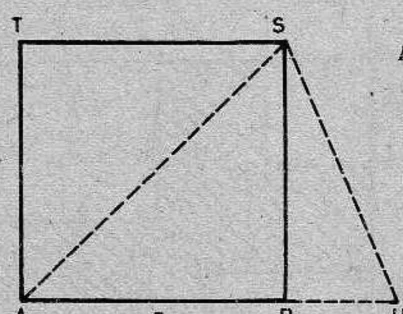


Fig. 9

A) 67°,5; B) 32°30';
C) 30°; D) 45°;
E) otro valor.

16) En la figura 9 el área del trapecio AUST es:

A) $\frac{a^2}{2}(1+\sqrt{2})$;

B) $\frac{1}{2}a^2 \cdot \sqrt{2}$;

C) $a^2 + 0{,}5 \cdot a^2 \sqrt{2}$;

D) $0{,}5 \cdot a^2 + a^2 \cdot \sqrt{2}$;

E) otro valor.

17) En la figura 9 el área del $\triangle$ AUS es:

A) a^2; B) $\frac{1}{2} \cdot a^2$;

C) $a^2 \cdot \sqrt{2}$; D) $\frac{1}{2} a^2 \cdot \sqrt{2}$;

E) otro valor.

18) En la figura 9 el perímetro del trapecio AUST es:

A) $4a$;

B) $2a \cdot (1+\sqrt{2})$;

C) $a \cdot (3+\sqrt{2})$;

D) $a \cdot (2+\sqrt{2}+\sqrt{4-2\sqrt{2}})$;

E) otro valor.

19) En la figura 9 el área del $\triangle$ RUS es:

A) $0{,}5 \cdot a^2\sqrt{2}$;

B) $\frac{1}{2} a^2 \cdot (\sqrt{2}-1)$;

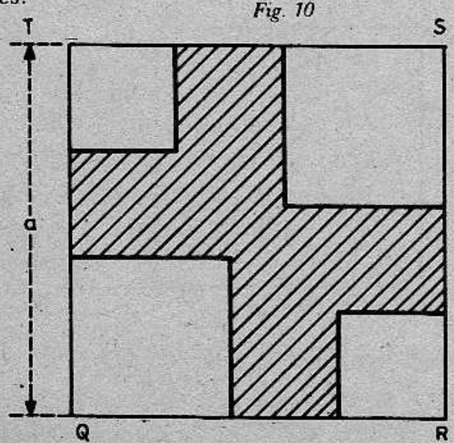
C) $\frac{1}{2} \cdot a^2$;

D) $0{,}25\, a^2$;

E) otro valor.

20) El perímetró de la parte sombreada (Fig. 10), siendo »a« el lado del cuadrado QRST, es:

Fig. 10



A) 1,5 veces mayor que el del cuadrado;

B) 75% del perímetro del cuadrado;

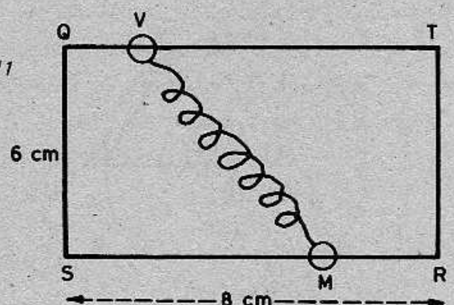
C) el mismo del cuadrado;

D) 3,25 a;

E) 4,25 · a.

21) Los lados $\overline{SR}$ y $\overline{QT}$ del rectángulo SRTQ (Fig. 11), están unidos por un elástico o resorte cuyos extremos M y V pueden deslizarse, respectivamente, a lo largo de estos lados. Entonces, la razón entre la menor y la mayor longitud que puede adquirir el elástico MV es:

Fig. 11



A) 10:1; B) 3:4;

C) 0,6; D) $\frac{2}{3}$;

E) 1,25.

22) El área del # QRST de la figura 12 es 100 cm^2. Se prolonga la base de modo que $\overline{RV} = \overline{QR}$. El área del trapecio que se forma es, en cm^2:

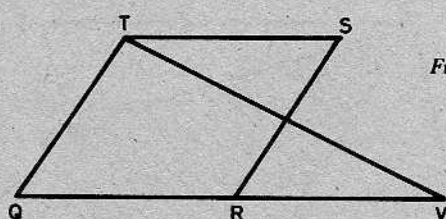


Fig. 12

A) 25; B) 100;

C) 50; D) 75;

E) casi 66,75.

23) El área sombreada de la figura 13 mide (cada cuadrado representa 1 m^2):

Fig. 13

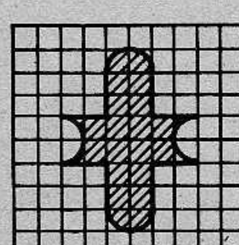
A) 23,14;

B) 26,28;

C) 16,86;

D) 20;

E) otro valor.



24) El lado del cuadrado chico de la figura 14 es igual a los 2/5 del lado del cuadrado grande. Entonces, la razón entre el área sombreada (rayada) y el cuadrado mayor es:

A) 0,4;

B) 0,16;

C) 0,84;

D) 0,6;

E) 0,36.

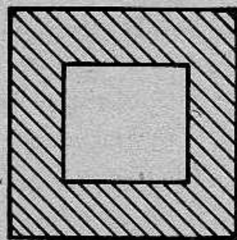


Fig. 14

25) En el rectángulo SRTQ se tiene SQ = 2a y QV = VM = MT = a. Se afirma que (Fig. 15):

I) x = y = z;

II) △ SRM = △ STQ;

III) área trapecio SRMV = $4a^2$.

Entonces, es (son) verdadera (s):

A) sólo I;

B) sólo II;

C) sólo III;

D) sólo I y II;

E) sólo II y III.

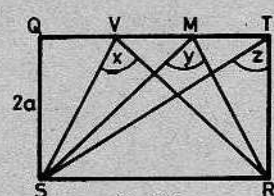


Fig. 15

26) El área del polígono P mide:

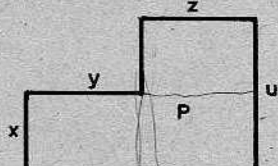
A) (u − x) · z + xy;

B) (x + y) (z + u);

C) zu + xy;

D) x (y + z) + uz.

E) (y + z) · u



27) En el rectángulo abcd (Fig. 16) se verifica una de las alternativas siguientes en cuanto a áreas:

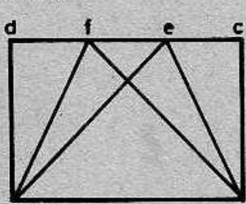


Fig. 16

A) rectángulo abcd = △ abe + △ abf;

B) rectángulo abcd = $\frac{1}{2}$ (△abe +△abf);

C) rectángulo abcd = 2/3(△abe +△abf);

D) rectángulo abcd = 2(△abe +△abf);

E) rectángulo abcd = 3/2(△abe +△abf).

28) Si el lado SR = 24 cm, entonces la suma de las áreas de los tres círculos es en cm^2 (Fig. 17):

A) 32π;

B) 24π;

C) 48π;

D) 8π;

E) 18π.

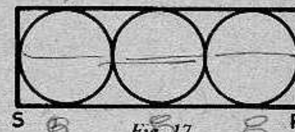


Fig. 17

29) Si cada cuadrito representa 1 m^2, entonces el área sombreada mide aproximadamente (Fig. 18):

A) 20,28 m^2;

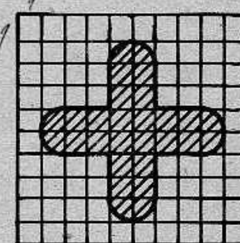
B) 2,228 cm^2

C) 2,228 dm^2;

D) 26,28 m^2

E) 2,628 cm^2.

Fig. 18



30) Si cada cuadradito representa 1 m^2, el área sombreada mide aproximadamente: (Fig. 19):

A) 12,5 m^2;

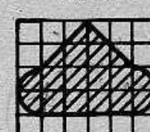
B) $4{,}86\pi$ m^2;

C) 6π m^2;

D) π m^2;

E) 3π m^2.

Fig. 19



31) Un sitio cuadrado está rodeado por una muralla de 600 metros. Se vende el sitio a \$ 50 el m^2. Por lo tanto, por el sitio se pagó:

A) \$ 30.000;

B) 75.000;

C) 1.125.000;

D) 225.000;

E) 112.500.

32) En la Fig. 20 el área sombreada mide:

A) aprox. 110;

B) 36π;

C) 18π;

D) 54;

E) otro valor.

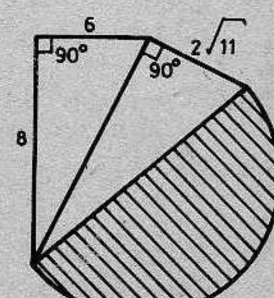


Fig. 20

33) El área del cuadrilátero SRVM es en cm^2 (Fig. 21):

A) 32;

B) 36;

C) 26;

D) 52;

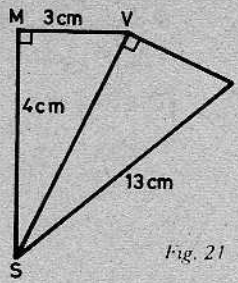


Fig. 21

E) falta mayor información para calcularlo.

34) El perímetro del polígono P es: (Fig. 22)

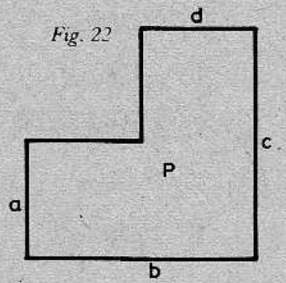
A) ab + cd;

B) 2b + 2c;

C) a + b + c + d;

D) ab + d (c − a);

E) otro valor.

Fig. 22


35) En la Fig. 23 el área del triángulo sombreado mide:

A) 30;

B) 18;

C) 15;

D) 36;

E) 24.

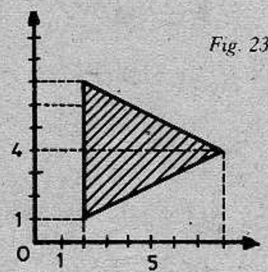


Fig. 23

36) Siendo M y N los puntos medios de los lados SR y RT del rectángulo SRTQ, el área sombreada respecto a la del rectángulo es (Fig. 24):

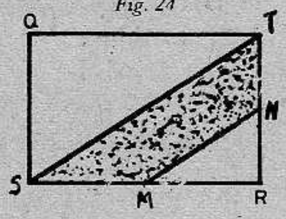
A) 0,25;

B) 0,125;

C) 0,50;

D) 0,75;

E) 0,375.

Fig. 24


37) El perímetro del cuadrilátero SMNT (Fig. 24), siendo SR = 20 cm y SQ = 15 cm, es:

A) 55 cm; B) 30 cm;

C) 60 cm; D) 35 cm;

E) otro valor.

38) Se tiene un △ ABC en el cual la altura CD trazada desde C al lado AB mide 12 cm, y los segmentos que determina sobre este lado miden 16 cm y 9 cm, respectivamente. Su perímetro y su área son:

A) 40 cm; 300 cm^2;

B) 60 cm; 150 cm^2;

C) 50 cm; 300 cm^2;

D) 75 cm; 144 cm^2;

E) ninguno de estos valores es correcto.

39) La diagonal ST del rombo SRTQ se trisecta. Entonces, el área sombreada respecto al rombo es (Fig. 25):

Fig. 25

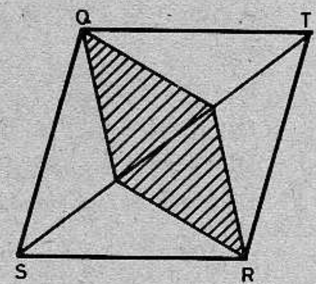
A) 25%;

B) $12\frac{1}{3}$%;

C) $33\frac{1}{3}$%;

D) $66\frac{2}{3}$%;

E) 50%.



40) El perímetro del trapezoide QVMT es (Fig. 26):

A) 36;

B) 30;

C) 50;

D) 140;

E) falta mayor información.

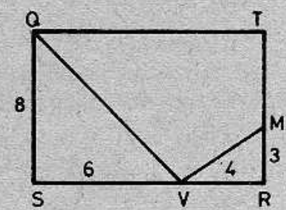


Fig. 26

41) En la Fig. 27 el total de las partes sombreadas respecto al área del cuadrado SRTQ es:

Fig. 27

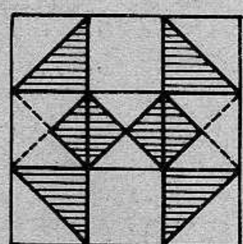
A) 25%;

B) $33\frac{1}{3}$%;

C) 50%;

D) $66\frac{2}{3}$%;

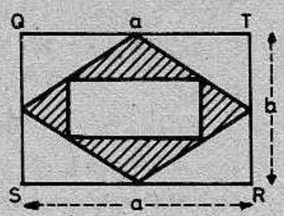
E) 4/9 partes.



42) En el rectángulo SRTQ se unen los puntos medios de sus lados y, en seguida, los puntos medios del nuevo cuadrilátero.

Entonces, el área sombreada mide (Fig. 28):

Fig. 28



A) $\frac{ab}{2}$;

B) $\frac{ab}{3}$;

C) $\frac{ab}{4}$;

D) 0,75 ab;

E) $\frac{2}{3}$ ab.

43) Siendo MN la mediana del triángulo SRT (Fig. 29), entonces analice las siguientes relaciones: (x = $\triangle$ MNT; y = trap. SRNM).

I) x : y = 1:3

II) y = 0,75 (x + y)

III) x = $\frac{1}{3}$ y

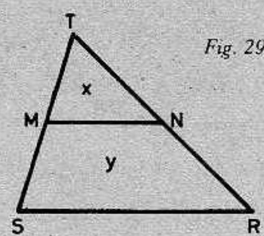


Fig. 29

De estas afirmaciones:

A) sólo I es verdadera;

B) sólo II es verdadera;

C) sólo III es verdadera;

D) sólo I y III son verdaderas;

E) las tres son verdaderas.

44) La Fig. 30 corresponde a un trapecio rectángulo cuyas medidas se indican. Entonces:

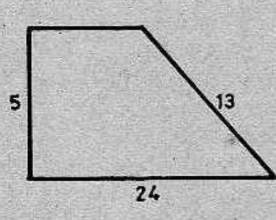


Fig. 30

A) el perímetro del trapecio mide 90;

B) el área del trapecio es 54;

C) el área del trapecio equivale a la de un triángulo de base 10 y altura 9;

D) la diagonal mayor mide $\sqrt{313}$;

E) el área del trapecio es 90.

45) En una semicircunferencia se inscribe un triángulo ABC de modo que AC = 1 cm y el ángulo CAB = 60°. El área sombreada de la figura 31 mide:

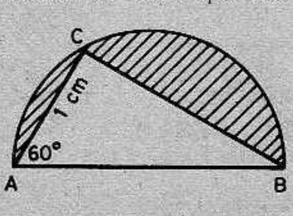


Fig. 31

A) 2 cm^2; B) 1,73 cm^2;

C) $0{,}5\,\pi\sqrt{3}$; D) $0{,}5\,(\pi - \sqrt{3})$;

E) ninguno de estos valores.

46) Siendo M el punto medio del lado SR del rombo SRTQ, entonces el área del $\triangle$ SMV con relación a la del rombo es (Fig. 32):

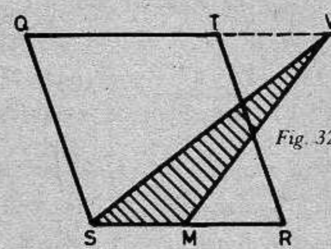


Fig. 32

A) 50%;

B) 0,25;

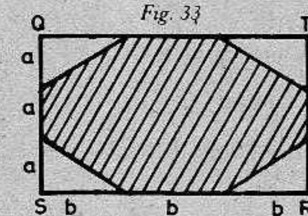
C) 1/3;

D) 0,6;

E) 12,5%.

47) En el rectángulo SRTQ (Fig. 33) el lado SR = 3b y SQ = 3a, entonces el área del octógono respecto a la del rectángulo es:

Fig. 33



A) 7/9;

B) 7/18;

C) 4/7;

D) 4/9;

E) 75%.

48) En la Fig. 33, si a = 5 cm y b = 12 cm, entonces el perímetro del octógono en cm es:

A) 60; B) 69;

C) 86; D) 42;

E) 420.

49) En la Fig. 33, si a = 5 cm y b = 12 cm, entonces el área del octógono en cm^2 es:

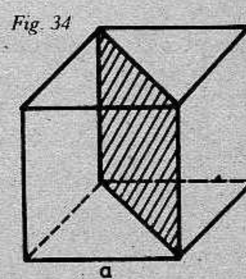
A) 360; B) 210;

C) 240; D) 270;

E) 420.

50) En un cubo de arista »a« (Fig. 34), el área sombreada del plano diagonal mide:

Fig. 34



A) a^2;

B) $a^2 \cdot \sqrt{2}$;

C) $2\,(a + a\sqrt{2})$;

D) $a\,(a + a\sqrt{2})$

E) $2a^2 \cdot \sqrt{2}$.

51) Los vértices de un triángulo tienen por coordenadas los puntos A (−5, −2), B (6, 6) y C (−5, 6). El perímetro del triángulo es aproximadamente:

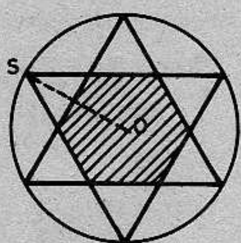
A) 19; B) 21,6;
C) 24,6; D) 32,6;
E) ninguno de estos valores.

52) Las coordenadas de los vértices de un triángulo son A (−4,5), B (−1,5) y C (3,0). El área del triángulo es:

A) 7,5; B) 15;
C) 35; D) 17,5;
E) ninguno de estos valores.

53) En una circunferencia de radio OS (Fig. 35), se dibuja una »estrella de David« (de 6 puntas). Entonces, el área sombreada respecto al área limitada por la estrella es:

Fig. 35



A) 12%;
B) $33\frac{1}{3}\%$;
C) 50%;
D) $66\frac{2}{3}\%$;
E) otro valor.

54) En la figura 35, el perímetro del hexágono sombreado es 30 cm, entonces el perímetro de la estrella es:

A) 60 cm; B) 0,30 m;
C) 450 mm; D) 7,5 dm;
E) falta mayor información.

55) Si en la figura 35 el radio SO = 5 cm, entonces el perímetro del hexágono sombreado mide:

A) $10\sqrt{3}$; B) 15;
C) 18; D) $18\sqrt{3}$;
E) $15\sqrt{3}$.

56) El 75% de un sitio rectangular de 25 m de »frente« es 300 m^2. Entonces su »fondo« es:

A) 9 m; B) 16 m;
C) 15 m; D) 12 m;
E) otro valor.

57) El área del trapecio SRTQ es (Fig. 36):

A) $12a^2$;
B) $5{,}5a^2$;
C) $4a^2$;
D) $5a^2$;
E) $8a^2$.

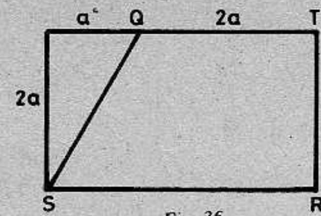
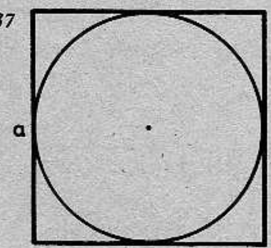


Fig. 36

58) Con una tabla cuadrada se obtiene de ella la mayor rueda. El % de madera aprovechada es aproximadamente (Fig. 37):

A) π %;
B) $\frac{a}{4}$ %;
C) $\frac{3}{4}$ a%;
D) 6,27%;
E) 78%.

Fig. 37



59) Sobre la diagonal de un cuadrado de lado unidad se construye un cuadrado; a su vez sobre la diagonal de este nuevo cuadrado se construye un tercer cuadrado. Siendo X, Y, Z las áreas de estos tres cuadrados, se obtiene entre ellas una de las siguientes alternativas (Fig. 38):

A) $Z = X + Y$;
B) $Y = \frac{X+Z}{2}$;
C) $X : Y : Z = 1 : 2 : 3$;
D) $X : Y : Z = 1 : 2 : 4$;
E) $X : Y : Z = 1 : \sqrt{2} : 2$.

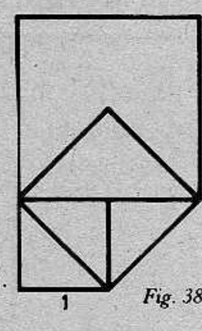
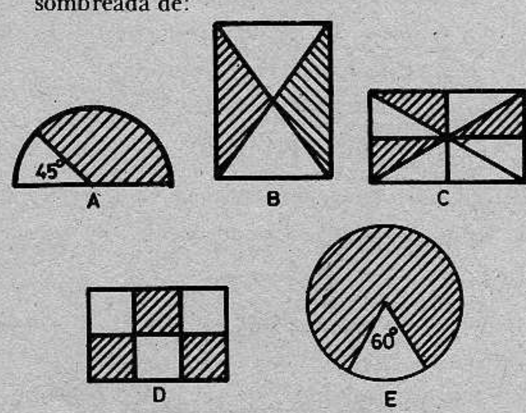


Fig. 38

60) El producto de las fracciones $\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{8}$ está representado gráficamente por la parte sombreada de:

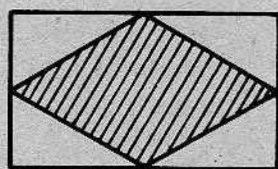


61) El largo de un rectángulo de 72 cm^2 es el doble del ancho. El perímetro del rectángulo en cm es:

A) 36; B) 72;
C) 18; D) 48;
E) otro valor.

62) Un rectángulo tiene un lado 20 cm más que el otro; el perímetro mide 100 cm. Se unen sucesivamente los puntos medios de sus lados formándose un # cuyas diagonales suman en cm (Fig. 39):

Fig. 39

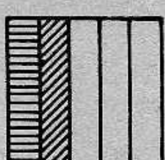


A) 15;
B) 35;
C) 100;
D) 50;
E) otro valor.

63) Los lados de un rectángulo miden 16 cm y 9 cm; si el lado mayor se reduce a la mitad y el menor se duplica, entonces:

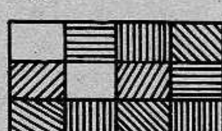
A) ambos conservan su área y perímetro;
B) el perímetro del segundo es 4% mayor que el del primero;
C) las diagonales de ambos miden lo mismo;
D) sus áreas están en la razón de 1: 2;
E) no varía nada por tener la misma área.

64) La suma $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ está representada gráficamente por la parte sombreada de:



I

II

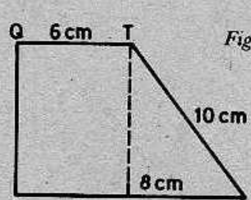


III

A) sólo I
B) sólo II; D) sólo I y II;
C) sólo III; E) sólo II y III.

65) El área del trapecio SRTQ es en cm^2 (Fig. 40):

Fig. 40



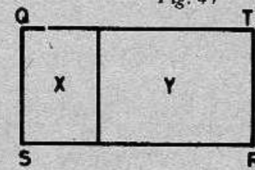
A) 240;
B) 120;
C) 60;
D) 84;
E) 42.

66) El largo de un sitio rectangular tiene 5 metros más que su ancho. Si el perímetro del sitio es 70 metros, entonces el lado mayor mide en metros:

A) 10; B) 15;
C) 20; D) 25;
E) 35.

67) El rectángulo SRTQ se divide en un cuadrado X de 81 cm^2 y en un rectángulo de 63 cm^2. Entonces, el perímetro del rectángulo SRTQ es (Fig. 41):

Fig. 41



A) 144 cm;
B) 48 cm;
C) 50 cm;
D) 72;
E) otro valor.

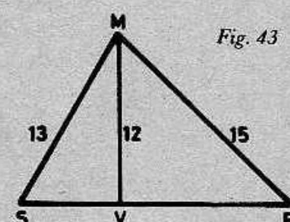
68) Si r = 7 cm y $\pi = 22/7$, entonces el área sombreada mide (Fig. 42):

A) 56 cm^2;
B) 98 cm^2;
C) 42 cm^2;
D) 21 cm^2;
E) otro valor.

Fig. 42

69) El perímetro del triángulo SRM es (Fig. 43):

Fig. 43



A) 42;
B) 30;
C) 195;
D) 84;
E) otro valor.

70) Un hexágono regular está inscrito en una circunferencia de 20 cm de radio. El perímetro del hexágono en cm es:

A) $600\sqrt{3}$; B) $100\sqrt{3}$;
C) 120; D) 60;
E) $60\sqrt{3}$.

71) La parte sombreada representa del total (Fig. 44):

A) $\frac{1}{9}$;
B) $\frac{2}{9}$;
C) $\frac{1}{18}$;
D) $\frac{1}{2}+\frac{1}{9}$;
E) $\frac{7}{9}-\frac{1}{2}$.

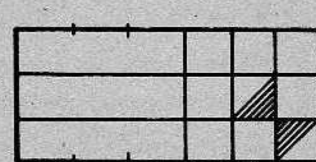


Fig. 44

72) Un sitio rectangular SRTQ de 225 m² se divide en un cuadrado X de 81 m² y un rectángulo Y. Entonces, las dimensiones de los lados de Y son (Fig. 45):

A) 18 m y 8 m;

B) 24 m y 6 m;

C) 36 m y 4 m;

D) 16 m y 9 m;

E) cualquiera de las anteriores.

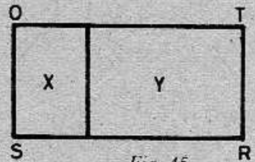


Fig. 45

73) El perímetro del trapecio SRTQ es (Fig. 46):

A) 0,04 km;

B) 0,4 metros;

C) 32 cm;

D) 3,2 metros;

E) ninguno de estos valores.

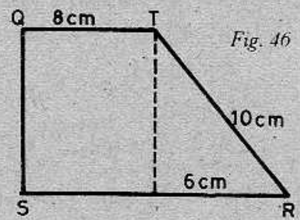


Fig. 46

74) Si MN = 15 cm, entonces el perímetro de la estrella es (Fig. 47):

A) 75 cm;

B) 50 cm;

C) 25 cm;

D) 100 cm;

E) otro valor.

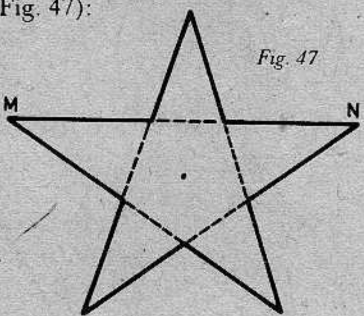


Fig. 47

75) Los lados de un rectángulo miden SR = a, SQ = b. Se divide el lado SR en tres partes iguales y QT en dos partes iguales. Entonces, la razón entre las áreas de la parte sombreada y la no sombreada es (Fig. 48):

A) a/b;

B) 2a/3b;

C) 3/2;

D) 1;

E) ab/2.

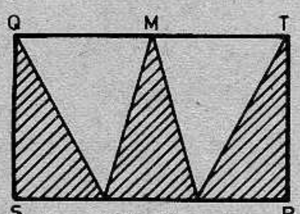


Fig. 48

76) El área de un círculo es 64π cm². Entonces, su circunferencia mide en cm:

A) 32π;

B) 64π;

C) 8;

D) 16;

E) 16π.

77) Las diagonales del rombo SRTQ (Fig. 49) miden 20 cm y 50 cm. Entonces el área de la figura SVRTMQ en cm² es:

A) 1500;

B) 750;

C) 1200;

D) 1000;

E) otro valor.

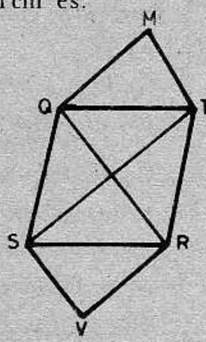


Fig. 49

78) En el rectángulo SRTQ (Fig. 50) se une el punto medio M con Q. La razón entre las partes X e Y en que queda dividido el rectángulo es:

A) 1/3;

B) 1/4;

C) 2/3;

D) 3/4;

E) 0,5.

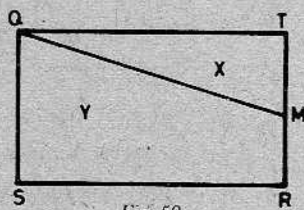


Fig. 50

79) Entre las partes sombreadas de los tres rectángulos de la Fig. 51, se cumple una de las siguientes alternativas:

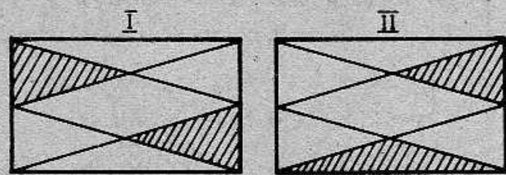
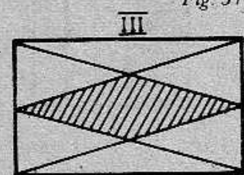


Fig. 51



A) I < III < II;

B) I + II = III;

C) III > II > I;

D) I = II = III;

E) II = 50% de III.

80) En el # SRTQ de la Fig. 52, la alternativa correcta que expresa la razón entre la parte sombreada y el paralelogramo es:

A) 2/7;

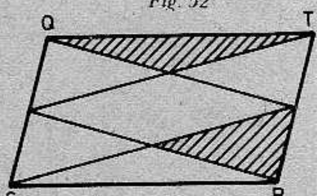
B) 4/7;

C) 12,5%;

D) $33\frac{1}{3}$%;

E) 25%.

Fig. 52



81) El área sombreada de la Fig. 53, siendo OR = r, mide:

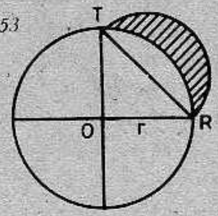


Fig. 53

A) r^2;

B) $2r^2$;

C) $\frac{1}{2}r^2 \cdot \sqrt{2}$;

D) $r^2 \cdot \sqrt{2}$;

E) lo mismo que el triángulo ORT.

82) En la Fig. 54 el radio OR = a; entonces, la suma de las partes sombreadas vale:

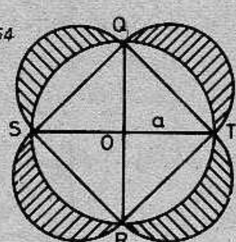


Fig. 54

A) a^2;

B) $1{,}5\ a^2$;

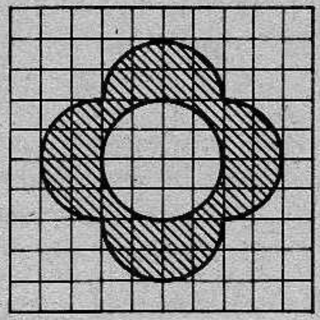
C) $\frac{1}{2}a^2 \cdot \sqrt{2}$;

D) $a^2 \cdot \sqrt{2}$;

E) lo mismo que el cuadrado SRTQ.

Obs.: En los ejercicios 83 al 90 cada *cuadradito* representa 1 m^2.

83) El área sombreada de la Fig. 55 mide en m^2:

Fig. 55


A) 20;

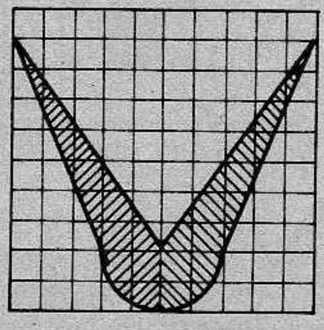
B) 20π;

C) 28,56;

D) 9,42;

E) otro valor

84) El área sombreada de la Fig. 56 mide en m^2:

Fig. 56


A) 15,14;

B) 24,56;

C) 14π;

D) 20,28;

E) un valor distinto a los anteriores.

85) El área sombreada de la Fig. 57 mide en m^2:

A) 30,88;

B) 58;

C) 28,88;

D) 64;

E) un valor distinto a los anteriores.

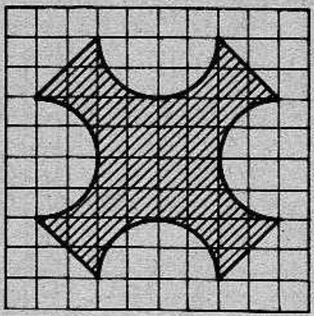
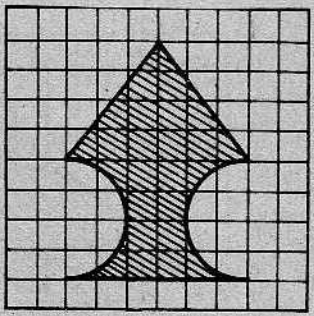


Fig. 57

86) El área sombreada de la Fig. 58 mide en m^2:

Fig. 58


A) 33;

B) 55,56;

C) 23,44;

D) 29,44;

E) un valor distinto a los anteriores.

87) El área sombreada de la Fig. 59 mide en m^2:

A) 25,12;

B) 16;

C) 66,24;

D) 50,24;

E) un valor distinto a los anteriores.

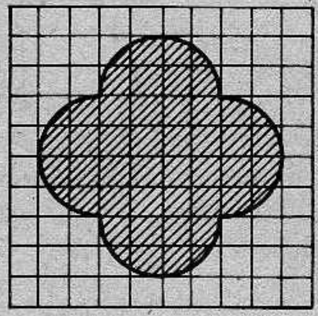
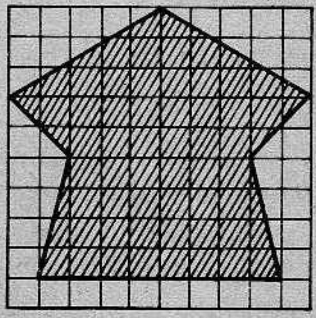


Fig. 59

88) El área sombreada de la Fig. 60 mide en m^2:

Fig. 60


A) 61;

B) 59;

C) 36;

D) 72;

E) un valor distinto a los anteriores.

89) El área sombreada de la Fig. 61 mide en m^2:

A) 31,44;

B) 35,44;

C) 54;

D) 89,44;

E) un valor distinto a los anteriores.

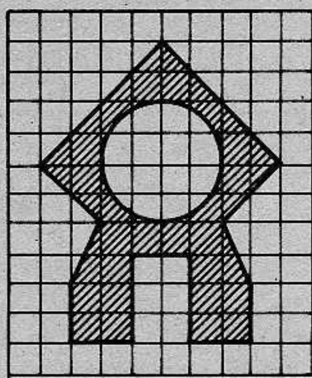
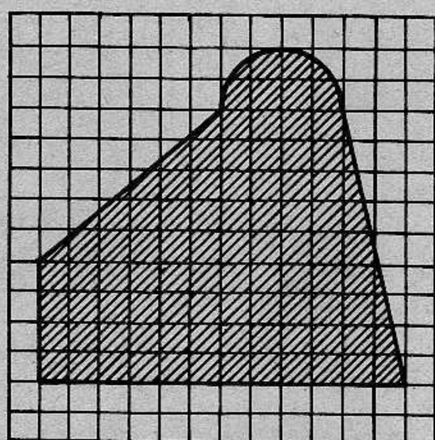


Fig. 61

90) El área de la Fig. 62 mide en m^2:

Fig. 62



A) 41,14; B) 90,28;

C) $76 + \pi$; D) $76 + 4\pi$;

E) otro valor.

91) La razón entre las áreas de los tres triángulos en que está dividido el rectángulo SRTQ es (Fig. 63):

A) 2 : 3 : 4;

B) 2 : 3 : 5;

C) 1 : 2 : 3;

D) 1 : 3 : 5;

E) 3 : 4 : 5.

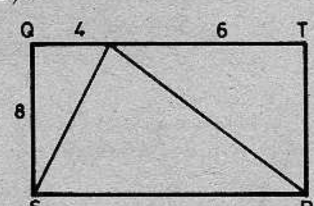


Fig. 63

92) La transversal X del rectángulo VMTQ mide (Fig. 64):

Fig. 64

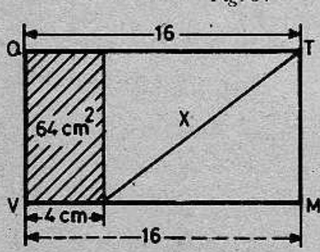
A) 20 cm;

B) 12 cm;

C) 24 cm;

D) 32 cm;

E) 16 cm.



93) El área sombreada mide en cm^2 (Fig. 65):

A) $\sqrt{2}$;

B) $0,5 \cdot \sqrt{2}$;

C) 2;

D) 1;

E) 0,5.

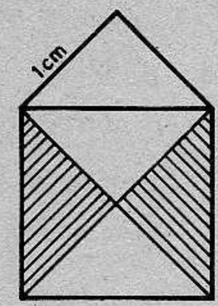


Fig. 65

94) Si se construye un cuadrado equivalente al rectángulo RSTQ, debe cumplirse una de las alternativas siguientes (Fig. 66):

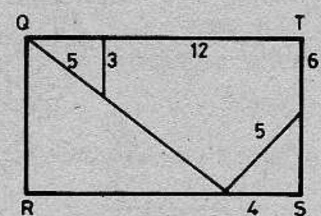


Fig. 66

A) el área del cuadrado es 50;

B) el perímetro del cuadrado es 48;

C) el área del cuadrado es 144 y su perímetro es 24;

D) el perímetro del cuadrado es 25;

E) el área del cuadrado es 48 y su perímemetro 144.

95) Si cada cuadradito de la figura 67 representa 1 m^2, entonces el perímetro de la zona sombreada mide aproximadamente (considere $\pi = 3,14$):

A) 15,92;

B) 23,20;

C) 12,78;

D) 17,56;

E) otro valor.

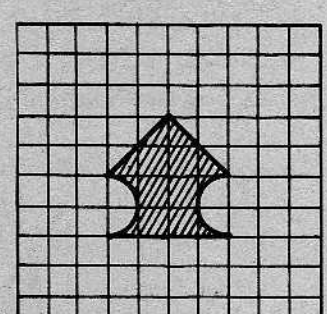


Fig. 67

96) Si cada cuadradito representa 1 m^2, entonces el área sombreada mide aproximadamente (Fig. 68):

A) $4\pi\ m^2$;

B) $2{,}5\pi\ m^2$;

C) $\pi\ m^2$;

D) $3{,}35\pi\ m^2$;

E) $5\pi\ m^2$.

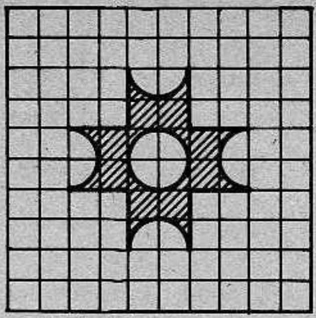


Fig. 68

97) De estos tres triángulos se afirma que (Fig. 69):

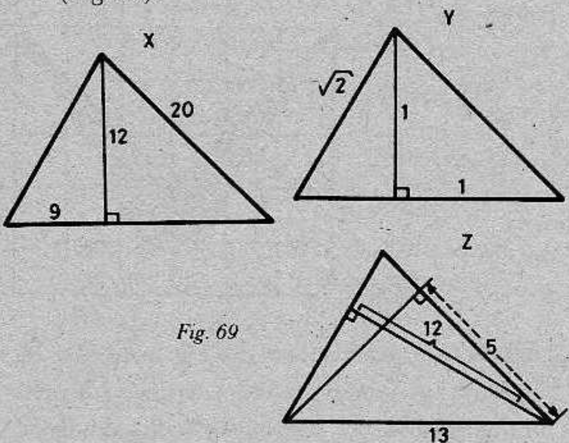


Fig. 69

I) X e Y son rectángulos;
II) Y y Z son isósceles;
III) los tres son rectángulos escalenos.
De estas afirmaciones son verdaderas:

A) sólo I; B) sólo II;
C) sólo III; D) sólo I y II;
E) las tres.

98) Los lados del rectángulo SRTQ miden »a« y »b«. El punto P divide al lado SR de modo que PS:PR = 2:1. Al unir los puntos medios L y H de PQ y PT, el área del △ LPH es (Fig. 70):

A) $\frac{1}{4}$ ab;

B) $\frac{2}{3}$ ab;

C) $\frac{1}{8}$ ab;

D) $\frac{3}{8}$ ab;

E) $\frac{2}{6}$ ab.

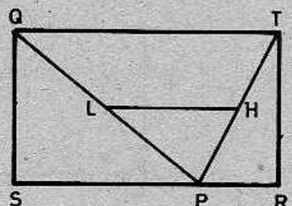


Fig. 70

99) La razón entre las áreas de los tres triángulos en que está dividido el rectángulo SRTQ es (Fig. 71):

A) 4 : 9 : 16;

B) 4 : 9 : 5;

C) 9 : 12 : 16;

D) $3 : 4 : 2\sqrt{3}$;

E) 9 : 16 : 25.

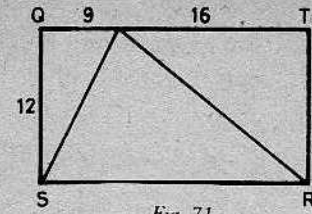


Fig. 71

100) El área del trapecio RSTU es (Fig. 72):

A) 204;

B) 108;

C) 240;

D) 408;

E) 428.

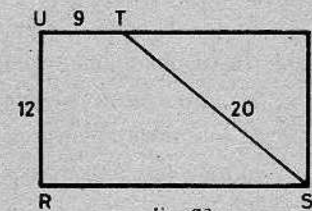


Fig. 72

101) En el △ SRQ la base SR = 20 cm y la altura correspondiente a ella misma mide 10 cm. El punto P está a 4 cm de la base. El área sombreada mide (Fig. 73):

A) $120\ cm^2$;

B) $40\ cm^2$;

C) $80\ cm^2$;

D) mide lo mismo que la zona no sombreada;

E) $60\ cm^2$.

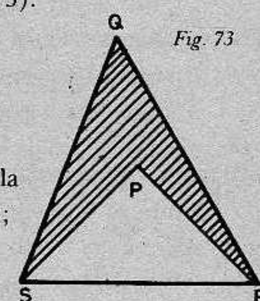


Fig. 73

102) En una semicircunferencia se inscribe un △ rectángulo SRT. Si el vértice T se corre sobre la semicircunferencia se obtienen diferentes △ para los cuales una de las alternativas siguientes es verdadera (Fig. 74):

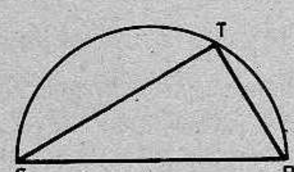


Fig. 74

A) todos los △ que se forman son rectángulos escalenos;

B) la mayor área la obtiene aquél en que uno de los ∡ basales mide 60°;

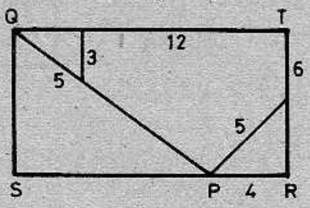
C) los ángulos basales miden 45° cada uno;

D) la mayor área la tiene el △ rectángulo isósceles que se forma;

E) falta información para decidir cuál es el de mayor área.

103) En el rectángulo SRTQ la transversal PQ mide (Fig. 75):

Fig. 75



A) 25;
B) 20;
C) 15;
D) 10;
E) 21.

104) Los lados de un rectángulo miden 3a y 4a. Al unir sucesivamente los puntos medios de los lados se obtiene un cuadrilátero que cumple con una de las alternativas siguientes:

A) su perímetro es igual a la suma de las diagonales del rectángulo;
B) su área es el 25% del área del rectángulo;
C) sus diagonales suman 12a;
D) sus lados son perpendiculares a las diagonales del rectángulo;
E) tanto su perímetro como su área son la mitad de la del rectángulo.

105) Un sitio rectangular mide 640 m^2. Si su frente es 16 metros, entonces la reja que lo rodea mide:

A) 40 m; B) 32 m;
C) 56 m; D) 112 m;
E) 160 m.

106) El volumen de un cubo es 64 cm^3. Su superficie exterior mide:

A) 16 cm^2; B) 96 cm^2;
C) 64 cm^2; D) 128 cm^2;
E) 32 cm^2.

107) Si el lado mayor del rectángulo mide 24 cm, entonces el perímetro de las tres circunferencias en cm es (Fig. 76):

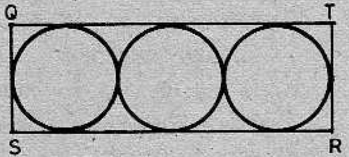


Fig. 76

A) 32π;
B) 24π;
C) 48π;
D) 8π;
E) 18π.

108) Si cada cuadradito representa 1 m^2, entonces el área sombreada mide aproximadamente (Fig. 77):

A) 9, 14;
B) 10, 14;
C) 11, 14;
D) 12, 14;
E) π^2.

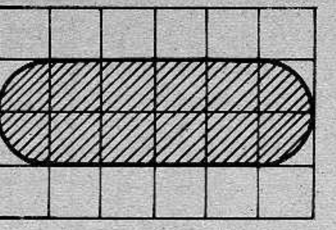


Fig. 77

109) Si un cuadradito = 1 m^2, entonces el área sombreada mide aproximadamente (Fig. 78):

A) 4,57;
B) 3,8;
C) 4π;
D) 2π;
E) 3π.

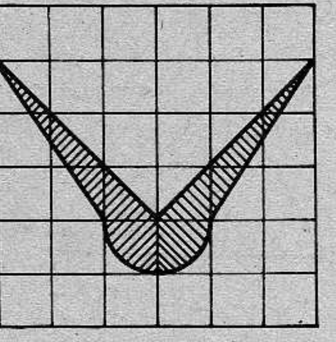


Fig. 78

110) El lado del cuadrado SRTQ mide »a«. Se unen sus puntos medios y después los puntos medios del nuevo cuadrado. Entonces, el área de este último cuadrado mide (Fig. 79):

A) $0{,}5a^2$;
B) $0{,}25a^2$;
C) $0{,}5\sqrt{2a^2}$;
D) $\frac{3}{8}a^2$;
E) $a^2\sqrt{2}$.

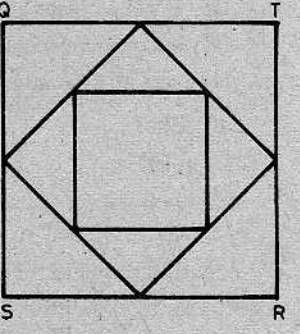


Fig. 79

111) La razón entre las áreas de los tres △ en que está dividido el rectángulo SRTQ es (Fig. 80):

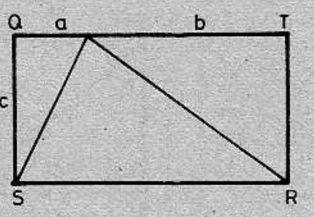


Fig. 80

A) a : b: c;
B) a : b : 2c;
C) a : b : (a + b);
D) a : b : (b + c);
E) (a +b) : (b +c) : (a +c).

112) Para que en el rectángulo SRTQ se cumpla que (Fig. 81): $\triangle I = \triangle II - \triangle III$, el punto X debiera estar:

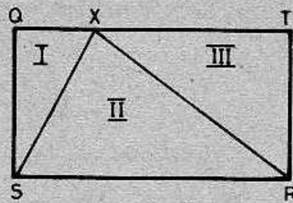


Fig. 81

A) en cualquier punto de QT;
B) en el punto medio de QT, no puede estar;
C) sólo en un punto de modo que $\overline{XT} = 2 \cdot \overline{QX}$;
D) sólo en un punto tal que $\overline{XT} = 3 \cdot \overline{QX}$;
E) falta mayor información.

113) El área de un cuadrado es 36 cm^2. Si un $\triangle$ equilátero tiene el mismo perímetro que el cuadrado, entonces el lado del $\triangle$ mide:

A) 4 cm; B) 6 cm;
C) 8 cm; D) 12 cm;
E) 9 cm.

114) Si para calcular el área de un cuadrilátero se encuentra que es igual al semiproducto de sus diagonales, entonces es:

A) un # equilátero;
B) un # rectángulo;
C) un trapecio rectángulo;
D) un # oblicuángulo;
E) en ningún cuadrilátero se procede así.

115) El área de un cuadrado es 2,56 cm^2. Entonces, su perímetro es:

A) 10,24 cm; B) 64 cm;
C) 32 cm; D) 6,4 cm;
E) 12,8 cm.

116) El perímetro del trapecio de la figura 82 es:

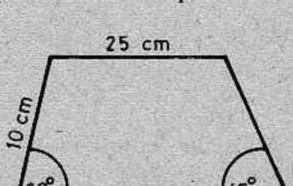


Fig. 82

A) poco menos de 70 cm;
B) $(70 - \sqrt{6})$ cm;
C) 65 cm $+ \sqrt{3}$ cm;
D) $2(6\sqrt{3} + 65)$ cm;
E) $5(13 + \sqrt{6} + \sqrt{3})$ cm.

117) El área del trapecio de la figura 82 es:

A) 250 cm^2;
B) $175\sqrt{3}$ cm^2;
C) $(137{,}5\sqrt{3} + 37{,}5)$ cm^2;
D) $5(13 + \sqrt{6} + \sqrt{3})$ cm^2;
E) faltan datos.

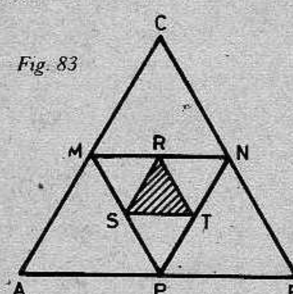
118) Una diagonal de un rombo mide 40 cm y forma un ángulo de 60° con los lados adyacentes. El área del rombo es:

A) casi 800 cm^2;
B) casi 692 cm^2;
C) poco más de 1.384 cm^2;
D) $600\sqrt{3}$ cm^2;
E) debe darse otro dato para poder calcularlo.

119) El triángulo ABC es equilátero de lado a; en la figura 83 se han dibujado también los triángulos que se obtienen al unir los puntos medios de los lados del triángulo ABC y MNP, respectivamente. El área del triángulo RST es:

A) $\frac{a^2}{16}$;
B) $\frac{a^2}{8}\sqrt{3}$;
C) $\frac{a^2}{16}\sqrt{3}$;
D) $\frac{a^2}{32}\sqrt{3}$;
E) $\frac{a^2}{64}\sqrt{3}$.

Fig. 83



120) El cuadrado ABCD de la figura 84 tiene por lado a. Los cuadrados inscritos que siguen se obtienen uniendo los puntos medios de los lados del cuadrado anterior. La razón entre los perímetros de estos tres cuadrados es:

A) 1 : 2 : 4;
B) $1 : \sqrt{2} : 2$;
C) $\sqrt{2} : 2\sqrt{2} : 2$;
D) $2\sqrt{2} : 2 : 1$;
E) $1 : 2 : 2\sqrt{2}$.

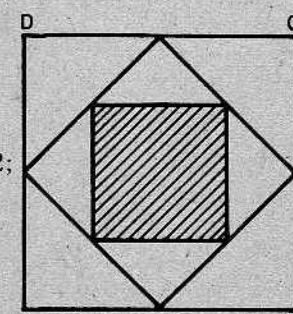


Fig. 84

121) En la figura 84 la razón entre las áreas de los tres cuadrados, siendo a el lado del mayor, es:

A) $1 : 2 : 4$;

B) $1 : \sqrt{2} : 2$;

C) $\sqrt{2} : 2\sqrt{2} : 2$;

D) $2\sqrt{2} : 2 : 1$;

E) $1 : 4 : 8$.

122) En la figura 84 la razón entre las diagonales de los tres cuadrados es:

A) $1 : 2 : 4$;

B) $2\sqrt{2} : 2 : \sqrt{2}$;

C) $1 : \sqrt{2} : 2\sqrt{2}$;

D) $1 : 2 : 2\sqrt{2}$;

E) $1 : 2 : \sqrt{8}$.

123) En el $\triangle$ SRQ se obtiene una de las alternativas siguientes (Fig. 85):

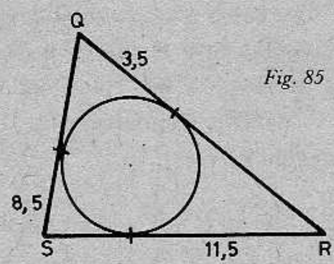


Fig. 85

A) SR = 15;

B) RQ = 12;

C) perímetro = 23,5;

D) perímetro = 47;

E) faltan más antecedentes.

124) El área de la parte sombreada (Fig. 86) del # SRTQ en el cual M, N, H y L son puntos medios, es en relación con el #:

A) 3/4;

B) 1/6;

C) 1/16;

D) 3/8;

E) 1/8.

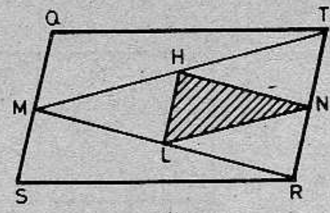


Fig. 86

Resp.: 1 = C; 2 = E; 3 = B; 4 = D; 5 = C; 6 = C; 7 = A; 8 = E; 9 = A; 10 = C; 11 = E; 12 = A; 13 = D; 14 = A; 15 = E; 16 = A; 17 = D; 18 = D; 19 = B; 20 = C; 21 = C; 22 = D; 23 = D; 24 = C; 25 = E; 26 = C; 27 = A; 28 = C; 29 = D; 30 = B; 31 = C; 32 = C; 33 = B; 34 = B; 35 = B; 36 = E; 37 = A; 38 = B; 39 = C; 40 = B; 41 = B; 42 = C; 43 = E; 44 = E; 45 = D; 46 = B; 47 = A; 48 = C; 49 = E; 50 = B; 51 = D; 52 = A; 53 = C; 54 = A; 55 = A; 56 = B; 57 = D; 58 = E; 59 = D; 60 = A; 61 = A; 62 = D; 63 = B; 64 = E; 65 = C; 66 = C; 67 = C; 68 = D; 69 = A; 70 = C; 71 = C; 72 = D; 73 = B; 74 = E; 75 = D; 76 = E; 77 = B; 78 = A; 79 = D; 80 = E; 81 = E; 82 = E; 83 = C; 84 = D; 85 = A; 86 = C; 87 = E; 88 = B; 89 = A; 90 = B; 91 = B; 92 = A; 93 = D; 94 = B; 95 = A; 96 = D; 97 = D; 98 = C; 99 = E; 100 = A; 101 = E; 102 = D; 103 = C; 104 = A; 105 = D; 106 = B; 107 = B; 108 = C; 109 = A; 110 = B; 111 = C; 112 = A; 113 = C; 114 = A; 115 = D; 116 = E; 117 = C; 118 = C; 119 = E; 120 = B; 121 = A; 122 = B; 123 = D; 124 = E.

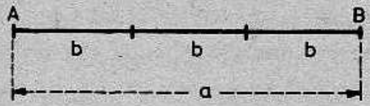
 LUIS SAAVEDRA

Trazos conmensurables e inconmensurables. Máxima común medida de dos trazos. Trazos y segmentos proporcionales. Teorema Particular y General de Thales de Mileto. Construcción de la tercera y cuarta proporcional geométrica.

281. TRAZOS CONMENSURABLES E INCONMENSURABLES

Medir un trazo consiste en calcular las veces que otro trazo, tomado como unidad, cabe en él. **Puede suceder que:**

A) el segundo trazo (trazo unitario) esté contenido un número exacto de veces en el primero, es decir, no existe resto. En este caso se dice que el segundo trazo es una medida del primero o que es una *alícuota parte* de él.



En el ejemplo de la figura, el trazo »b« es una alícuota parte de $\overline{AB}$ y está contenido exactamente 3 veces en $\overline{AB}$ (no hay resto). Es decir: $a = 3 \cdot b$, lo que indica, también, que »a« es un múltiplo de »b«.

En general, si »b« es una medida de »a« y cabe »n« veces en »a«, se obtiene: $a = n \cdot b$

B) el segundo trazo no esté contenido un número exacto de veces en el primero, sino que queda un resto.

Dos o más trazos pueden tener uno o más trazos que son »comunes medidas« a ellos. Por ej., si el metro es común medida de dos trazos, también será común medida de ellos el dm, el cm, el mm, etc.

Cuando existe una común medida se dice que los trazos son *conmensurables* y si no existe, los trazos son *inconmensurables*.

282. MAXIMA COMUN MEDIDA

De dos trazos es el mayor trazo que es común medida de ellos.

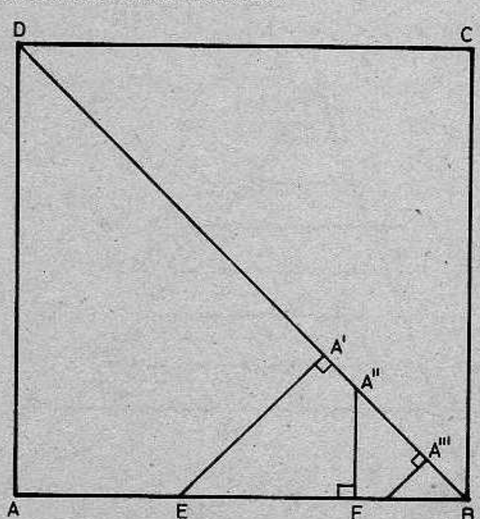
En Aritmética los divisores comunes a 48 y 72 son: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 y 24, pero el *mayor* de ellos es el »24« que es el *Máximo Común Divisor* de 48 y 72. Para su determinación existe más de un método. El más sencillo consiste en dividir el mayor de los números dados por el menor (72 : 48); si existe resto (en este ejemplo el resto es 24) se divide el menor de los números por el resto (48 : 24). Ahora, no tenemos resto, pero si lo hubiera se divide el primer resto por el nuevo resto y así sucesivamente. El Máximo Común Divisor es el último divisor que se escribe cuando no queda resto. En nuestro ejemplo, es el 24.

En forma análoga, para determinar la Máxima Común Medida de dos trazos, se procede a aplicar el menor sobre el mayor. Si no queda resto significa que el trazo menor es la Máxima Común Medida. Pero si queda un resto, se aplica éste sobre el trazo menor. Si aún se obtiene un resto se aplica éste sobre el resto anterior, y así sucesivamente.

Si uno de los restos »r« cabe exactamente en el resto anterior »R«, se dice que »r« es la *máxima común medida* de los dos trazos.

Si siempre quedara un resto, aunque fuese muy pequeño, se dice que los trazos son inconmensurables.

Daremos el siguiente ejemplo: si se hace esta operación entre la diagonal de un cuadrado y su lado, se llega a la conclusión que entre ellos no existe una común medida, es decir, que son inconmensurables. En efecto:



1) se hace $\overline{DA'} = \overline{DA} \Rightarrow \overline{BA'} = \overline{BD} - \overline{DA} =$ 1^er^ resto;

2) en A' $\perp$ BD $\Rightarrow \overline{A'E} = \overline{A'B} = \overline{AE}$;

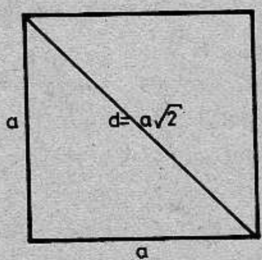
3) se hace $\overline{EF} = \overline{EA'} \Rightarrow \overline{FB}$ = segundo resto;

4) en F $\perp$ $\overline{AB}$ resulta $\overline{FB} = \overline{FA''}$;

5) se hace A''A''' = A''F $\Rightarrow$ BA''' = = BA'' − A''A''' = 3^er^ resto;

6) se traza la $\perp$ en A''', etc.

La operación se continúa indefinidamente sin encontrar un trazo que sea una común medida, pues siempre se obtiene un resto que puede ser »tan pequeño como se quiera«.



Designando por »a« el lado del cuadrado y aplicando el Teorema de Pitágoras, la diagonal de este cuadrado vale $a\sqrt{2}$. Por lo tanto, la razón entre la diagonal y el lado es:

$$\frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2} = 1{,}4142135\ldots$$

(número irracional que es inconmensurable).

283. TEOREMA PARTICULAR DE THALES

Al cortar los lados de un ángulo por dos o más paralelas, los segmentos que interceptan en los lados son proporcionales.

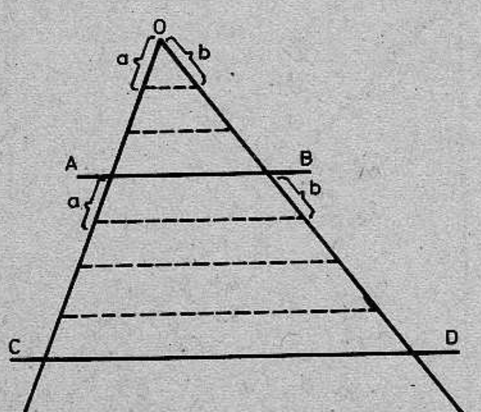


Fig. I

H.) $\overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{CD}$

T.) $\dfrac{\overline{OA}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{OB}}{\overline{BD}}$

D.) Siendo »a« una medida común (puede o no ser la Máx. Común Medida) para los trazos $\overline{OA}$ y $\overline{AC}$ que está contenida 3 veces exactas en $\overline{OA}$ y 4 en $\overline{AC}$, obtendremos:

$$\left.\begin{array}{l}\overline{OA} = 3 \cdot a\\ \overline{AC} = 4 \cdot a\end{array}\right\} :$$

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{AC}} = \frac{3 \cdot \cancel{a}}{4 \cdot \cancel{a}} \Rightarrow \text{X)}\ \frac{\overline{OA}}{\overline{AC}} = \frac{3}{4}$$

Por lo tanto: *La razón entre dos trazos es igual a la razón entre los números de sus medidas.*

Al trazar por los puntos de división las paralelas a $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, también $\overline{OB}$ queda dividido en tres partes iguales y $\overline{BD}$ en 4 partes iguales; estas partes son iguales entre sí pero distintas a las anteriores, es decir: a $\neq$ b (¿En qué caso se tendría a = b?)

Luego: $\left.\begin{array}{l}\overline{OB} = 3 \cdot b\\ \overline{BD} = 4 \cdot b\end{array}\right\} :$

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{BD}} = \frac{3 \cdot \cancel{b}}{4 \cdot \cancel{b}} \Rightarrow \text{Y)}\ \frac{\overline{OB}}{\overline{BD}} = \frac{3}{4}$$

De X) e Y) se deduce la proporción:

$$\text{I)}\ \boxed{\frac{\overline{OA}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{BD}}}$$

Por lo tanto, queda demostrada la tesis.

Pero, al componer esta proporción y compararla con los antecedentes o consecuentes, respectivos, se obtienen las dos proporciones siguientes:

$$\frac{\overline{OA} + \overline{AC}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB} + \overline{BD}}{\overline{OB}} \quad \therefore \quad \text{II)}\ \boxed{\frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OB}}}$$

$$\text{pues} \left\{\begin{array}{l}\overline{OA} + \overline{AC} = \overline{OC}\\ \overline{OB} + \overline{BD} = \overline{OD}\end{array}\right.$$

$$\frac{\overline{OA} + \overline{AC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{OB} + \overline{BD}}{\overline{BD}} \quad \therefore \quad \text{III)}\ \boxed{\frac{\overline{OC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{BD}}}$$

Al trazar por A la paralela a $\overline{OD}$, son los lados del $\measuredangle\ \alpha$ los que quedan cortados por dos paralelas, pues $\overline{AE} \,//\, \overline{OD}$. La proporción III) aplicada a este ángulo, expresa que (Fig. II):

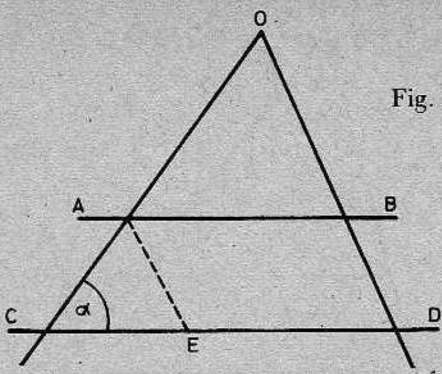


Fig. II

$$\frac{\overline{CO}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{ED}} \Rightarrow \text{IV)} \boxed{\frac{\overline{CO}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}}$$

pues $\overline{AB} = \overline{ED}$ (lados opuestos de un #).

284. Interpretando esta última proporción IV) en la primitiva Fig. 1 se obtiene el siguiente teorema: *Al cortar los lados de un ángulo por dos o más paralelas, las paralelas son entre sí como los segmentos medidos desde las paralelas al vértice.*

En resumen en la figura I ó II podemos escribir las cinco proporciones siguientes:

I) $\frac{\overline{OA}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{BD}}$

II) $\frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OB}}$

III) $\frac{\overline{OC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{BD}}$

IV) $\frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{CD}}$

V) $\frac{\overline{OB}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{DC}}$

Como en una proporción pueden alternarse, permutarse e invertirse sus términos, se pueden aplicar estas propiedades a cada una de las cinco proporciones anteriores, obteniéndose ocho maneras diferentes de escribir cada una de ellas. Así, la proporción I) da origen a dos proporciones que comienzan con $\overline{OA}$ y terminan con $\overline{BD}$ que son:

I) $\overline{OA} : \overline{AC} = \overline{OB} : \overline{BD}$
$\overline{OA} : \overline{OB} = \overline{AC} : \overline{BD}$

(se alternaron los medios de I)

Hay dos proporciones que comienzan con $\overline{AC}$ y terminan con $\overline{OB}$:

$\overline{AC} : \overline{OA} = \overline{BD} : \overline{OB}$ (se invirtió la I)

$\overline{AC} : \overline{BD} = \overline{OA} : \overline{OB}$ (se alternaron los extremos de la I y después se invirtió)

Lo mismo puede hacerse con $\overline{OB}$ y $\overline{BD}$, obeniéndose:

$\overline{OB} : \overline{BD} = \overline{OA} : \overline{AC}$ (se permutó la I)

$\overline{OB} : \overline{OA} = \overline{BD} : \overline{AC}$ (Se alternaron los extremos de I y después se permutó)

$\overline{BD} : \overline{OB} = \overline{AC} : \overline{OA}$ (se alternaron los medios y los extremos de I)

$\overline{BD} : \overline{AC} = \overline{OB} : \overline{OA}$ (se alternaron los extremos de I)

En total podemos escribir y obtener las 8 proporciones siguientes:

$$\left.\begin{array}{l}
\overline{OA} : \overline{AC} = \overline{OB} : \overline{BD} \\
\overline{OA} : \overline{OB} = \overline{AC} : \overline{BD} \\
\overline{AC} : \overline{OA} = \overline{BD} : \overline{OB} \\
\overline{AC} : \overline{BD} = \overline{OA} : \overline{OB} \\
\overline{OB} : \overline{BD} = \overline{OA} : \overline{AC} \\
\overline{OB} : \overline{OA} = \overline{BD} : \overline{AC} \\
\overline{BD} : \overline{BO} = \overline{AC} : \overline{OA} \\
\overline{BD} : \overline{AC} = \overline{BO} : \overline{OA}
\end{array}\right\} \Rightarrow \text{en todas ellas se verifica que: } \boxed{\overline{OA} \cdot \overline{BD} = \overline{AC} \cdot \overline{OB}}$$

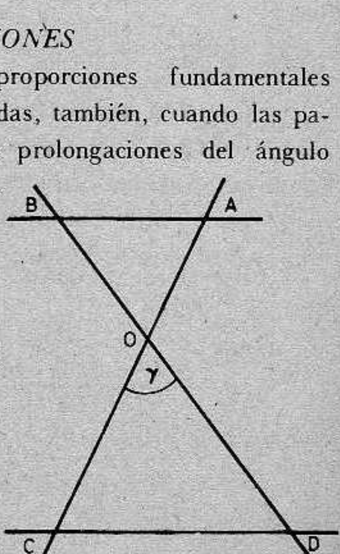
Con cada una de *las cinco proporciones fundamentales* podemos hacer lo mismo que hemos hecho sólo con la I) y, por lo tanto, en la figura I ó II podemos formar y leer 40 proporciones.

Como ejercicio escriba todas las proporciones que comienzan con $\overline{OB}$ (son 6); después, todas las que comienzan con $\overline{AB}$ (son 4).

285. OBSERVACIONES

1) Las cinco proporciones fundamentales anteriores son válidas, también, cuando las paralelas cortan las prolongaciones del ángulo más allá del vértice.

Fig. III



La demostración es análoga a la que hemos hecho para la figura I ó II. Usted puede hacerla como ejercitación (Fig. III).

2) Para este *Teorema de Proporcionalidad de Thales* existen varias demostraciones, y de ellas, la que desarrollaremos a continuación, se basa en la equivalencia de áreas.

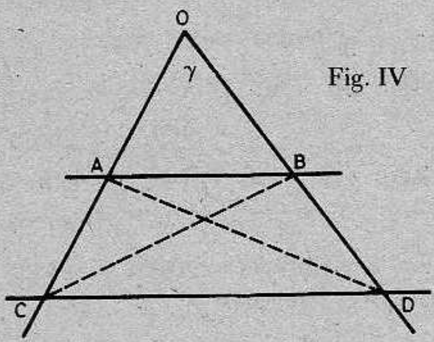


Fig. IV

En la figura IV, los △ OCB y AOB tienen la misma altura h' desde B (no dibujada en la figura para no enredarla). Luego:

$$\left.\begin{aligned}\triangle OAB &= \tfrac{1}{2}\,\overline{OA}\cdot h' \\ \triangle OCB &= \tfrac{1}{2}\,\overline{OC}\cdot h'\end{aligned}\right\} \therefore \text{ a) } \frac{\triangle OAB}{\triangle OCB} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}}$$

Análogamente, el △ ODA y OBA tienen la misma altura h'' desde A (tampoco dibujada). Luego:

$$\left.\begin{aligned}\triangle ODA &= \tfrac{1}{2}\,\overline{OD}\cdot h'' \\ \triangle OBA &= \tfrac{1}{2}\,\overline{OB}\cdot h''\end{aligned}\right\} \therefore \text{ b) } \frac{\triangle ODA}{\triangle OBA} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OB}}$$

Al multiplicar miembro a miembro a) por b) resulta:

$$\frac{\triangle OAB}{\triangle OCB}\cdot\frac{\triangle ODA}{\triangle OBA} = \frac{\overline{OA}\cdot\overline{OD}}{\overline{OC}\cdot\overline{OB}} \Rightarrow \text{c) } \frac{\triangle ODA}{\triangle OCB} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}}\cdot\frac{\overline{OD}}{\overline{OB}}$$

$$\text{pero:} \left\{\begin{aligned}&\triangle ODA = \triangle ABO + \triangle ABD \\ &\triangle OCB = \triangle ABO + ABC \\ &\triangle ABD = \triangle ABC \quad \text{(tienen igual base y altura).}\end{aligned}\right.$$

Por lo tanto: △ ODA = △ OCB, de donde:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OC}}\cdot\frac{\overline{OD}}{\overline{OB}} = 1$$

$$\text{Luego: } \boxed{\frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OD}}}$$

que es la misma proporción II) demostrada más atrás.

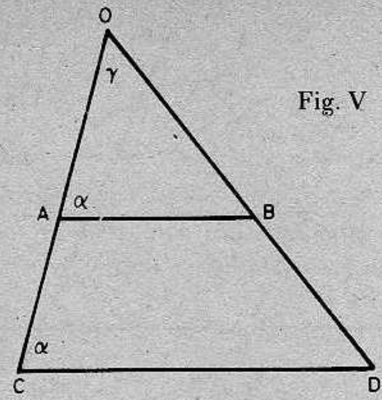


Fig. V

3) Por Trigonometría se sabe que: *el área de un triángulo es igual al semiproducto de dos lados por el seno del ángulo que forman.* Esta relación la aplicaremos en la figura V a los △ ABO y CDO considerando, primero el ángulo α, y después γ:

$$\left.\begin{aligned}\triangle ABO &= \tfrac{1}{2}\,\overline{AB}\cdot\overline{OA}\,\operatorname{sen}\alpha \\ \triangle CDO &= \tfrac{1}{2}\,\overline{CD}\cdot\overline{OC}\,\operatorname{sen}\alpha\end{aligned}\right\}:$$

$$1)\quad \frac{\triangle ABO}{\triangle CDO} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{OA}}{\overline{CD}\cdot\overline{OC}}$$

Análogamente:

$$\left.\begin{aligned}\triangle ABO &= \tfrac{1}{2}\,\overline{OA}\cdot\overline{OB}\,\operatorname{sen}\gamma \\ \triangle CDO &= \tfrac{1}{2}\,\overline{OC}\cdot\overline{OD}\,\operatorname{sen}\gamma\end{aligned}\right\}:$$

$$2)\quad \frac{\triangle ABO}{\triangle CDO} = \frac{\overline{OA}\cdot\overline{OB}}{\overline{OC}\cdot\overline{OD}}$$

De 1) y 2) se obtiene:

$$\frac{\overline{AB}\cdot\overline{OA}}{\overline{CD}\cdot\overline{OC}} = \frac{\overline{OA}\cdot\overline{OB}}{\overline{OC}\cdot\overline{OD}}$$

$$\text{de donde: } \boxed{\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OD}}}$$

que es la proporción V de más atrás.

Como ejercicio demuestre usted por este camino que $\overline{OA}:\overline{AC} = \overline{OB}:\overline{BD}$.

También este Teorema de Thales puede demostrarse por Geometría Vectorial (pág. 177 de *Matemáticas Elementales,* tomo II).

4) Lo anterior permite expresar de otra manera el teorema Particular de Thales: »*Al trazar una o más paralelas a un lado de un triángulo, se determinan en los otros dos lados segmentos proporcionales*«.

286. *TEOREMA GENERAL DE THALES*

»Al cortar dos o más rectas por tres o más paralelas, se determinan en las rectas segmentos proporcionales«.

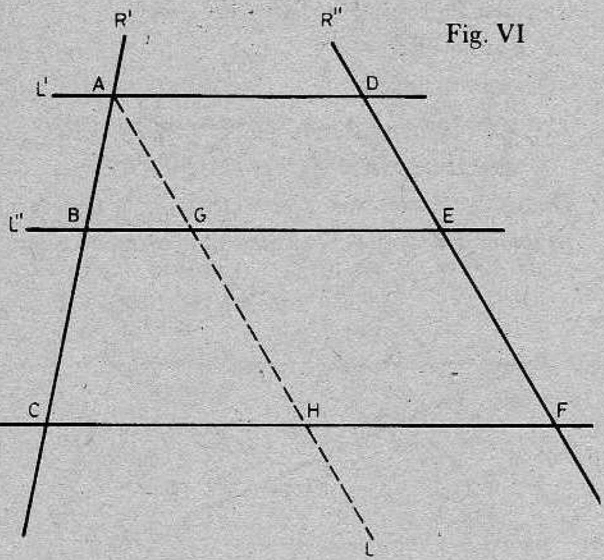


Fig. VI

H.) R' y R'' son cortadas por L'//L''//L''' (Fig. VI)

T.) $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{DE}}{\overline{EF}}$

D.) Se traza por A la recta L // R''. Luego, por el Teorema Particular de Thales, se tiene:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{GH}} \quad \text{pero} \quad \begin{cases} \overline{AG} = \overline{DE} \\ \overline{GH} = \overline{EF} \end{cases}$$

Luego: $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{DE}}{\overline{EF}}$ (q.e.d)

287. *OBSERVACION.* Recordemos que:

a) *Proporción discontinua:* es la que tiene *todos* sus términos distintos. Por ejemplo:

$$\frac{5}{10} = \frac{4}{8} \quad ; \quad a : b = c : d$$

b) *Cuarta proporcional:* es cada uno de los términos de una proporción discontinua. En el ejemplo anterior, 5 es 4ª proporcional entre 10, 4 y 8 en la proporción 5:10 = 4:8. Lo mismo puede decirse de los otros números de la proporción dada.

Para que el problema de calcular la 4ª proporcional entre tres cantidades dadas no quede indeterminado, debe indicarse también la proporción. De lo contrario, si tan sólo se pide calcular la 4ª proporcional entre 2; 4 y 10 se pueden obtener tres resultados distintos:

1) $2:4 = 10 : x \Rightarrow x_1 = 40;$

2) $4:2 = 10: x \Rightarrow x_2 = 5;$

3) $10:2 = 4 : x \Rightarrow x_3 = 0{,}8$

En cambio, si se pide calcular la 4ª proporcional entre 2; 4 y 10 de modo que 4:2 = 10:x, el problema queda bien determinado y tiene sólo una solución: x = 5.

c) *Proporción continua:* es la que tiene los medios iguales o los extremos iguales.

Ej.: $\frac{4}{6} = \frac{6}{9}$; $\frac{8}{16} = \frac{4}{8}$; $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

d) *Tercera proporcional:* es cada uno de los términos no repetidos de una proporción continua.

En la proporción 4:6 = 6:9, el 4 es 3ª proporcional entre 6 y 9; análogamente lo es el 9 entre 4 y 6.

En el cálculo de la 3ª proporcional también debe indicarse la proporción para que el problema no quede indeterminado.

Por ejemplo, calcular la 3ª proporcional entre 8 y 10 de modo que 8 : 10 = 10: x. De aquí se obtiene: x = 12,5.

e) *Media proporcional:* es el término repetido de una proporción continua.

En la proporción 4 : 8 = 8 : 16, el 8 es media proporcional entre 4 y 16.

Ejemplo: calcular la media proporcional entre 18 y 8.

$$18 : x = x : 8 \Rightarrow x^2 = 144 \therefore x = 12$$

Este repaso lo tendremos presente a continuación, pues lo aplicaremos a la Geometría para la construcción de la cuarta, tercera y media proporcional geométrica. Por lo tanto, ahora los elementos de la proporción serán trazos y no números.

288. *CONSTRUCCION de la 4ª PROPORCION GEOMETRICA*

Dados tres trazos: a, b, c, construir la 4ª proporcional geométrica entre ellos de modo que :

$$a : b = c : x.$$

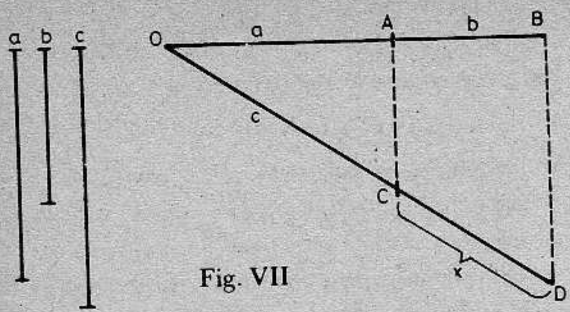


Fig. VII

1ª. *solución:* pueden darse varias soluciones basadas en el Teorema de Thales. Daremos algunas y las otras quedan de »tarea« para usted.

1) Se dibuja un ángulo cualquiera.

2) Se copia sobre uno de los lados dos de los trazos dados y el tercero sobre el otro lado, pero *siguiendo el orden* de la proporción dada (Fig. VII).

$a = \overline{OA}$, $b = \overline{AB}$, $c = \overline{OC}$

3) Se une A con C y por B se traza la paralela a $\overline{AC}$.

4) Resulta: $\overline{CD} = x$

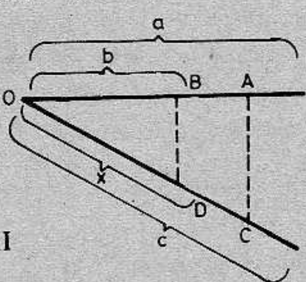
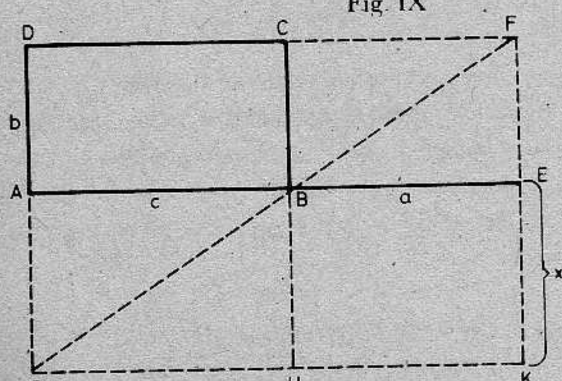


Fig. VIII

2ª *solución:* 1) se dibuja un ángulo cualquiera; 2) se copia $a = \overline{OA}$, $b = \overline{OB}$, $\overline{OC} = c$; 3) se une A con C y se traza por B la paralela a $\overline{AC}$ (Fig. VIII).

Resulta: $\overline{AD} = x$

Fig. IX



3ª *solución:* se basa en los paralelogramos complementarios, pues de la proporción dada se obtiene: $a \cdot x = b \cdot c$

1) Se dibuja un rectángulo de lados b y c; 2) se prolonga $\overline{AB} \rightarrow B$ en $\overline{BE} = a$ y $\overline{DC} \rightarrow C$ en $\overline{CF} = a$; 3) se prolongan $\overline{DA} \rightarrow A$, $\overline{CB} \rightarrow B$, $\overline{FE} \rightarrow E$; 4) F (–) B ⟶ B determina P; 5) se traza por P // $\overline{AE}$ (Fig. IX).

Resulta: $\overline{EK} = x$

289. CONSTRUCCION DE LA TERCERA PROPORCIONAL GEOMETRICA

Dados dos trazos »a« y »b« construir la tercera proporcional geométrica entre ellos de modo que

$$a : b = b : x$$

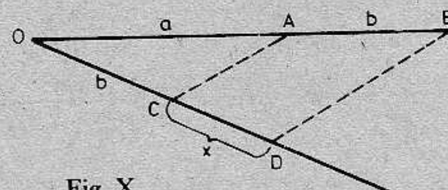


Fig. X

1ª solución: es análoga a la construcción de la cuarta proporcional geométrica (Fig. X):

1) $\overline{OA} = a$; $\overline{AB} = b$, $\overline{OC} = b$

2) C (–) A y por B // $\overline{AC}$

Resulta: $\overline{CD} = x$

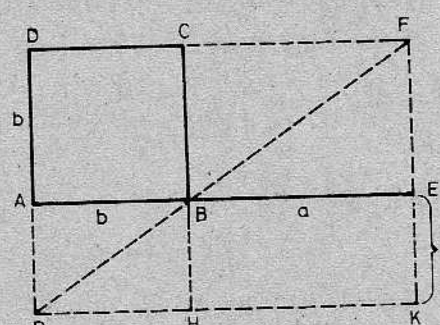


Fig. XI

2ª *solución:* de la proporción se obtiene

$$a \cdot x = b^2$$

Es decir: se trata de transformar un cuadrado de lado »b« en un rectángulo de lados »a« y »x«.

Guíese por la 3ª solución del problema anterior (Fig. IX).

3ª *solución:* se puede aprovechar el Segundo Teorema de Euclides (Nº 265).

1) siendo $\overline{CH} = b$ se traza la perpendicular en H;

2) se hace $\overline{HB} = a$;

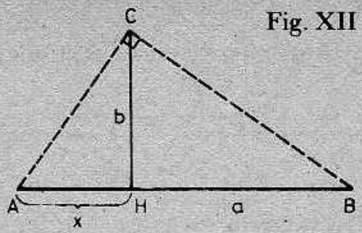


Fig. XII

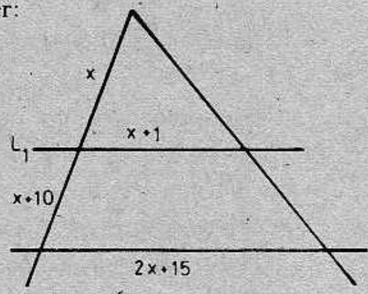
3) se une B con C y se traza en C la perpendicular a $\overline{BC}$ la que determina A en $\overline{BH} \rightarrow H$.

Resulta: $\overline{AH} = x$ (Fig. XII).

290. TESTS

1) Para que $L_1 \parallel L_2$, el valor de »x« en la figura 1, debe ser:

Fig. 1



A) $3,\overline{3}$;

B) -5;

C) $-2+\sqrt{14}$;

D) $4<x<5$;

E) es indeterminado.

2) En la Fig. 2, ¿cuánto debe valer »x« para que $L_1 \parallel L_2$?

A) 3,75;

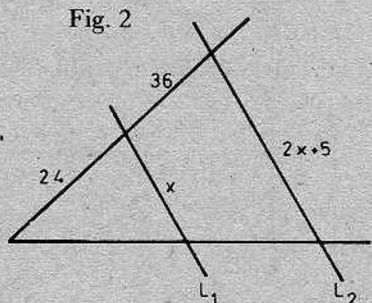
B) $-3{,}75$;

C) -10;

D) 10;

E) $x \neq$ IN

Fig. 2



3) En la Fig. 3, para que $L_1 \parallel L_2$ el valor de »x« es:

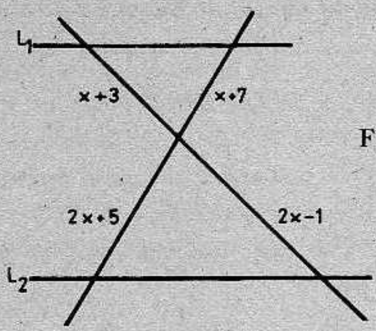


Fig. 3

A) 5, B) 7;

C) 9, D) 11,

E) otro valor.

4) Un plano está hecho en la escala $\frac{2}{12500}$

La distancia entre dos edificios medida en el plano es 6 cm. Entonces, la distancia en el terreno entre los edificios es:

A) 750 m; B) 375 m;

C) 7,5 km, D) 37,5 m,

E) 1500 m.

5) un plano está hecho en la escala 1/200000. Si en el plano la distancia entre dos ciudades es 2,5 cm, entonces ellas se encuentran realmente a:

A) 5 km; B) 2 km;

C) 500 km; D) 0,8 km;

E) 8 km.

Respuestas:

1 = A; 2 = D; 3 = D; 4 = B; 5 = A

27ª UNIDAD

División interior y exterior de un trazo. División armónica de un trazo. Puntos armónicos. Circunferencia de Apolonio. Teorema de Apolonio.

---

291. DIVISION INTERIOR DE UN TRAZO (Fig. 1)

Se dice que un punto P divide *interiormente* a un trazo $\overline{AB}$ cuando pertenece a la región interior del trazo, es decir, cuando queda entre los extremos A y B.

Fig. 1

Convendremos en leer los trazos *desde el punto de división* hacia los extremos del trazo. Por lo tanto, en nuestro ejemplo los segmentos en que P divide interiormente al trazo $\overline{AB}$ son $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$. La razón entre estos segmentos se designa por λ (lambda). Entonces:

$$\boxed{\lambda = \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}}$$

Si se considera un sentido en los trazos, en este caso los trazos $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ tienen sentidos opuestos y, por lo tanto, el valor de λ es negativo o sea: $\lambda < 0$

292. DIVISION EXTERIOR DE UN TRAZO (Fig. 2):

Fig. 2

Diremos que un punto Q divide *exteriormente* a un trazo $\overline{AB}$ cuando pertenece a su prolongación. En nuestro ejemplo, el punto Q y el Q' dividen al trazo $\overline{AB}$ exteriormente. De este modo, los segmentos en que el trazo $\overline{AB}$ queda dividido exteriormente por el punto Q son (de acuerdo con nuestra convención de leer los segmentos desde el punto de división): $\overline{QA}$ y $\overline{QB}$. La razón entre ellos es:

$$\lambda = \frac{\overline{QA}}{\overline{QB}}$$

En este caso $\overline{QA}$ y $\overline{QB}$ tienen el mismo sentido y, por consiguiente, el valor de λ es positivo: $\lambda > 0$.

Análogamente, los segmentos en que Q' divide exteriormente al trazo $\overline{AB}$ son $\overline{Q'A}$ y $\overline{Q'B}$. Su razón es: $\lambda = \frac{\overline{Q'A}}{\overline{Q'B}} > 0$.

De acuerdo con nuestra convención para leer los segmentos de división, tendremos:

$\lambda < 0 \Rightarrow$ punto de división interior

$\lambda > 0 \Rightarrow$ punto de división exterior

¿Cómo interpreta usted los casos $\lambda = 0, \lambda = -1$ y $\lambda = +1$?

Observación: Otros autores consideran otra convención y para ellos $\lambda > 0$ corresponde a una división interior y $\lambda < 0$, a una división exterior del trazo.

En los problemas siguientes consideraremos el valor absoluto de λ, es decir $|\lambda|$. Tomaremos en cuenta el signo sólo cuando sea necesario.

293. PROBLEMA FUNDAMENTAL I

Dividir interiormente un trazo $\overline{AB}$ en la razón m:n (»m« y »n« pueden ser dos trazos dados o bien, dos números dados, por ej., 3:5).

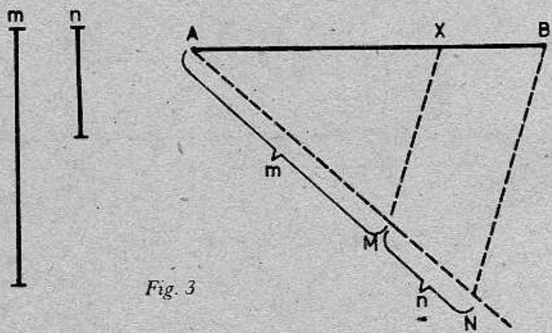


Fig. 3

1ª solución (Fig. 3): 1) con vértices en A o en B se dibuja un ángulo cualquiera;

2) sobre el lado libre del ángulo se copia $m = \overline{AM}$, $n = \overline{MN}$;

3) B(—)N y por M // $\overline{BN}$ determina el punto interior X.

Por el Teorema de Thales se tiene:

$$\frac{\overline{XA}}{\overline{XB}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{MN}} = \frac{m}{n}$$

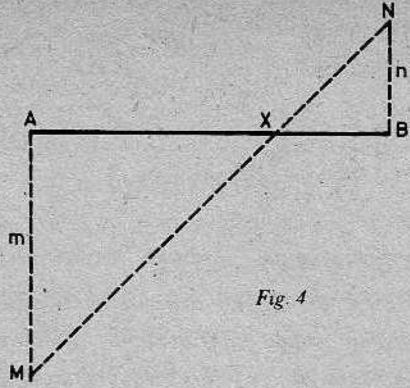


Fig. 4

2ª solución (Fig. 4): 1) se trazan en A y en B las perpendiculares (o bien, dos paralelas oblicuas);

2) se copia m = $\overline{AM}$ y n = $\overline{BN}$;

3) M(–) N determina X.

Resulta: $\frac{\overline{XA}}{\overline{XB}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{BN}} = \frac{m}{n}$

224. PROBLEMA FUNDAMENTAL II

Dividir exteriormente un trazo $\overline{AB}$ en la razón m : n.

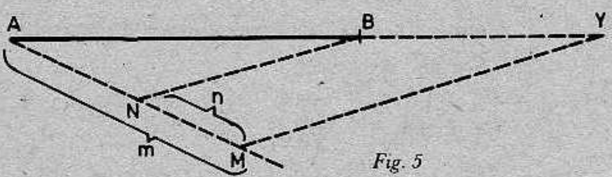


Fig. 5

1ª solución (Fig. 5): 1) se dibuja un ángulo cualquiera con vértice en A o en B;

2) se copia m = $\overline{AM}$ y n = $\overline{MN}$;

3) B (–) N y por M // $\overline{BN}$ determina Y.

Resulta: $\frac{\overline{YA}}{\overline{YB}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{MN}} = \frac{m}{n}$

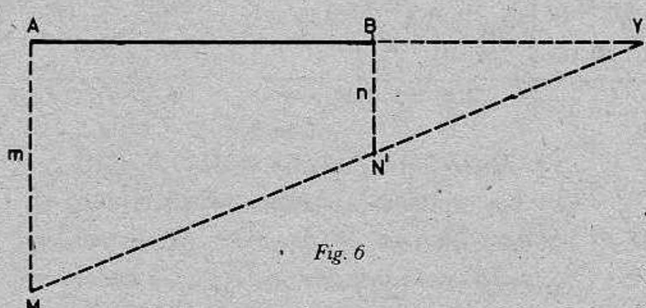


Fig. 6

2ª solución (Fig. 6): 1) en A y B se trazan las perpendiculares;

2) se copia m = $\overline{AM}$ y n = $\overline{BN'}$;

3) M (–)N' ⟶ N' determina Y.

Resulta: $\frac{\overline{YA}}{\overline{YB}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{BN'}} = \frac{m}{n}$

295. PROBLEMA FUNDAMENTAL III

Dividir armónicamente un trazo $\overline{AB}$ en la razón m:n.

Definición: Dividir un trazo armónicamente es dividirlo interior y exteriormente *en la misma razón.*

1ª solución: se combinan en una sola figura las primeras soluciones de los problemas I y II. ¡Hágala usted!

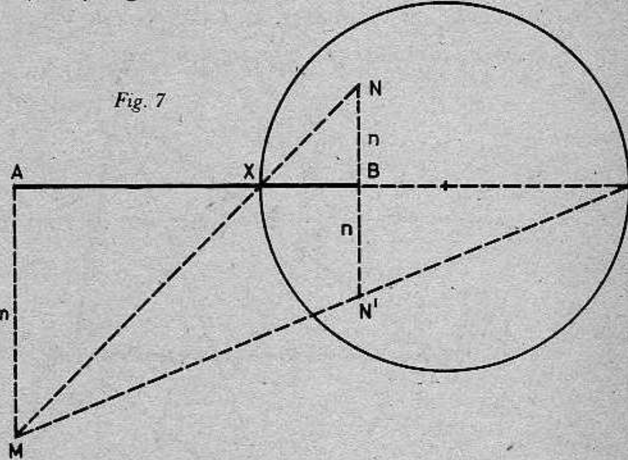


Fig. 7

2ª solución (Fig. 7): es menos confusa que la anterior y, por lo tanto, más conveniente. Se combinan en una sola figura las segundas soluciones de los problemas I y II. Para esto se trazan en A y B las perpendiculares (o bien, dos paralelas) y se copian m = $\overline{AM}$, n = $\overline{BN}$ = $\overline{BN'}$.

Al unir M con N se determina el punto interior X, y al unir M con N' se determina el punto exterior Y.

Se obtiene:

$\overline{XA} : \overline{XB} = \overline{AM} : \overline{BN}$ = m:n (para el punto interior X)

$\overline{YA} : \overline{YB} = \overline{AM} : \overline{BN'}$ = m:n (para el punto exterior Y)

∴ $\overline{XA} : \overline{XB} = \overline{YA} : \overline{YB}$ = m:n

Los puntos X e Y se llaman *puntos armónicos,* pues dividen al trazo $\overline{AB}$ armónicamente. A su vez, los puntos A y B dividen el trazo $\overline{XY}$, también armónicamente.

Por lo tanto, los puntos A, X, B, Y constituyen un *juego de puntos armónicos* o *un conjunto de puntos armónicos.*

296. CIRCUNFERENCIA DE APOLONIO

(griego: —262 a −180)

Es la circunferencia que tiene por diámetro la distancia entre el punto de división interior y el punto de división exterior de un trazo dividido armónicamente. En la última figura 7 es la circunferencia que tiene por diámetro (XY).

297. TEOREMA LXXXVI

La bisectriz de un ángulo interior de un triángulo divide interiormente al lado opuesto en la razón de los lados que forman el ángulo.

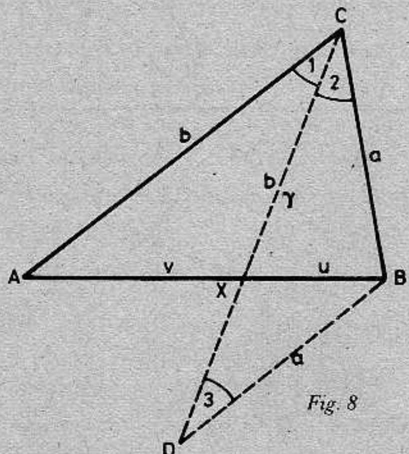


Fig. 8

H.) $\overline{CX} = b_\gamma$; $\overline{XA} = v, \overline{XB} = u$

T.) $\dfrac{\overline{XA}}{\overline{XB}} = \dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} \Rightarrow \boxed{\dfrac{a}{b} = \dfrac{u}{v}}$

D.) Se traza por B // $\overline{AC}$ y $\overline{CX} \longrightarrow X$ determina D. De este modo el ángulo de vértice X queda cortado por dos paralelas: $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

Por lo tanto, resulta (Fig. 8):

$\dfrac{\overline{XA}}{\overline{XB}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{BD}}$; pero $\overline{BD} = \overline{BC} = a$ (pues el $\triangle$ CDB es isósceles al ser $\measuredangle 1 = \measuredangle 2 = \measuredangle 3$).

Luego: $\dfrac{\overline{XA}}{\overline{XB}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \Rightarrow \dfrac{v}{u} = \dfrac{b}{a}$

298. TEOREMA LXXXVII

La bisectriz del ángulo exterior en el vértice de un triángulo divide exteriormente al lado opuesto en la razón de los lados que forman el ángulo interior adyacente.

H.) $\overline{CY}$ = bisectriz del ángulo exterior.

T.) $\boxed{\dfrac{\overline{YA}}{\overline{YB}} = \dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \dfrac{b}{a}}$

D.) Al trazar por B // $\overline{AC}$ resulta (Fig. 9):

$\measuredangle 5 = \measuredangle 4$ (por H.)

$\measuredangle 5 = \measuredangle 6$ (alt. entre //)

$\therefore \measuredangle 4 = \measuredangle 6 \Rightarrow \triangle$ CBE es isósceles.

Luego: $\overline{CB} = \overline{BE} = a$

Como el $\measuredangle$ AYC está cortado por dos paralelas, $\overline{CA}$ y $\overline{BE}$, se obtiene:

$\dfrac{\overline{YA}}{\overline{YB}} = \dfrac{\overline{CA}}{\overline{BE}} \longrightarrow \dfrac{\overline{YA}}{\overline{YB}} = \dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \dfrac{b}{a}$

pues $\overline{BE} = \overline{CB}$

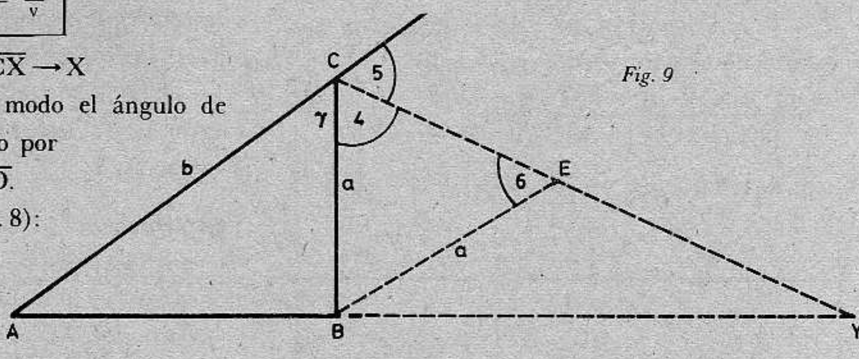


Fig. 9

299. TEOREMA DE APOLONIO (Fig. 10)

Los dos teoremas anteriores se resumen en el llamado *Teorema de Apolonio:* »*En un triángulo, la bisectriz de un ángulo interior y la del ángulo exterior adyacente dividen armónicamente al lado opuesto en la razón de los lados que forman el ángulo*«.

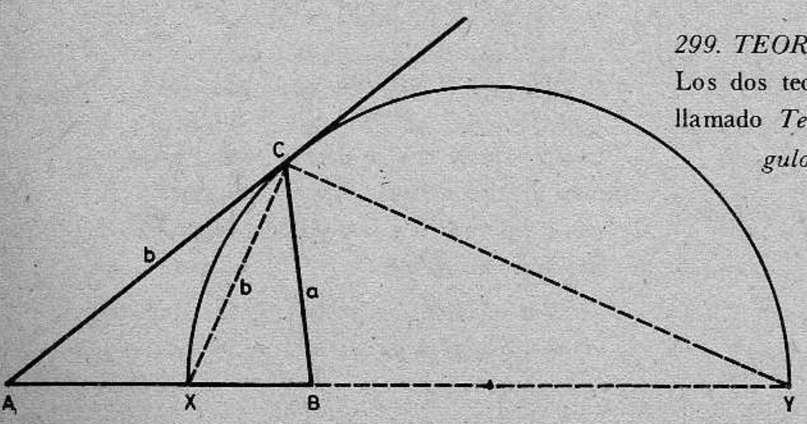


Fig. 10

T.) $\boxed{\dfrac{\overline{XA}}{\overline{XB}} = \dfrac{\overline{YA}}{\overline{YB}} = \dfrac{b}{a}}$

D.) Está hecha en los dos teoremas anteriores.

Pero, en virtud del Teorema N° II (N° 54), el $\measuredangle$ XCY = 90° y, por consiguiente, al dibujar la circunferencia de Apolonio de diámetro (XY), esta circunferencia debe pasar por el vértice C del $\triangle$ ABC (ángulo inscrito en la semicircunferencia de Thales).

De lo anterior se obtiene el siguiente L.G.:

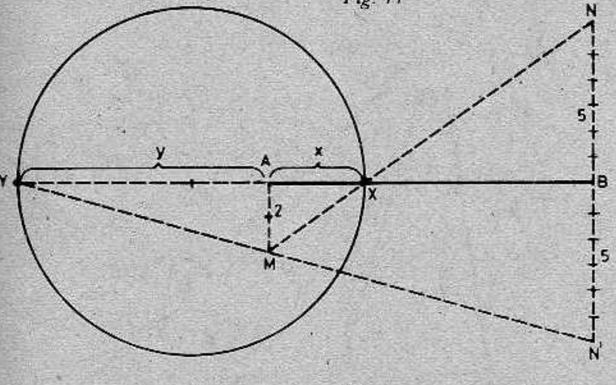
300. L. G. N° 27

»Cuando en un triángulo se conoce un lado y la razón entre los otros dos lados, el L.G. del tercer vértice es la *Circunferencia de Apolonio*«.

301. EJERCICIOS (Resueltos y por resolver)

Problema 1) Un trazo de 21 cm está dividido armónicamente en la razón 2:5. ¿Cuánto mide el radio de la circunferencia de Apolonio corresdiente?

Fig. 11



Solución (Fig. 11):

1) se trazan las perpendiculares en A y B;

2) $\overline{AM}$ = 2 unidades;

$\overline{BN} = \overline{BN'}$ = 5 unidades;

3) M (–) N determina X; N'(–)M $\longrightarrow$ M determina Y.

Resulta (XY) = diámetro de la circunferencia de Apolonio.

Cálculo del radio: sea $\overline{AX}$ = x, por lo tanto $\overline{BX}$ = 21 – x.

Luego: x : (21 – x) = 2:5 $\Longrightarrow$ x = 6.

Además, siendo $\overline{YA}$ = y $\Rightarrow$ $\overline{YB}$ = 21 + y se tiene: y : (21 + y) = 2:5 de donde y = 14

Luego, el diámetro (XY) = 20 cm y radio = 10 cm.

Problema 2) En general, demuestre que al dividir armónicamente un trazo »a« en la razón m:n, siendo m > n, el radio de la circunferencia de Apolonio es:

$$r = \frac{amn}{m^2 - n^2}$$

Problema 3) Se conoce un trazo $\overline{AB}$ y el punto interior de división X (Fig. 12). Determinar el punto armónico de X (o sea, determinar el punto exterior Y).

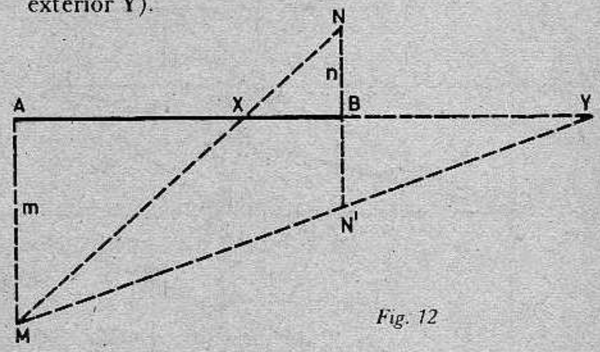


Fig. 12

Solución: al conocerse el punto de división interior X se conoce también la razón en que está dividido el trazo: $\overline{XA} : \overline{XB}$.

Entonces, se trazan las perpendiculares en A y en B (o bien, dos paralelas) y por X se traza una transversal que corte a estas dos perpendiculares. De este modo queda determinado $\overline{AM}$ = = m y $\overline{BN}$ = n. Se hace $\overline{BN'} = \overline{BN}$ y se une M con N' prolongándose hasta determinar Y, que es el punto pedido armónico de X.

Problema 4) Se conoce un trazo $\overline{AB}$ y el punto de división exterior Y.

Determinar el punto armónico de Y (o sea, determinar el punto de división interior).

Solución: análoga al problema anterior. ¡Hágala usted! Además dibuje la circunferencia de Apolonio correspondiente.

Problema 5): $\triangle$: c, a : b = m:n, h_c

Análisis: Con »c« quedan determinados los vértices A y B. Para el tercer vértice C se tienen los siguientes L.G. (Fig. 13):

1°. $\odot$ de Apolonio (pues se conoce »c« y la razón m:n entre los otros dos lados);

2°. la paralela a la distancia h_c de $\overline{AB}$.

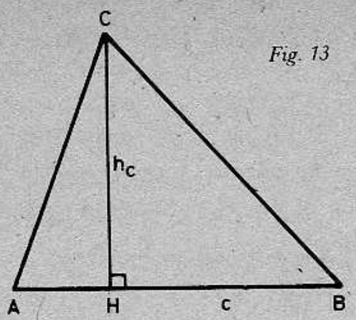
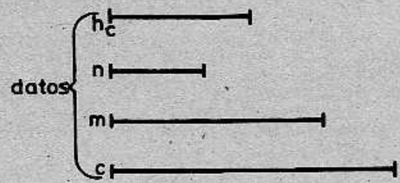


Fig. 13



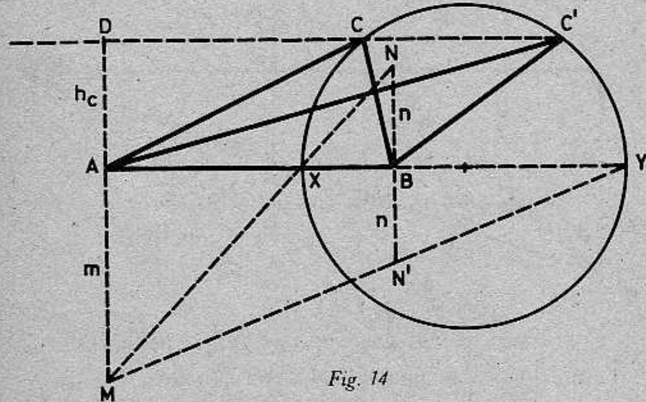


Fig. 14

Construcción (Fig. 14): 1) $c = \overline{AB}$; 2) $\perp$ en A y B;

3) $m = \overline{AM}$, $n = \overline{BN} = \overline{BN'}$;

4) M (–) N determina X; M (–) N' → N' determina Y;

5) se dibuja la ⊙ de Apolonio (XY);

6) $AD = h_c$;

7) por D // AB determina C y C'.

El △ ABC y el △ ABC' cumplen con las condiciones del problema.

Discusión:

si $h_c < \frac{1}{2}$ (XY) hay 2 soluciones;

si $h_c = \frac{1}{2}$ (XY) hay 1 solución;

si $h_c > \frac{1}{2}$ (XY) no hay solución.

Problema 6) △ : c = 21 cm, a:b = 2:5, h_c = x

¿Cuánto debe medir la altura h_c para que exista sólo una solución?

Ind.: ver N° 301-1 y circunferencia de Apolonio.

Problema 7) △ : c, a:b = m:n, t_c

Análisis: Con »c« se determina A y B (Fig. 15).

L.G. para C : $\begin{cases} \text{1) la ⊙ de Apolonio} \\ \text{2) arco de ⊙ } (M, t_c) \end{cases}$

Construcción: Dése usted los datos y haga la construcción.

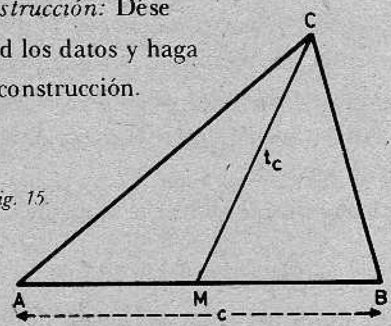


Fig. 15

Problema 8) △ : c, a:b = m:n, γ

Análisis: Con »c« se determina A y B.

L.G. para C: $\begin{cases} \text{1°. la ⊙ de Apolonio (N° 296)} \\ \text{2°. el arco capaz de } \gamma \text{ (N° 231)} \end{cases}$

Observación: Más adelante, al estudiar la semejanza de triángulos, se verá otra solución.

Problema 9) △ : u, v, b_γ

Análisis: Con (v + u) se determinan A y B (Fig. 16).

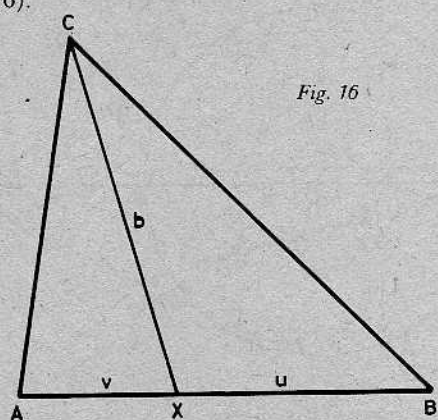


Fig. 16

Como se conoce el punto X de división interior se determina el punto armónico de X (véase N° 301-3). En seguida, para C se tienen los L.G.:

1°. la ⊙ de Apolonio

2°. arco de ⊙ (X, b_γ)

Construcción: Dése usted los datos y ¡hágala!

Problema 10) △ : u, v, h_c

Problema 11) △ : p, q, a:b = m:n

Problema 12) △ : c, a:b = m:n, $t_a : t_b$ = m' : n'

Análisis (Fig. 17): Sea c = $\overline{AB}$, $t_a = \overline{AN}$, $t_b = \overline{BM}$

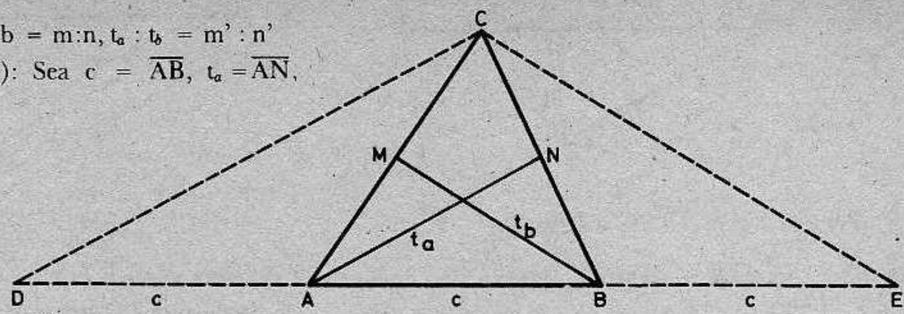


Fig. 17

Por C se trazan las paralelas a t_a y a t_b con lo cual se determina el △ DEC en el cual $\overline{AB}:\overline{BE}$ = = $\overline{AM}:\overline{MC}$ = 1, pues $\overline{MA} = \overline{MC}$.

Por lo tanto, $\overline{BE} = \overline{AB}$ = c; además, $\overline{CE} = 2 \cdot t_b$ puesto que $\overline{BM}$ es la mediana del △ AEC. En forma análoga se demuestra que

$$\overline{DA} = \overline{AB} = c, \overline{CD} = 2 \cdot t_a$$

Entonces, se puede construir el △ DEC en el cual se conoce $\overline{DE}$ = 3c, la razón m':n' = = $\overline{CD}:\overline{CE}$ y sólo falta determinar la posición del vértice C. Para C se tienen los siguientes L.G.:

1°. la ⊙ de Apolonio (se divide $\overline{AB}$ = c armónicamente en la razón m:n);

2.°. la ⊙ de Apolonio (se divide $\overline{DE}$ = 3c armónicamente en la razón m':n').

Construcción: ¡Hágala usted!

Problema 13) △ : p, q, $t_a : t_b$ = m:n

Problema 14) b, a:c = m:n, t_b

Problema 15) △ : a, b:c = m:n, h_b

Problema 16) △ : c, $t_a : t_b$ = m:n, t_c

Problema 17) △ :p, h_c, a:b = m:n

Análisis: primeramente se construye el △ auxiliar HBC con p = $\overline{HB}$, $\overline{CH} = h_c$ y ∡ CHB = 90°. Con esto queda determinado el lado a = $\overline{BC}$ (Fig. 18).

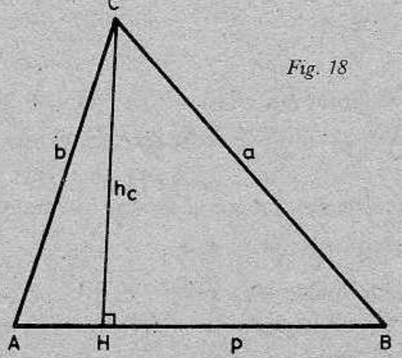


Fig. 18

Por lo tanto, en la proporción a:b = m:n se determina »b« como 4ª proporcional geométrica. Conocido »b« se corta desde C con esta magnitud como radio lo que determina A en la prolongación de $\overline{BH} \rightarrow$ H.

Construcción: ¡Hágalo usted!

Problema 18) △ : b, h_c, p:q = m:n

Problema 19) Dividir un trazo $\overline{AB}$ en tres partes que sean entre sí como n:n:p.

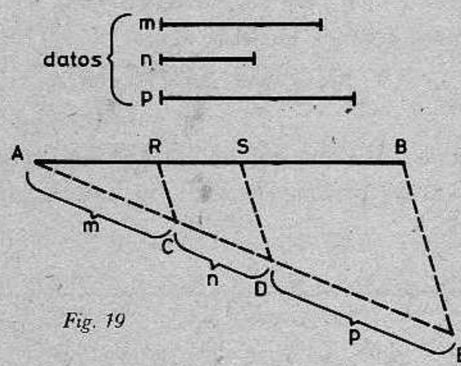


Fig. 19

Solución (Fig. 19): 1) se forma un ángulo con vértice en A o en B;

2) en el lado libre se copia $\overline{AC}$ = m, $\overline{CD}$ = n, $\overline{DE}$ = p;

3) se unen los extremos E con B y se trazan las paralelas a BE por C y D.

Resulta: $\overline{AR}:\overline{RS}:\overline{SB} = \overline{AC}:\overline{CD}:\overline{CE}$ = = m:n:p (por el Teor. de Thales).

Problema 20) Determinar geométricamente las $\frac{3}{5}$ partes de un trazo $\overline{AB}$.

Solución: 1) un ángulo cualquiera con vértice en A o en B;

2) una magnitud elegida convenientemente como unidad se aplica 5 veces;

3) se une E con B y por el punto 3 se traza la paralela a $\overline{BE}$ (Fig. 20).

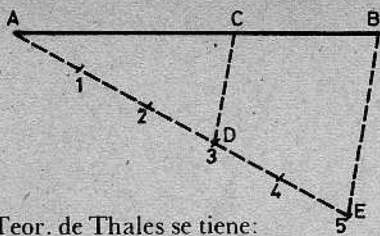


Fig. 20

Por el Teor. de Thales se tiene:

$$\overline{AC} : \overline{AB} = \overline{AD} : \overline{AE} = 3:5$$

Problema 21) Prolongar un trazo $\overline{AB}$ de modo que el trazo dado sea a su prolongación como m:n.

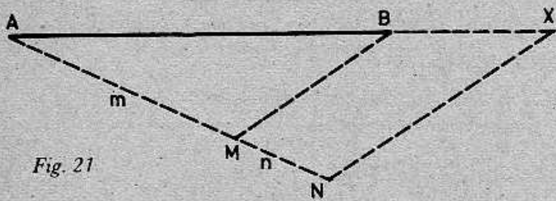


Fig. 21

Solución: 1) un ángulo en A;

2) se copia (Fig. 21): $\overline{AM} = m$ y $\overline{MN} = n$;

3) M (–) B y por N // MB determina X.

Por el Teor. de Thales se tiene:

$$\overline{AB} : \overline{BX} = \overline{AM} : \overline{MN} = m:n.$$

Problema 22) Prolongar un trazo $\overline{AB}$ de modo que el trazo prolongado sea a su prolongación como 5 : 3.

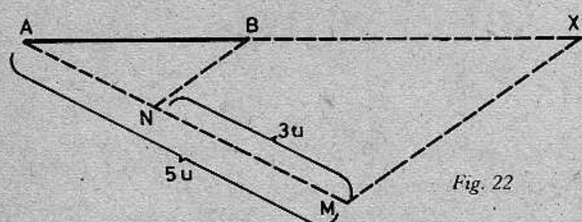


Fig. 22

Solución: 1) un ángulo en A;

2) se elige una unidad »u« y se la aplica 5 veces de modo que $\overline{AM} = 5 \cdot u$, $\overline{MN} = 3 \cdot u$ (Fig. 22);

3) N (–) B y por M // $\overline{NB}$ determina X.

Por el Teor. de Thales se obtiene:

$$\overline{AX} : \overline{BX} = \overline{AM} : \overline{MN} = 5 : 3.$$

Problema 23) Prolongar un trazo dado $\overline{AB}$ de modo que el trazo dado sea al trazo prolongado como 3 : 4.

Solución: 1) un ángulo en A (Fig. 23);

2) se copia $3u = \overline{AM}$, $4u = \overline{AN}$;

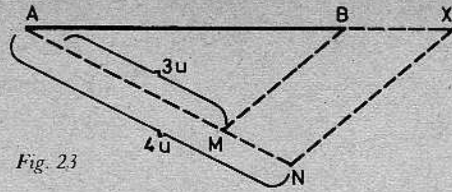


Fig. 23

3) M (–) B y por N // $\overline{MB}$ determina X.

Problema 24) Un trazo $\overline{AB}$ = 24 cm se prolonga de modo que el trazo dado es a su prolongación como 3:5. ¿Cuánto mide el trazo prolongado? ¿Cuánto mide su prolongación?

(Resp.: 64 cm; 40 cm).

Problema 25) Un trazo de 24 cm se prolonga de modo que el trazo dado es al trazo prolongado como 3:5. ¿Cuánto mide el trazo prolongado? ¿Cuánto mide la prolongación?

(Resp.: 40 cm; 16 cm).

Problema 26) Prolongar un trazo de 24 cm de modo que la prolongación sea al trazo prolongado como 3:5. ¿Cuánto mide el trazo prolongado? ¿Cuánto mide la prolongación?

Problema 27) Dados la suma s de dos trazos y la razón m:n entre ellos, determinarlos (Por ej., m:n = 2:3).

Solución: 1) un ángulo en A;

2) se elige una unidad *u* y se hace $\overline{AM} = 2 \cdot u$;

3) $\overline{MN} = 3 \cdot u$;

4) N (–) B y por M // $\overline{NB}$ determina X (Fig. 24).

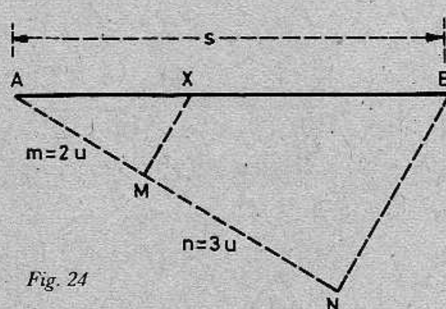


Fig. 24

Resulta: $\overline{AX} : \overline{XB} = \overline{AM} : \overline{MN} = 2:3$.

Por lo tanto, un trazo es $\overline{AX}$ y el otro es $\overline{XB}$.

Problema 28) La suma de dos trazos es 30 cm y están en la razón de $\frac{2}{3}$.

¿Cuánto miden los trazos?

(Resp.: 12 cm, 18 cm).

Problema 29) Dada la diferencia d de dos trazos y su razón 5:3, determinar los trazos geométricamente.

Problema 30) La diferencia de dos trazos es 18 cm. ¿Cuánto miden estos trazos si son entre sí como 5 : 3?

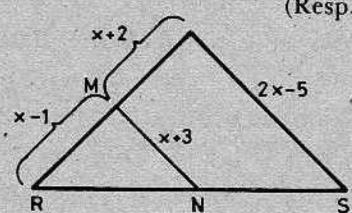
(Resp.: 45 cm, 18 cm).

Problema 31) En un $\triangle$ ABC trazar una paralela al lado $\overline{AB}$ que sea los $\frac{3}{5}$ de este lado.

Problema 32) En el $\triangle$ RST (Fig. 25), ¿Cuánto debe valer x para que $\overline{MN}$ sea paralelo a $\overline{ST}$?

(Resp.: $x = \frac{1}{7}$).

Fig. 25



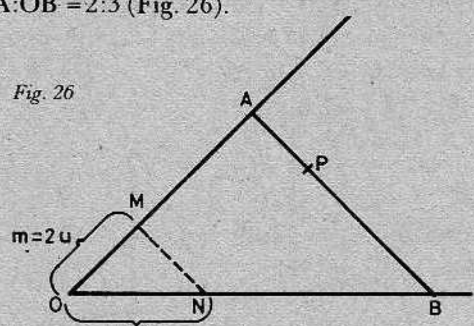
Problema 33) En un $\triangle$ ABC determinar un punto P de modo que $\overline{PA} : \overline{PB} : \overline{PC} = m:n:p$

(Ind.: dibuje dos circunferencias de Apolonio).

Problema 34) Entre los lados de un ángulo de vértice O se da un punto P.

Trazar por P una recta que corte a los lados del ángulo en los puntos A y B de modo que $\overline{OA}:\overline{OB} = 2:3$ (Fig. 26).

Fig. 26



Solución: 1) se hace $\overline{OM} = 2 \cdot u$, $\overline{ON} = 3 \cdot u$ siendo u = trazo unitario;

2) M (–) N y por P // $\overline{MN}$ determina A y B.

Por el Teorema de Thales resulta:

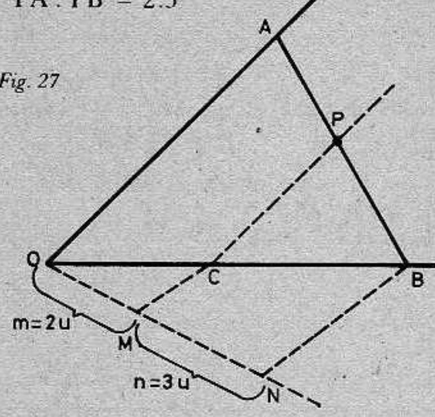
$\overline{OA} : \overline{OB} = \overline{OM} : \overline{ON} = 2u:3u = 2:3.$

Problema 35) Entre los lados de un ángulo de vértice O se da un punto P.

Trazar por P una recta que corte a los lados del ángulo en los puntos A y B de modo que (Fig. 27):

$\overline{PA} : \overline{PB} = 2:3$

Fig. 27



Solución: 1) se traza por P // $\overline{OL}$ la que determina C;

2) en O se dibuja un ángulo y sobre su lado libre se aplica un trazo unitario de modo que $\overline{OM} = 2 \cdot u$, $\overline{MN} = 3 \cdot u$;

3) M (–) C y por N // $\overline{MC}$ determina B;

4) B (–) P $\rightarrow$ P determina A.

D.) $\overline{OC}; \overline{CB} = \overline{OM} : \overline{MN} = 2:3$

$\overline{OC} : \overline{CB} = \overline{AP} : \overline{PB}$

$\therefore \overline{AP} : \overline{PB} = 2 : 3$

Problema 36) Entre los lados de un ángulo se da un punto P. Trazar por P una recta que corte los lados del ángulo en A y B de modo que

$\overline{PA} : \overline{AB} = m : n.$

Problema 37) Construir un triángulo dados la base $c = \overline{AB}$, el punto H del pie de la altura h_c y el punto X en que la bisectriz b_γ corta a la base.

(Ind.: determinar el punto exterior Y armónico del punto interior X y dibuje la circunferencia de Apolonio).

Problema 38) $\triangle$: $p-q$, h_c, $a:b = m:n$ (Fig. 28).

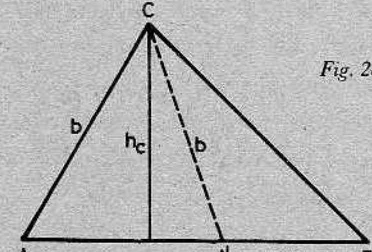


Fig. 28

(Ind.: 1) dividir armónicamente $p-q$ en la razón $m:n$; 2) dibujar la circunferencia de Apolonio).

Problema 39) En un sistema ortogonal de coordenadas se tiene un $\triangle$ ABC cuyos vértices son A(1, −3), B(5, −1), C(4,1). Calcular los segmentos que la bisectriz del $\triangle$ ABC determina en el lado $\overline{AC}$ (Fig. 29).

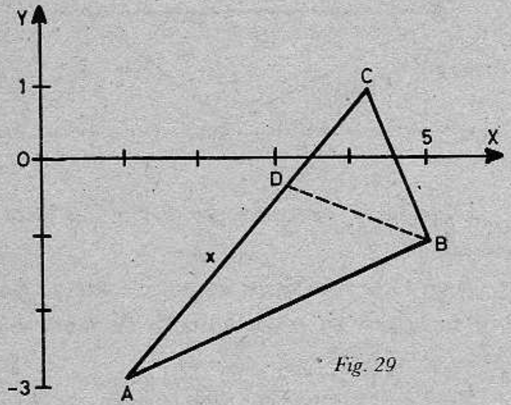


Fig. 29

Indicación: 1) Calcular la longitud de los tres lados del $\triangle$ ABC;
2) trazar la bisectriz $\overline{BD}$;
3) sea $\overline{AD} = x$; aplicar el Teorema de Apolonio al $\triangle$ CAB.
(*Resp.:* $\overline{BC} = \sqrt{5}$; $\overline{AC} = 5$; $\overline{AB} = 2\sqrt{5}$; $\overline{AD} = \frac{10}{3}$; $\overline{DC} = 1\frac{2}{3}$).

Problema 40) Dadas dos rectas paralelas y dos puntos A y B entre ellas o fuera de ellas, determinar en las paralelas los puntos cuyas distancias a A y B sean entre sí como $m:n$.

Problema 41) Dados los vértices opuestos A y C de un rectángulo, construir este rectángulo de modo que sus lados sean entre sí como $m:n$.

(Ind.: 1) $\frac{1}{2}\odot$ (AC) de Thales;
2) $\odot$ de Apolonio).

Problema 42) Se tiene un rectángulo ABCD de lados $\overline{AB} = a$ y $\overline{BC} = b$. Dividirlo en tres partes por medio de dos paralelas al lado $\overline{BC}$ de modo que el rectángulo que queda al medio tenga un área doble del rectángulo que está a su derecha y la mitad del que está a su izquierda.

(*Resp.:* I $= \frac{4}{7}$ ab; II $= \frac{2}{7}$ ab; III $= \frac{1}{7}$ ab).

Fig. 30

Problema 43) Si $\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CD} = 20:37:45$ y la media proporcional geométrica entre $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ es 90 cm, ¿cuánto mide $\overline{BC}$? (Fig. 30).

(*Resp.:* 111 cm).

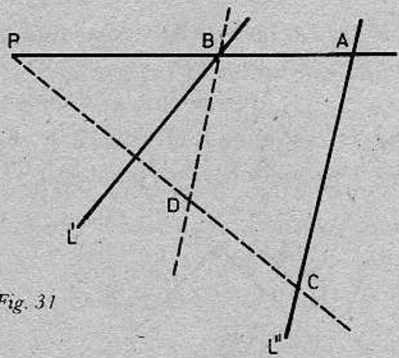


Fig. 31

Problema 44) Por un punto P trazar una recta que corte a dos rectas dadas L' y L'' en dos puntos A y B de modo que (Fig. 31): $\overline{PA}:\overline{PB} = m:n$

Solución: 1) se une P con cualquier punto C de L'';
2) se divide $\overline{PC}$ en la razón $m:n$ de modo que $\overline{PC} : \overline{PD} = m:n$;
3) por D // L'' determina B;
4) P (−) B ⟶ B determina A.

Problema 45) Por un punto P trazar una recta que corte a dos rectas dadas L' y L'' en los puntos A y B de modo que (Fig. 32):
$\overline{PB} : \overline{BA} = m:n$

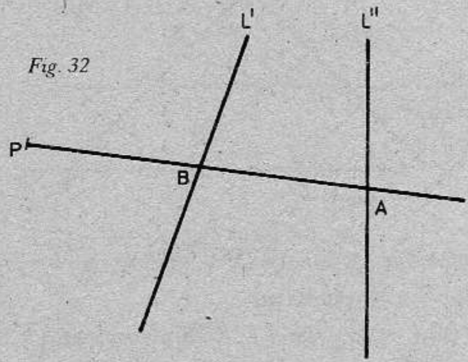


Fig. 32

Problema 46) Idem., pero de modo que (Fig. 32): $\overline{PA} : \overline{BA} = m:n$.

Problema 47) Dentro de un círculo se da un punto P. Trazar por P una cuerda $\overline{AB}$ de modo que (Fig. 33): $\overline{PA} : \overline{PB} = m : n$

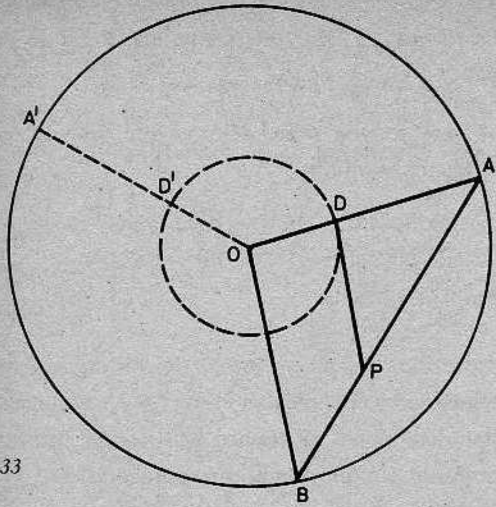


Fig. 33

Análisis: Sea $\overline{AB}$ la cuerda pedida y unamos A y B con el centro.

Al trazar por P // $\overline{OB}$ se determina D.

Se obtiene: $\overline{PA}:\overline{PB} = \overline{AD}:\overline{DO} = m:n$.

Por lo tanto: se divide cualquier radio en la razón m:n determinándose las magnitudes $\overline{OD}$' y $\overline{A'D}$'. Como el $\triangle$ *DPA es isósceles, los L.G. para D son:*

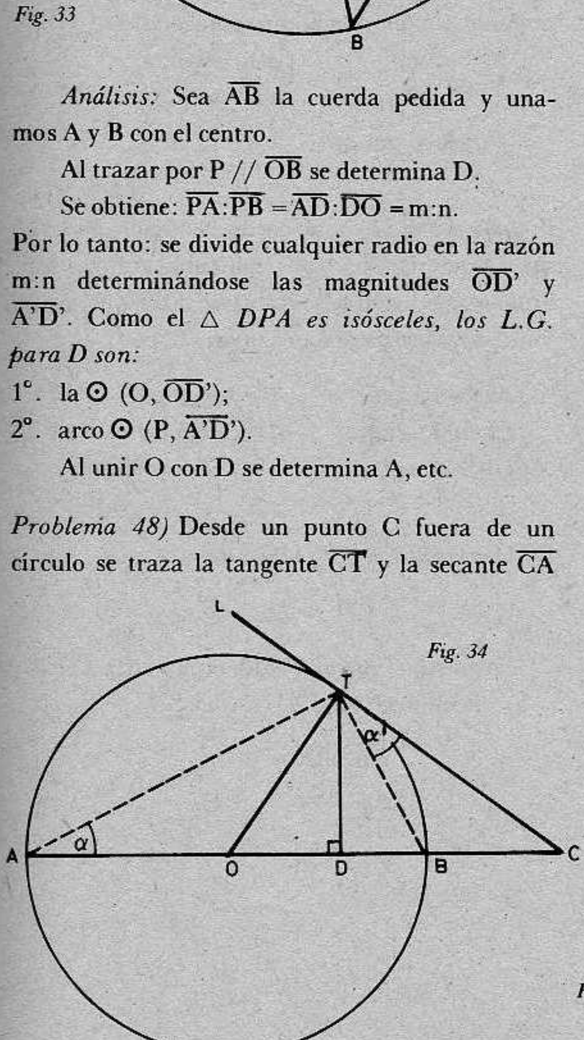
1°. la $\odot$ (O, $\overline{OD}$');

2°. arco $\odot$ (P, $\overline{A'D}$').

Al unir O con D se determina A, etc.

Problema 48) Desde un punto C fuera de un círculo se traza la tangente $\overline{CT}$ y la secante $\overline{CA}$

Fig. 34



que pasa por el centro. Además, se traza la perpendicular $\overline{TD}$ desde el punto de tangencia T a la secante $\overline{CA}$.

Demostrar que (Fig. 34):

T.) 1) $\overline{OA}^2 = \overline{OD} \cdot \overline{OC}$;

2) los puntos A, D, B y C son puntos armónicos.

D_1) Por el 1er Teor. de Euclides se obtiene:

$$\overline{OT}^2 = \overline{OD} \cdot \overline{OC}$$

luego:

$$\overline{OA}^2 = \overline{OD} \cdot \overline{OC}, \text{ pues } \overline{AO} = \overline{OT} = r.$$

D_2) Se dede demostrar que $\overline{TA}$ y $\overline{TB}$ son bisectrices. Se tiene:

$\overline{TA} \perp \overline{TB}$ (por $\frac{1}{2}$ $\odot$ de Thales)

$\alpha = \alpha$' (por N° 227)

$\measuredangle TOD = 2\alpha$ (por N° 100)

$\therefore \measuredangle OBT = 90° - \alpha \Rightarrow \measuredangle DTB = \alpha$

$\Rightarrow$ TB = bisectriz $\measuredangle DTC$

Por otra parte:

$\measuredangle LTA = 90° - \alpha$ (pues $\measuredangle ATO = \alpha$)

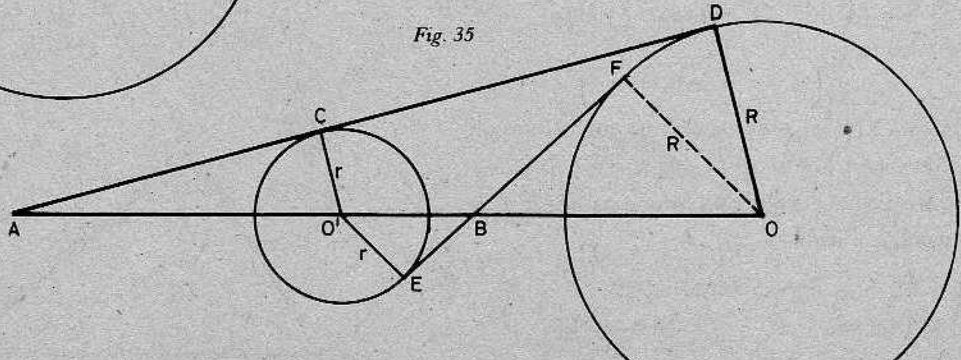
$\measuredangle ATD = 90° - \alpha$ (complemento del $\measuredangle TAD$)

$\therefore \overline{TA}$ = bisectriz.

Por lo tanto: A, B, C y D son puntos armónicos y la $\odot$ (O, $\overline{OB}$) es la circunferencia de Apolonio.

Problema 49) A dos circunferencias exteriores de distintos radios se les trazan las tangentes comunes exteriores e interiores las que cortan a la central $\overline{OO}$' interiormente en B y exteriormente en A. **Demostrar que los puntos A, B, O', O son puntos armónicos (Fig. 35).**

Fig. 35



D.) Por ser $\overline{O'C} // \overline{OD}$ se tiene:

$$\frac{\overline{AO'}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{O'C}}{\overline{OD}} = \frac{r}{R}$$

además, $\overline{O'E} // \overline{OF}$ implica que:

$$\frac{\overline{BO'}}{\overline{BO}} = \frac{\overline{O'E}}{\overline{OF}} = \frac{r}{R}$$

$$\therefore \frac{\overline{AO'}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{BO'}}{\overline{BO}} = \frac{r}{R}$$

Por lo tanto, los puntos A, O', B, O son puntos armónicos.

Problema 50) En el △ STQ los puntos S, P y T son fijos. El ∢ SQT = 80° y el punto P pertenece a la bisectriz de este ángulo.

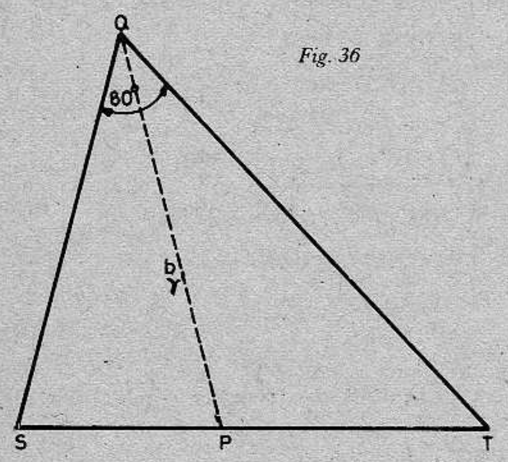


Fig. 36

Se afirma que (Fig. 36):

I) Q se encuentra en el arco capaz de 80° con cuerda $\overline{ST}$;

II) Q se encuentra en el arco capaz de 40° con cuerda $\overline{PT}$;

III) Q se encuentra en la circunferencia que tiene por diámetro la distancia entre P y su punto conjugado.

De estas afirmaciones son verdaderas:

A) sólo I; B) sólo II;
C) sólo III; D) sólo I y II;
E) las tres.

Problema 51) Se pide construir un triángulo ABC de modo que c = 12 cm, a:b = 2:3, $h_c = x$. El valor que debe tener esta altura para que exista una sola solución es:

A) 12 cm; B) 6 cm;
C) 14,4 cm; D) 28,8 cm;
E) 36 cm.

Problema 52) En un triángulo RST la base $\overline{RS}$ = 3 cm y los lados $\frac{\overline{ST}}{\overline{RT}} = \frac{1}{2}$.

La mayor área del △ que reúnen estas condiciones mide:

A) 4,5 cm²; B) 2 cm²;
C) 2,5 cm²; D) 3 cm²;
E) 3,5 cm².

Problema 53) Si un trazo de 24 cm se divide armónicamente en la razón 3:2, entonces la distancia entre el punto de división interior y su punto armónico (o punto conjugado) es:

A) 9,2 cm; B) 48 cm;
C) 57,6 cm; D) 38,4 cm;
E) $\frac{2}{3}$ de 24 cm.

Problema 54) La base de un triángulo mide 24 cm y los otros dos lados son entre sí como 3:2. Entonces, el triángulo de mayor área que puede construirse con estos datos tiene:

A) 345,6 cm²; B) 288,6 cm²;
C) 400,6 cm²; D) 576,6 cm²;
E) 300 cm².

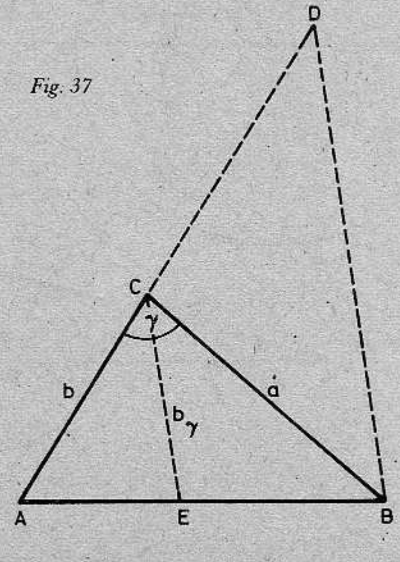
Problema 55) En el △ ABC se hace

$$\overline{CD} = \overline{CB} = a.$$

Demostrar que al trazar la bisectriz $\overline{CE} = b_\gamma$ se obtiene (Fig. 37):

$$\overline{EB} : \overline{EA} = a : b.$$

Fig. 37



Problema 56) En el $\triangle$ ABC se hace

$\overline{CM} = \overline{CB} = a$.

Demostrar que al trazar la bisectriz $\overline{CN} = b_{\gamma}$, del ángulo exterior en C, se obtiene (Fig. 38) $\overline{NB}:\overline{NA} = a:b$

¿Qué teorema queda demostrado con los ejercicios 55 y 56?

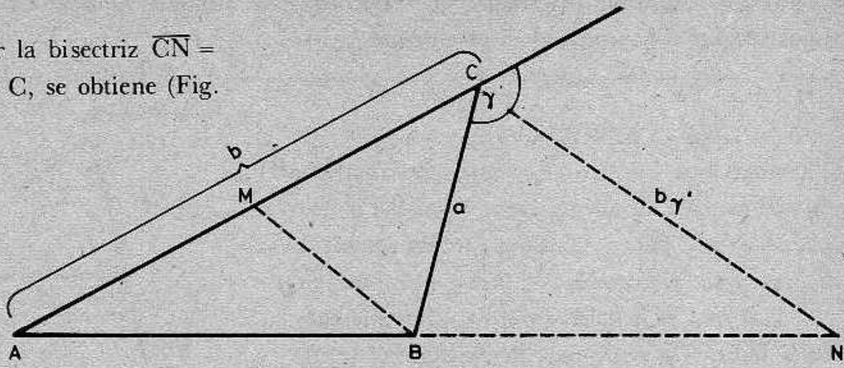


Fig. 38

Resp.: 50 = E; 51 = C; 52 = D; 53 = C; 54 = A

Figuras semejantes. Teorema de semejanza de Thales. Teorema de semejanza de triángulos (Postulados o Axiomas de Semejanza).

302. FIGURAS SEMEJANTES

Ya vimos que las *figuras congruentes* tienen la misma forma y la misma área, y que las *figuras equivalentes* tienen distinta forma, pero la misma área. En cambio, en las *figuras semejantes*, la forma es la misma pero el área diferente. Para indicar la semejanza de las figuras se emplea el signo $\sim$.

En los polígonos semejantes se verifica que (Fig. 1):

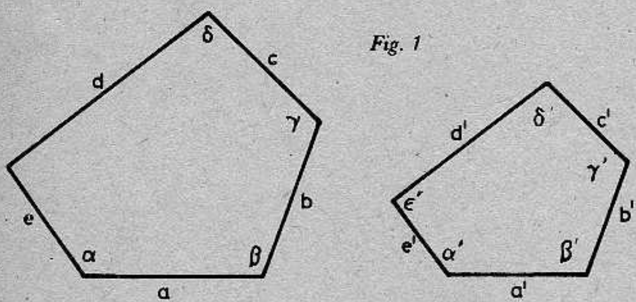


Fig. 1

1°. Los lados homólogos son proporcionales. Es decir:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} = \frac{e}{e'}$$

Esta serie de razones puede escribirse también:

$a:b:c:d:e = a':b':c':d':e'$:

2°. Los ángulos homólogos son iguales. Es decir:

$\alpha = \alpha'; \beta = \beta'; \gamma = \gamma; \delta = \delta'; \epsilon = \epsilon'$

Por lo tanto, para demostrar la semejanza de dos polígonos debe demostrarse que sus lados homólogos son *proporcionales* y que sus ángulos homólogos son *iguales*.

303. TEOREMA DE SEMEJANZA DE THALES

»*Toda paralela a un lado de un triángulo determina otro triángulo semejante al total*«.

H.) $\overline{DE} \,//\, \overline{AB}$

T.) $\triangle$ DEC $\sim$ $\triangle$ ABC

D.) Ya está hecha la demostración al demostrar el Teorema Particular de Thales (N° 283).

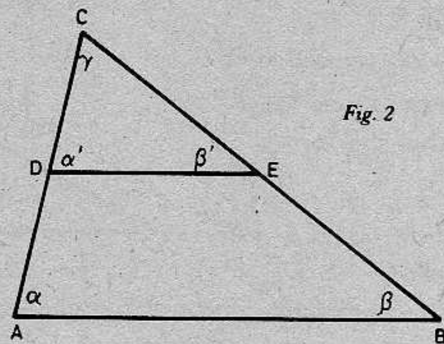


Fig. 2

En efecto, al ser $\overline{DE} \,//\, \overline{AB}$, se obtiene (Fig. 2):

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\overline{CD}}{\overline{CA}} = \dfrac{\overline{CE}}{\overline{CB}} \\[2ex] \dfrac{\overline{CD}}{\overline{CA}} = \dfrac{\overline{DE}}{\overline{AB}} \end{array}\right\} \therefore\ \overline{CD}:\overline{DE}:\overline{CE} = \overline{CA}:\overline{AB}:\overline{CB}$$

Además: $\alpha = \alpha'$ ($\measuredangle$ corresp. entre //)
$\beta = \beta'$ ($\measuredangle$ corresp. entre //)
$\gamma = \gamma$ (ángulo común)

Por lo tanto: $\triangle$ DEC $\sim$ $\triangle$ ABC por tener sus lados homólogos proporcionales y sus ángulos homólogos iguales.

304. TEOREMA DE SEMEJANZA DE TRIANGULOS

Al estudiar la congruencia vimos (N° 120) los llamados »cuatro teoremas de congruencia de triángulos«. En forma paralela a cada uno de ellos existe un teorema de semejanza que muchos profesores los postulan, pero que pueden demostrarse. Estos cuatro teoremas de semejanza son:

Primer Teorema de semejanza: »Dos triángulos son semejantes cuando tienen dos ángulos respectivamente iguales«.

H.) $\alpha = \alpha', \gamma = \gamma'$ (Fig. 3).

T.) $\triangle$ A'B'C' $\sim$ $\triangle$ ABC.

D.) Nos basaremos en el Teor. de semejanza de Thales.
Se copia $\overline{CD} = \overline{C'A'}$ y se traza por D // $\overline{AB}$.

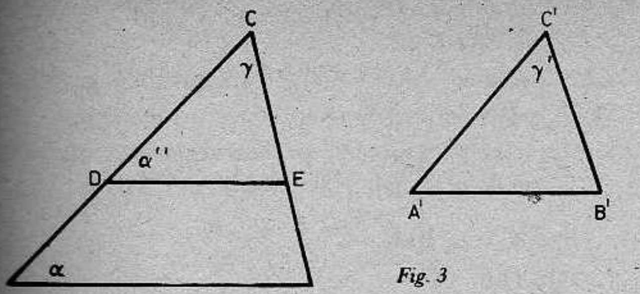


Fig. 3

Resulta:

$\triangle$ DEC $\sim$ $\triangle$ ABC. Se demuestra ahora que el $\triangle$ DEC $\cong$ $\triangle$ A'B'C'.

En efecto:

$$\begin{array}{rl} & \alpha = \alpha'' \text{ (} \measuredangle \text{ correspondientes entre //)} \\ & \alpha = \alpha' \text{ (por H.)} \\ \hline \therefore & \alpha' = \alpha'' \\ & \gamma = \gamma' \text{ (por H.)} \\ & \overline{CD} = \overline{C'A'} \text{ (por construcción)} \\ \hline \therefore & \triangle DEC \cong A'B'C' \\ & \text{pero } \triangle DEC \sim \triangle ABC \text{ (por Teor. Thales)} \\ \hline & \text{Luego: } \triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \end{array}$$

Segundo Teorema de semejanza: »Dos triángulos son semejantes cuando tienen un ángulo igual y proporcionales los dos lados que lo forman«.

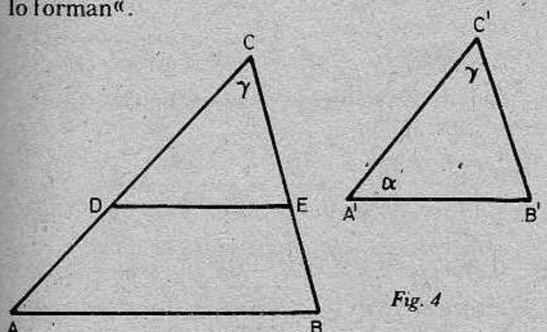


Fig. 4

H.) $\gamma = \gamma'$, $\overline{CA}:\overline{CB} = \overline{C'A'}:\overline{C'B'}$ (Fig. 4).

T.) $\triangle$ A'B'C' $\sim$ $\triangle$ ABC

D.) Se copia $\overline{CD} = \overline{C'A'}$ y por D se traza la paralela a $\overline{AB}$.

Resulta:

$\triangle$ CDE $\sim$ $\triangle$ ABC (por Teo. Thales)

$$\text{pero } \triangle CDE \cong \triangle A'B'C' \text{ pues: } \left\{ \begin{array}{l} \overline{CD} = \overline{C'A'} \\ \gamma = \gamma' \\ \left. \begin{array}{l} \overline{CD}:\overline{CE} = \overline{CA}:\overline{CB} \\ \overline{C'A'}:\overline{C'B'} = \overline{CA}:\overline{CB} \end{array} \right\} \therefore \overline{CD}:\overline{CE} = \overline{C'A'}:\overline{C'B'} \\ \text{de donde: } \overline{CE} = \overline{C'B'} \text{ pues } \overline{CD} = \overline{C'A'} \end{array} \right.$$

Luego: $\triangle$ A'B'C' $\sim$ $\triangle$ ABC.

Tercer Teorema de semejanza: »Dos triángulos son semejantes cuando tienen dos lados respectivamente proporcionales e igual el ángulo opuesto a los lados mayores de éstos«.

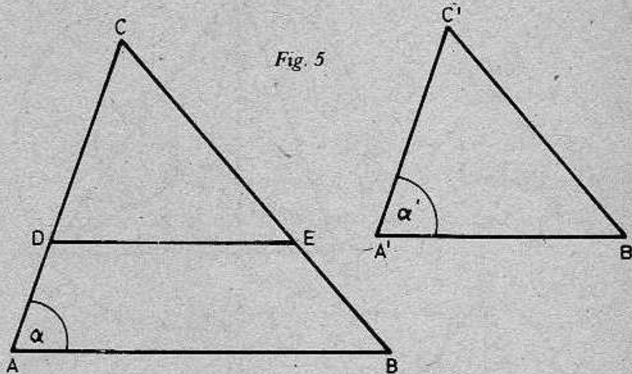


Fig. 5

H.) $\overline{CA} : \overline{CB} = \overline{C'A'}:\overline{C'B'}$

$\overline{CB} > \overline{CA}$; $\overline{C'B'} > \overline{C'A'}$

$\alpha = \alpha'$

T.) $\triangle$ A'B'C' $\sim$ $\triangle$ ABC

D.) Análoga a la del 2° Teorema.

Cuarto Teorema de semejanza: »Dos triángulos son semejantes cuando tienen sus tres lados respectivamente proporcionales«.

H.) $\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CA} = \overline{A'B'}:\overline{B'C'}:\overline{C'A'}$

T.) $\triangle$ A'B'C' $\sim$ $\triangle$ ABC

D.) ¡Hágala usted.!... siempre que la considere necesaria.

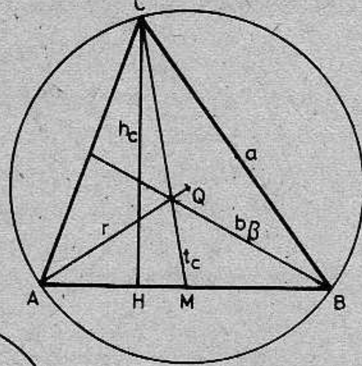
305. OBSERVACION

Estos cuatro teoremas de semejanza sirven para **demostrar la *proporcionalidad*** de trazos y la *igualdad* de ángulos. Además, de todos ellos es el *primero* el que más se usa en las demostraciones; es decir, que basta buscar dos ángulos iguales para que los triángulos que se comparan sean semejantes.

306. COROLARIOS

a) Dos triángulos son semejantes cuando tienen sus lados respectivamente paralelos (N° 92).

Fig. 6



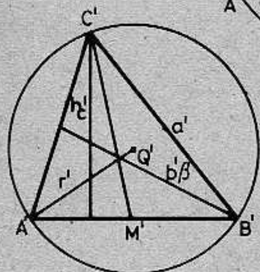


Fig. 7

b) Dos triángulos son semejantes cuando tienen sus lados respectivamente perpendiculares (N° 97).

c) (Es el más importante y útil): »En los triángulos semejantes los lados homólogos son proporcionales a las transversales homólogas«. (Es decir: a las alturas homólogas, a las bisectrices homólogas, a las transversales de gravedad homólogas, etc., como asimismo, a los radios y apotemas homólogos).

Así, si el $\triangle$ ABC $\sim$ $\triangle$ A'B'C' se obtiene:

$$a:a' = h_c:h_c' = t_c:t_c' = b_\beta:b_{\beta'} = r:r' = \rho:\rho' = \ldots$$

Como ejercitación y aplicación demuestre algunas de estas proporcionalidades.

d) En los triángulos semejantes lo lados proporcionales se oponen a ángulos iguales; y a ángulos iguales se oponen lados proporcionales.

e) Todos los triángulos equiláteros son semejantes entre sí.

f) Todos los polígonos regulares del mismo número de lados son semejantes entre sí.

g) Todos los círculos son semejantes entre sí.

307. EJERCICIOS

1) *Teorema LXXXVIII*: »El centro de gravedad de un triángulo divide a cada transversal de gravedad en dos segmentos que son entre sí como 1:2«. (Véase N° 196).

H.) $\overline{AN} = t_a$; $\overline{BM} = t_b$

$t_a \cap t_b = \{G\}$

T.) $\dfrac{\overline{GN}}{\overline{GA}} = \dfrac{\overline{GM}}{\overline{GB}} = \dfrac{1}{2}$

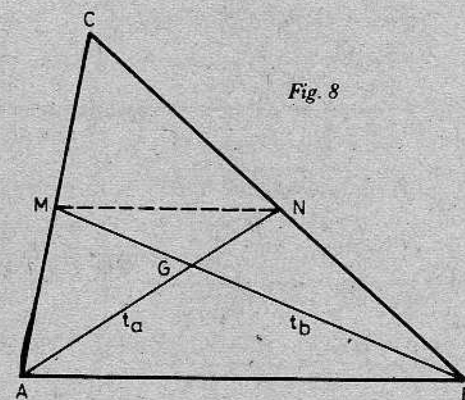


Fig. 8

D.) Se une M con N, resultando

$\overline{MN}$ = mediana y, por lo tanto, $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$ y $\overline{MN} = 1/2\ \overline{AB}$ (por N° 170).

Además, por el 1^{er} Teorema de semejanza, se tiene:

$\triangle$ MNG $\sim$ $\triangle$ BAG; de la proporcionalidad de los lados de estos triángulos resulta:

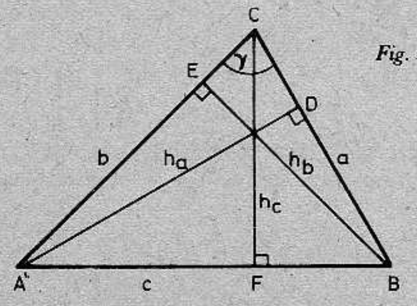
$$\frac{\overline{GM}}{\overline{GB}} = \frac{\overline{GN}}{\overline{GA}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{AB}} = \frac{\frac{1}{2}\ \overline{AB}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2}$$

2) *Teorema LXXXIX:* »En un triángulo las alturas son inversamente proporcionales a los lados correspondientes«. (Recordar que: »dos cantidades son inversamente proporcionales cuando su producto es constante«).

H.) $\overline{AD} = h_a$, $\overline{BE} = h_b$, $\overline{CF} = h_c$ (Fig. 9)

T.) $a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c$

Fig. 9



Puede escribirse también:

$$a : b : c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c}$$

D.) Demostraremos primeramente que

$$a \cdot h_a = b \cdot h_b \Longrightarrow \frac{a}{b} = \frac{h_b}{h_a}$$

Se tiene:

$$\triangle ADC \sim \triangle BEC \begin{cases} \gamma = \sphericalangle \text{ común} \\ \sphericalangle ADC = \sphericalangle BEC = 90° \end{cases}$$

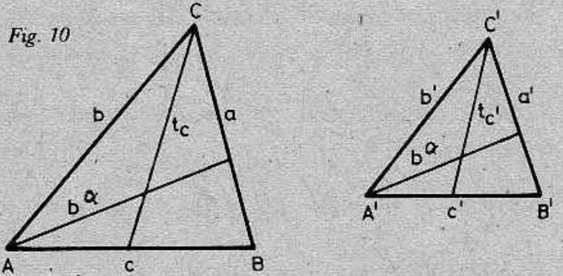
(Por 1er Teorema de $\sim$)

$$\therefore \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{BC}} \Longrightarrow \frac{h_a}{b} = \frac{h_b}{a},$$

En la misma forma y tomando otro par de triángulos se demuestra que $h_a \cdot a = h_c \cdot c$.

3) *Teorema XC:* »Los perímetros de dos triángulos semejantes son proporcionales a dos lados homólogos o a dos transversales homólogas«.

Fig. 10



H.) $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ (Fig. 10)

T.) $2s : 2s' = a : a' = t_c : t_{c'} = b_\alpha : b_{\alpha'} = \ldots$

D.) Como los triángulos son semejantes se obtiene la proporcionalidad de sus lados:

$$a : b : c = a' : b' : c'$$

Componiendo esta serie de razones, se obtiene:

$$\frac{a+b+c}{a'+b'+c'} = \frac{a}{a'} \quad \text{pero} \begin{cases} a + b + c = 2s \\ a' + b' + c' = 2s' \end{cases}$$

Luego: $\frac{2s}{2s'} = \frac{a}{a'}$

Además, por Nº 306 c, resulta:

$$\frac{a}{a'} = \frac{h_c}{h_c'} = \frac{b_\alpha}{b'_\alpha} \ldots$$

De donde: $\frac{2s}{2s'} = \frac{a}{a'} = \frac{h_c}{h_c'} = \ldots$

Observación: El teorema LXXXIX, también puede demostrarse de la manera siguiente y basándose en el cálculo de la medida del área de un triángulo:

$$\text{área} \triangle ABC = \frac{1}{2} c \cdot h_c = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b$$

al dividir por $\frac{1}{2}$ resulta:

$$c \cdot h_c = a \cdot h_a = b \cdot h_b \Longrightarrow a : b : c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c}$$

4) *Problema.* Se da el # ABCD (Fig. 11). Desde D se traza una transversal que divide al lado $\overline{AB}$ en la razón 1:n. Demostrar que esta transversal divide a la diagonal $\overline{AC}$ en la razón $1:(1+n)$

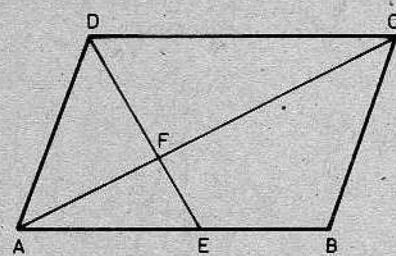


Fig. 11

Como $\overline{AE} : \overline{EB} = 1:n$ y $\overline{AB} = \overline{CD}$

resulta: $\triangle AEF \sim \triangle CDF$ (1er Teor. de $\sim$)

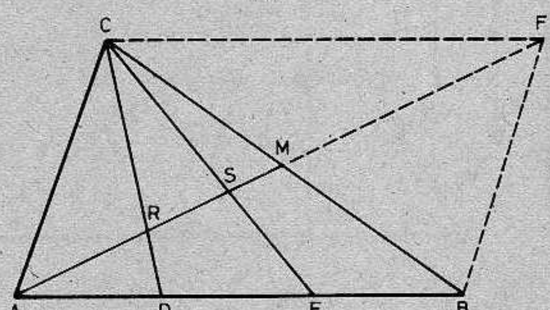
luego: $\frac{\overline{AE}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{FC}}$

Pero $\frac{\overline{AE}}{\overline{DC}} = \frac{1}{1+n}$. Por lo tanto: $\frac{\overline{AF}}{\overline{FC}} = \frac{1}{1+n}$

5) *Problema.* La base AB de un $\triangle$ ABC se divide en tres partes iguales y se unen estos puntos de división con el vértice C. La transversal de gravedad $t_a = \overline{AM}$ divide a uno de los segmentos de unión en la razón 1:3 y al otro segmento en la razón 2:3. Demostrarlo (Fig. 12).

Se sabe que $\overline{AD} = \overline{DE} = \overline{EB}$; $\overline{AM} = t_a$.

Fig. 12



Demostraremos que $\overline{RD} : \overline{RC} = 1:3$

y que $\overline{SE} : \overline{SC} = 2:3$

Para esto se completa el # ABFC obteniéndose: $\triangle ADR \sim \triangle CRF$

lo que implica que:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{RD}}{\overline{RC}} = \frac{1}{3}$$

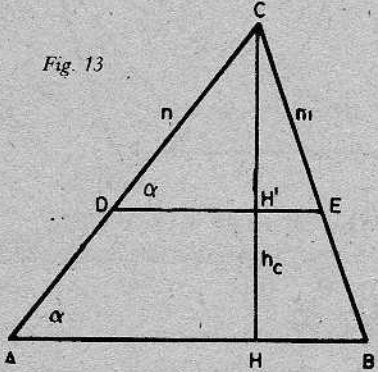
Además,

$$\triangle AES \sim \triangle FCS \Rightarrow \frac{\overline{AE}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{SE}}{\overline{SC}} = \frac{2}{3}$$

6) *Problema.* $\triangle$: c, a : b = m : n, α, h_c

Análisis: si en el $\triangle$ ABC se trazan paralelas al lado $\overline{AB}$ se determinan infinitos triángulos que son semejantes al $\triangle$ pedido ABC. De todos estos triángulos hay que elegir aquel que tiene $\overline{CE}$ = m, $\overline{CD}$ = n y $\measuredangle$CDE = α.

Fig. 13



Construido este triángulo se ha conseguido tener el triángulo semejante al pedido (Fig. 13). Para llegar a este último se traza la perpendicular $\overline{CH'}$ y se copia sobre ella desde C la altura dada $h_c = \overline{CH}$. Finalmente, la paralela por H a $\overline{DE}$ corta a $\overline{CD} \rightarrow$ D y a $\overline{CE} \rightarrow$E en los puntos A y B

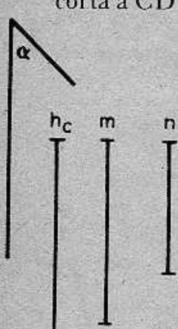
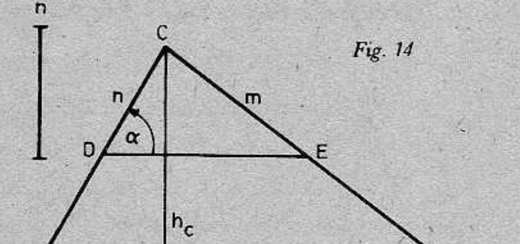


Fig. 14

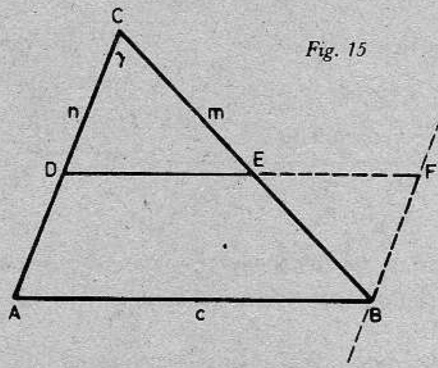


Construcción: (Fig. 14): 1) Se copia α; 2) se copia n = $\overline{DC}$; 3) arco $\odot$ (C, m) determina E; 4) desde C la perpendicular a $\overline{DE}$; 5) se copia $h_c = \overline{CH}$; 6) por H // $\overline{DE}$; 7) $\overline{CD} \rightarrow$D y $\overline{CE}$ $\rightarrow$E; etc.

7) *Problema.* $\triangle$: c, a : b = m : n, γ

Análisis: con m, n y γ se construye el $\triangle$ auxiliar DEC que es semejante al $\triangle$ pedido ABC (Fig. 15).

Fig. 15



En seguida, desde D se copia c, de modo que $\overline{DF}$ =c. La paralela por F a $\overline{CD}$ y la prolongación de $\overline{CE} \rightarrow$ E determinan B.

Finalmente, por B // $\overline{DF}$ y $\overline{CD} \rightarrow$ D determinan A.

Construcción: dése los datos y haga la construcción.

Problema 8) $\triangle$: a:b = m:n, β, b_γ

Problema 9) $\triangle$: a:b = m:n, γ, p

Problema 10) $\triangle$: p:q = m:n, α, b_β

Problema 11) $\triangle$: *a:b:c* = m:n:k, t_c

Problema 12) $\triangle$: *a:b:c* = 4:5:6, h_a

Problema 13) Demostrar que el área de un $\triangle$ es A = $\frac{abc}{4r}$ (Si no logra demostrarlo consulte el N° 272-4).

Problema 14) Demostrar la fórmula de Herón para calcular el área de un triángulo, es decir:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

(Si no logra la demostración consulte N° 272-2).

Problema 15) Demostrar que en cualquier triángulo se verifica que (Fig. 16):

T.) ab = 2r · h_c

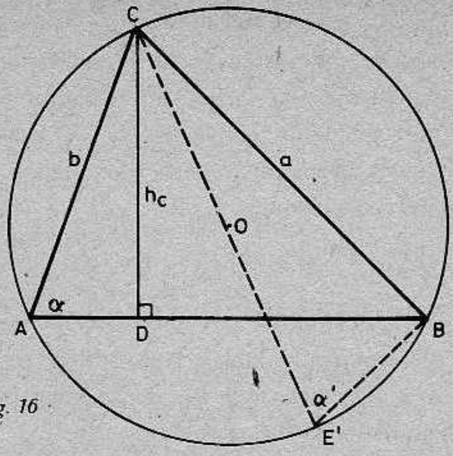


Fig. 16

D.) Se traza el diámetro desde C resultando:

$\triangle CAD \sim \triangle CEB$ pues $\begin{cases} \alpha = \alpha' \text{ (N° 228-1)} \\ \measuredangle CDA = \measuredangle CBE = 90° \end{cases}$
(por 1er Teor. de $\sim$) (N° 228-2)

$\therefore \frac{a}{h_c} = \frac{2r}{b} \Rightarrow ab = 2r \cdot h_c$

Problema 16) Demostrar que en cualquier triángulo se verifica que (Fig. 17):

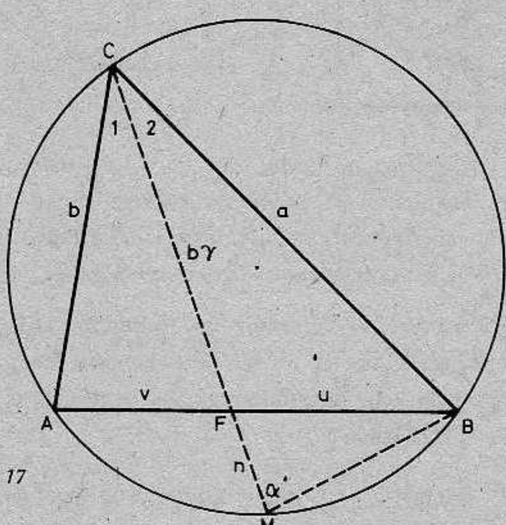


Fig. 17

T.) $ab = b_\gamma^2 + u \cdot v$

D.) Los segmentos que la bisectriz b_γ determina en la base $\overline{AB}$ son $u = \overline{FB}$ y $\overline{FA} = v$. Al prolongar esta bisectriz hasta cortar la circunferencia circunscrita al triángulo, resulta:

$\triangle AFC \sim \triangle MBC$ pues: $\begin{cases} \alpha = \alpha' \text{ (N° 228-1)} \\ \measuredangle 1 = \measuredangle 2 \end{cases}$
(Por 1er Teor. de $\sim$)

$\therefore \frac{\overline{CA}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{CM}}{\overline{BC}} \rightarrow \frac{b}{b_\gamma} = \frac{b_\gamma + n}{a}$

de donde: $ab = b_\gamma^2 + n \cdot b_\gamma$

pero $n \cdot b_\gamma = u \cdot v$ (N° 313).

Luego: $ab = b_\gamma^2 + u \cdot v$

Problema 17) En una pared de un edificio se dibuja un polígono de 10 metros de perímetro. En seguida se dibuja de éste un polìgono semejante en escala 2:50 y después se dibuja sobre un papel otro polígono cuya razón de semejanza con el anterior es 3:4.

Calcular la nueva escala en que debe dibujarse este último polígono y la longitud de su perímetro.

Solución: Sean a, a', a'' lados homólogos de estos polígonos.

Luego:

$\frac{a'}{a} = \frac{2}{50} \Rightarrow a' = \frac{2}{50} a$

$\frac{a''}{a'} = \frac{3}{4} \Rightarrow a'' = \frac{3}{4} a' = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{50} a = \frac{3}{100} a$

Por lo tanto: $\frac{a''}{a} = \frac{3}{100}$; la nueva escala es 3/100.

Siendo p y p'' los perímetros, se obtiene:

$\frac{p''}{p} = \frac{3}{100} \therefore p'' = \frac{3}{100} \cdot 10 \text{ m} = 0{,}3 \cdot \text{m} = 30 \text{ cm}.$

Problema 18) Demostrar que si desde un punto P de la base de un triángulo isósceles se trazan las perpendiculares a los lados, la suma de estas perpendiculares es constante. (Esta constante es igual a una de las alturas basales: h_a ó h_b).

H.) $\overline{CA} = \overline{CB}$; $\overline{PD} \perp \overline{AC}$ y $\overline{PE} \perp \overline{BC}$

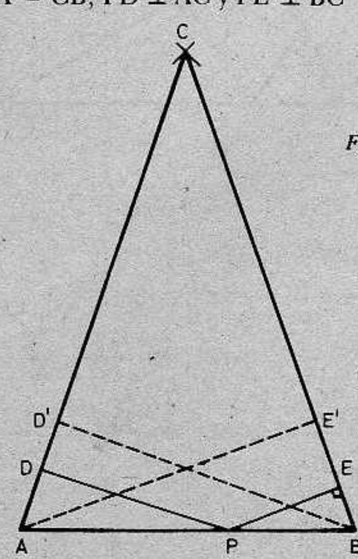


Fig. 18

T.) $\overline{PD} + \overline{PE}$ = constante = h.

D.) Se traza $h_a = \overline{AE'}$ y $h_b = \overline{BD'}$ que sabemos que son iguales, es decir: $h_a = h_b = h$. Aplicando el teorema Particular de Thales, se obtiene (Fig. 18):

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{PD}}{\overline{BD'}} \quad \therefore \quad \overline{PD} = \dfrac{\overline{AP}}{\overline{AB}} \cdot \overline{BD'} \\ \dfrac{\overline{BP}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{PE}}{\overline{AE'}} \quad \therefore \quad \overline{PE} = \dfrac{\overline{BP}}{\overline{AB}} \cdot \overline{AE'} \end{array}\right\} +$$

Se suman: $\overline{PD} + \overline{PE} = \dfrac{(\overline{AP} + \overline{BP}) \cdot h}{\overline{AB}}$

puesto que $\overline{BD'} = \overline{AE'} = h$.

Por lo tanto: $\overline{PD} + \overline{PE} = h$,

pues: $\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{AB}$

(véase demostración en N° 146 N° 13).

Problema 19) Desde un punto P situado en la hipotenusa de un triángulo rectángulo se trazan las perpendiculares $\overline{PD}$ y $\overline{PE}$ a los catetos. Demostrar que la suma de las dos perpendiculares equivale a un cateto de este triángulo.

Problema 20) En un rectángulo de lados »a« y »b« se trazan las diagonales. Desde un punto P situado en uno de los lados se trazan las perpendiculares a las diagonales. Demostrar que la suma de estas distancias es constante.

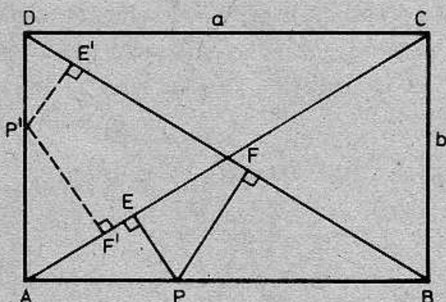


Fig. 19

H.) $\overline{PE} \perp \overline{AC}$ y $\overline{PF} \perp \overline{BD}$ (Fig. 19).

T.) $\overline{PE} + \overline{PF}$ = const. = a

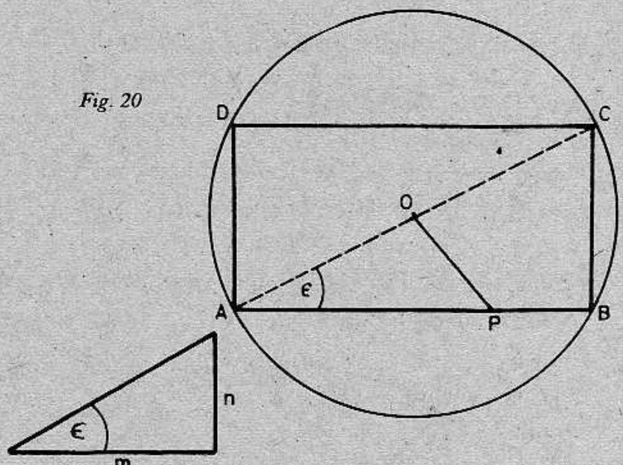
$\overline{P'E'} + \overline{P'F'}$ = const. = b

Problema 21) Siendo »a« y »b« los lados de un rectángulo, »e« la diagonal y »x« la perpendicular desde un vértice a esta diagonal; demostrar que esta perpendicular es cuarta proporcional geométrica entre los lados y la diagonal de modo que:

$$x = \frac{ab}{e}$$

Problema 22) Inscribir en una circunferencia dada un rectángulo cuyos lados estén en la razón m:n y de modo que uno de los lados pase por un punto P dado del círculo (Fig. 20).

Fig. 20



Indicación: 1) con m y n se determina el ángulo ε; 2) se dibuja el arco capaz de ε con cuerda $\overline{OP}$; 3) la intersección de este arco con la circunferencia dada determina A, etc.

Problema 23) Construir un triángulo ABC del cual se conoce el vértice C y el punto medio M del lado $\overline{AB}$, de modo que sea semejante a un △ A'B'C' dado.

Problema 24) En una circunferencia de 5 cm de radio se trazan dos diámetros perpendiculares: $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$ (Fig. 21).

Desde A se traza una cuerda $\overline{AC}$ de 8 cm que corta a $\overline{DE}$ en P. Calcular los segmentos $\overline{AP}$, $\overline{PC}$, $\overline{PD}$ y $\overline{PE}$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{D.)}\ \triangle\ APE \sim \triangle\ ACB \Rightarrow \dfrac{\overline{AP}}{\overline{PE}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \Rightarrow \overline{PE} = \overline{AP} \cdot \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \\ \triangle\ BPF \sim \triangle\ BDA \Rightarrow \dfrac{\overline{PB}}{\overline{PF}} = \dfrac{\overline{BD}}{\overline{AD}} \Rightarrow \overline{PF} = \overline{PB} \cdot \dfrac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \end{array}\right\} +$$

... (siga usted)...

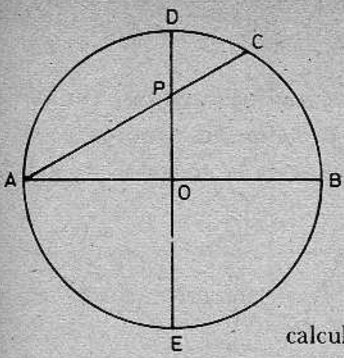


Fig. 21

(Indicación: calcular previamente $\overline{BC}$).

Problema 25) A cierta hora del día un poste de teléfonos da una sombra de 15 metros; al mismo tiempo un operario de 1,80 metros de alto da una sombra de 200 cm. Entonces, la altura del poste es:

A) $16\frac{2}{3}$ m; B) 1.350 cm;

C) 4.167 mm; D) 0,027 km;

E) 2.083 cm.

Problema 26) El perímetro del $\triangle$ PRS es de 18 cm (Fig. 22); si se traza $\overline{VM}$ paralela a $\overline{PS}$ entre los lados del $\triangle$ VRM se verifica que $\overline{VM}$ = 3cm, RM = 4 cm y $\overline{VR}$ = 5 cm. Con estas condiciones entre los lados del $\triangle$ PRS se obtiene sólo una de las siguientes alternativas:

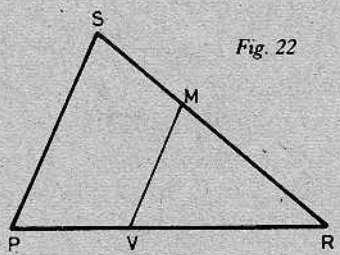


Fig. 22

A) $\overline{RS}$ = 8 cm;

B) $\overline{PS}$ = 6 cm;

C) $\overline{PR}$ = 10 cm;

D) $\overline{RS} - \overline{PS}$ = 4,5 cm; E) $\overline{RS} + \overline{PR}$ = 13,5 cm.

Problema 27) En un $\triangle$ ABC el lado $\overline{AC}$ = = 18 cm y el lado $\overline{BC}$ = 16 cm. Si la altura del vértice B mide 8 cm, ¿cuánto mide la altura desde A?

Problema 28) Los lados de un $\triangle$ ABC miden a = 24 cm, b = 18 cm, c = 30 cm. El perímetro de otro $\triangle$ A'B'C' semejante al anterior es 108 cm. ¿Cuánto miden los lados y el área del $\triangle$ A'B'C'?

Problema 29) En un triángulo equilátero de 6 cm de lado se pide calcular:

a) el radio de la cirunferencia circunscrita; b) el radio de la circunferencia inscrita.

Problema 30) Dos rectángulos son semejantes. La diagonal del primero mide 40 cm y los lados del segundo son entre sí como 3:4. Calcular lo que miden los lados del primero.

Problema 31) Construir un rectángulo que tenga por diagonal una magnitud dada »d« y sea semejante a otro rectángulo cuyos lados son entre sí como m:n. (Indicación: por homotesia; o bien, por aplicación del álgebra-geométrica).

Problema 32) Si en el triángulo QRT se traza $\overline{TU}$ paralela a $\overline{QR}$ y además, $\overline{QR}$ = 24 cm, $\overline{QT} = \frac{1}{4}$ de $\overline{SQ}$, entonces el valor de $\overline{TU}$ es:

A) 12 cm;

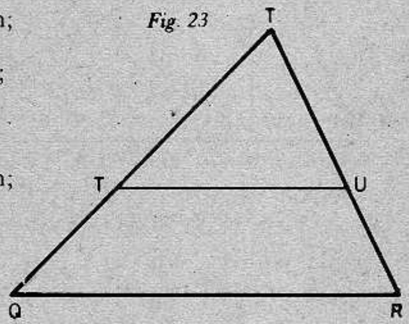
B) 6 cm;

C) 9 cm;

D) 18 cm;

E) 8 cm.

Fig. 23

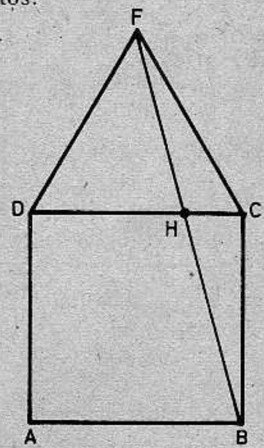


Tarea: ABCD es un cuadrado de lado »a« y DCF es un triángulo de lados »a«.

Calcular los segmentos:

$\overline{DH}$, $\overline{HC}$, $\overline{HF}$, $\overline{HB}$ y $\overline{BF}$.

Fig. 24



Resp.:

25) B;

26) E;

27) 9 cm;

28) 27 cm, 36 cm, 45 cm y 486 cm^2;

29) $r = 2\sqrt{3}$, $\rho = \sqrt{3}$;

30) 6 cm, 8 cm; 31) $x = \frac{d \cdot m}{m^2 + n^2}$; 32) D;

33) $DH = a(\sqrt{3} - 1)$;

$HC = a(2 - \sqrt{3})$; $FH = a\sqrt{6 - 3\sqrt{3}}$;

$HB = 2a\sqrt{2 - \sqrt{3}}$; $BF = a\sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

29ª UNIDAD

Relaciones métricas en el triángulo rectángulo y en el círculo. Teoremas de Euclides. Teoremas de las cuerdas, de las secantes y de la tangente. Construcciones de la media proporcional geométrica. Teorema general de Pitágoras. Construcciones de las raíces de la ecuación de Segundo Grado (ecuación cuadrática).

---

308. TEOREMA XCI

Segundo Teorema de Euclides: »*La altura de un triángulo rectángulo es media proporcional geométrica entre los dos segmentos que determina en la hipotenusa*«.

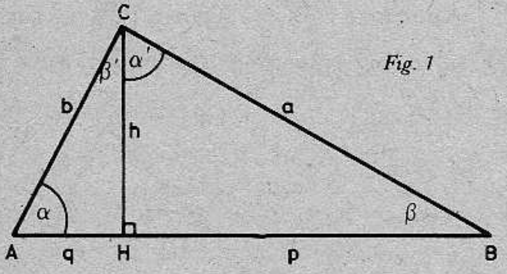


Fig. 1

H.) ABC es △ rectángulo (Fig. 1).

$\overline{CH}$ = altura = h

$\overline{AH}$ = q, $\overline{HB}$ = p

T.) $\dfrac{\overline{AH}}{\overline{CH}} = \dfrac{\overline{CH}}{\overline{BH}} \Longrightarrow \dfrac{q}{h} = \dfrac{h}{p}$

o bien: $\boxed{h^2 = p \cdot q}$

D.) Se tiene:

△ AHC △ CHB, pues: (por 1er Teor. de ∼)
$\begin{cases} \alpha = \alpha' \text{ (son ∡ de lados } \perp \text{ o porque tienen el mismo complemento } \beta') \\ \beta = \beta' \text{ (ídem)} \end{cases}$

$\therefore \dfrac{\overline{AH}}{\overline{CH}} = \dfrac{\overline{CH}}{\overline{HB}} \Longrightarrow \overline{CH}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{HB}$

$\Longrightarrow \boxed{h^2 = p \cdot q}$

Esta ecuación expresa lo que ya conocimos por Segundo Teorema de Euclides (N° 265).

309. TEOREMA XCII

Primer Teorema de Euclides: »*Cada cateto de un triángulo rectángulo es media proporcional geométrica entre la hipotenusa y la proyección del cateto en ella*«.

H.) $\overline{AH}$ = q, es la proyección del cateto $\overline{AC}$ en la hipotenusa $\overline{AB}$.

$\overline{HB}$ = p, es la proyección del cateto $\overline{BC}$ en la hipotenusa $\overline{AB}$.

T.) $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CA}} = \dfrac{\overline{CA}}{\overline{AH}}$ y $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{HB}}$

o bien: $a^2 = c \cdot p$; $b^2 = c \cdot q$

D.) Se tiene:

△ ABC ∼ △ AHC pues (por 1er Teor. de ∼)
$\begin{cases} \alpha = \text{ángulo común} \\ \beta = \beta' \text{ (∡ lados } \perp) \end{cases}$

$\therefore \dfrac{\overline{AB}}{\overline{CA}} = \dfrac{\overline{CA}}{\overline{AH}} \Longrightarrow \overline{CA}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AH}$

$\therefore \boxed{b^2 = c \cdot q}$

lo que demuestra el Primer Teorema de Euclides (N° 262).

Análogamente, por la semejanza del △ ABC con el △ CHB se obtiene:

$\boxed{a^2 = c \cdot p}$ (Fig. 1).

310. COROLARIOS:

a) De los dos teoremas anteriores se obtiene que: »la altura de un triángulo rectángulo lo divide en dos triángulos semejantes entre sí y semejantes al total«. Es decir:

△ AHC ∼ △ CHB ∼ △ ABC

b) »Los cuadrados construidos sobre los catetos de un triángulo rectángulo son proporcionales a las proyecciones de los catetos en la hipotenusa«. En efecto:

$:\begin{cases} a^2 = c \cdot p \text{ (1}^{er} \text{ Teor. Euclides)} \\ b^2 = c \cdot q \text{ (1}^{er} \text{ Teor. Euclides)} \end{cases}$

Luego: $\boxed{\dfrac{a^2}{b^2} = \dfrac{p}{q}}$

c) »Toda cuerda es media proporcional geométrica entre el diámetro que parte de uno de sus extremos, y la proyección de la cuerda sobre este diámetro«.

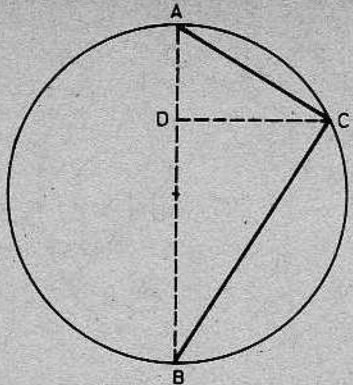


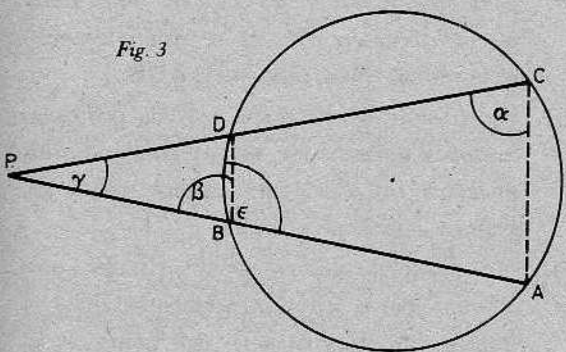
Fig. 2

Es decir: $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{AC} : \overline{AD}$ (Fig. 2), pues el $\triangle$ ABC es rectángulo y $\overline{AD}$ es la proyección del cateto $\overline{AC}$ sobre la hipotenusa $\overline{AB}$.

311. TEOREMA XCIII

»Si desde un punto fuera de un círculo se trazan dos secantes, las secantes son inversamente proporcionales a sus segmentos externos«.

Fig. 3



H.) $\overline{PA}$ y $\overline{PC}$ son dos secantes desde P.
$\overline{PB}$ y $\overline{PD}$ son los segmentos externos (Fig. 3).

T.) $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD} \Rightarrow \dfrac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = \dfrac{\overline{PD}}{\overline{PB}}$

D.) Se tiene:

$\triangle$ PAC $\sim$ $\triangle$ PDB, pues: $\begin{cases} \gamma = \text{común} \\ \alpha = \beta \text{ (tienen el mismo suplemento } \epsilon) \text{ (N° 233)} \end{cases}$

(por 1^er^ Teor. de $\sim$)

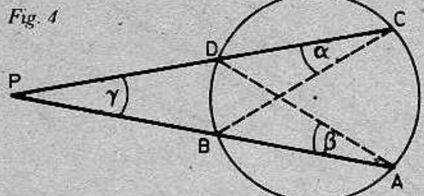
$\therefore \dfrac{\overline{PA}}{\overline{PD}} = \dfrac{\overline{PC}}{\overline{PB}}$

pues: $\begin{cases} \overline{PA} \text{ es homólogo de } \overline{PD}\ (\alpha = \beta) \\ \overline{PC} \text{ es homólogo de } \overline{PB}\ (\measuredangle A = \measuredangle D) \end{cases}$

o bien: $\boxed{\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}}$

Otra demostración (Fig. 4):

Fig. 4



$\triangle$ PAD $\sim$ $\triangle$ PCB, pues: $\begin{cases} \gamma = \measuredangle \text{ común} \\ \alpha = \beta \text{ (inscritos en el mismo arco } \overset{\frown}{BD}) \end{cases}$

(por 1^er^ Teor. de $\sim$)

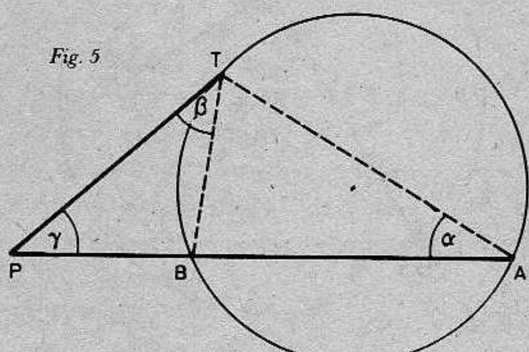
$\therefore \overline{PA} : \overline{PD} = \overline{PC} : \overline{PB}$,

pues: $\begin{cases} \overline{PA} \text{ y } \overline{PC} \text{ son lados homólogos } (\measuredangle B = \measuredangle D) \\ \overline{PB} \text{ y } \overline{PD} \text{ son lados homólogos } (\alpha = \beta) \end{cases}$

312. TEOREMA XCIV

»Si desde un punto fuera de un círculo se trazan una tangente y una secante, la tangente es media proporcional geométrica entre la secante y su segmento externo«.

Fig. 5



H.) $\overline{PA}$ = secante y $\overline{PB}$ = segmento externo
$\overline{PT}$ = tangente (Fig. 5)

T.) $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PT}} = \dfrac{\overline{PT}}{\overline{PB}} \Longrightarrow \boxed{\overline{PT}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}}$

D.) Se tiene:

$\triangle$ PAT $\sim$ $\triangle$ PTB, pues: $\begin{cases} \gamma = \measuredangle \text{ común} \\ \alpha = \beta \text{ (N° 227)} \end{cases}$

(por 1^er^ Teor. de $\sim$)

$\therefore \overline{PA} : \overline{PT} = \overline{PT} : \overline{PB} \Rightarrow \overline{PT}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$

Otra demostración: (Fig. 6) Al girar la secante $\overline{PC}$ en torno a P los puntos C y D se van acercando hasta que, en el punto de tangencia T, se confunden $\overline{PC}$ con $\overline{PD}$, hacién-

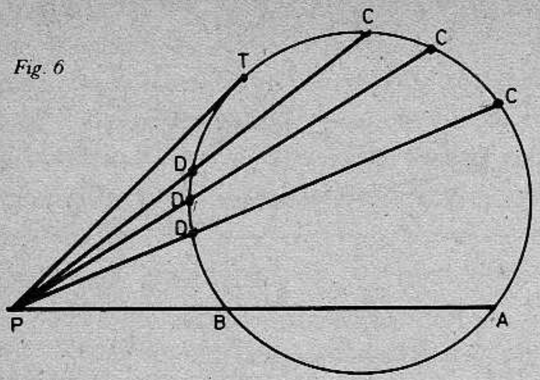


Fig. 6

dose iguales a la tangente $\overline{PT}$. Luego, al aplicar el Teorema XCIII, resulta:

$$\overline{PA} : \overline{PD} = \overline{PC} : \overline{PB} \Rightarrow \overline{PA} : \overline{PT} = \overline{PT} : \overline{PB}$$

313. TEOREMA XCV

»Los segmentos de dos cuerdas que se cortan dentro de un círculo son inversamente proporcionales«.

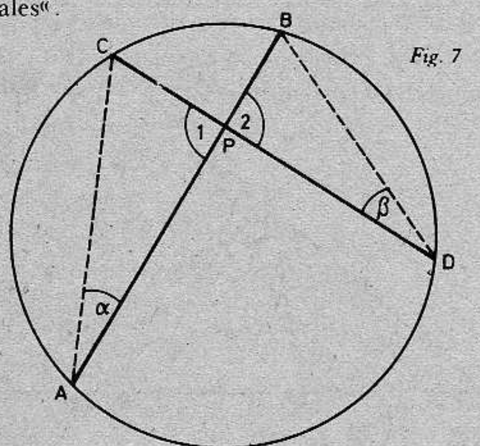


Fig. 7

H.) $\overline{AB} \cap \overline{CD} = \{P\}$

T.) $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD} \Rightarrow \dfrac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = \dfrac{\overline{PD}}{\overline{PB}}$

D.) $\triangle APC \sim \triangle DPB$, pues: $\begin{cases} \measuredangle 1 = \measuredangle 2 \\ \alpha = \beta \text{ (N° 228)} \end{cases}$
(por 1er Teor. de $\sim$)

$$\therefore \quad \frac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{PB}} \Rightarrow \boxed{\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}}$$

314. COROLARIO

»Si dentro de un círculo se cortan dos cuerdas de modo que una dimidia a la otra, cada mitad de la cuerda dimidiada es media proporcional geométrica entre los segmentos de la ótra«.

En efecto, si $\overline{MA} = \overline{MB}$ se obtiene:

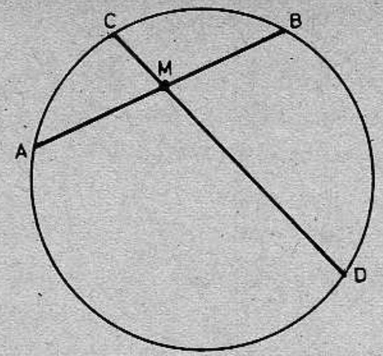


Fig. 8

$\overline{MC} : \overline{MA} = \overline{MA} : \overline{MD}$, o bien:

$$\boxed{\overline{MA}^2 = \overline{MC} \cdot \overline{MD}}$$

315. EJERCICIOS

1) En una circunferencia de 20 cm de diámetro $= \overline{AB}$ se traza la tangente en A de 15 cm $= \overline{AC}$. Calcular: $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$.
2) En una circunferencia de diámetro $\overline{AB}$ se traza en A una tangente de 30 cm $= \overline{AC}$. Si la secante $\overline{CB} = 50$ cm, calcular el radio de la circunferencia, el segmento externo de la secante y las cuerdas $\overline{AD}$ y $\overline{DB}$.
3) Una cuerda de 33 cm es cortada por otra. Si los segmentos de esta segunda cuerda miden 9 cm y 30 cm, ¿cuánto miden los segmentos de la otra cuerda?
4) Un punto P dentro de un círculo corta a una cuerda en dos segmentos de 4 y 25 cm. Si la distancia del punto P al centro O es 5 cm, ¿cuánto mide el radio?
5) Aprovechando el »teorema de las secantes« (N° 311), construir la cuarta proporcional geométrica entre a, b y c de modo que a:b = c:x.
6) Aprovechando el »teorema de las cuerdas« (N° 313), construir la cuarta proporcional geométrica entre los trazos a, b, y c, de modo que a:b = c:x.
7) Demostrar que al cortarse dos cuerdas dentro de un círculo, los cuatro segmentos que se obtienen no pueden ser números enteros consecutivos.

Resp.: 1) $\overline{CD} = 9$; $\overline{DB} = 16$, $\overline{CB} = 25$, $\overline{AD} = 12$;

2) r = 20; seg. ext. = 18, cuerdas: 24 y 32;

3) 15 y 18 cm; 4) $r = 5\sqrt{5}$.

316. CONSTRUCCIONES DE LA MEDIA PROPORCIONAL GEOMETRICA

Problema fundamental. Dados dos trazos »m« y »n«, construir la media proporcional geométrica entre ellos.

Solución: designando por »x« la $\frac{1}{2}$ prop. geo. pedida, se tiene por definición que:

$$m:x = x:n \Rightarrow x^2 = m \cdot n.$$

1ª construcción: se basa en el 2º Teorema de Euclides (Nº 308) siendo:

m = una proyección
n = la otra proyección
x = la altura.

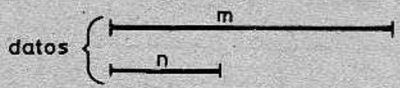
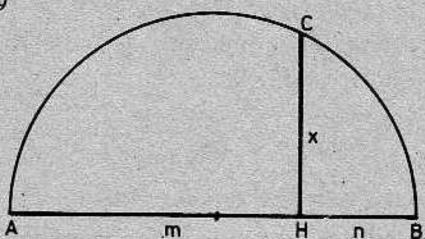


Fig. 9



Con esto el problema se reduce a construir un triángulo rectángulo del cual se conocen las proyecciones de los catetos en la hipotenusa (Fig. 9). Entonces:

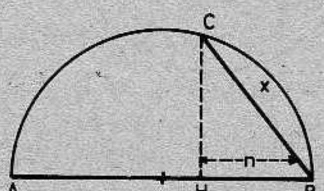
1) se suman m + n = $\overline{AB}$ (hipotenusa);
2) se dibuja la semi ⊙ de Thales;
3) la ⊥ en H determina $\overline{CH}$ = x (altura).

2ª construcción: se basa en el Primer Teorema de Euclides (Nº 309) siendo:

x = un cateto
m = hipotenusa
n = proyección del cateto »x« en la hipotenusa »m«.

Con esto, el problema se reduce a construir un triángulo rectángulo en el cual se conoce la hipotenusa (m) y la proyección (n) del cateto en la hipotenusa. Entonces (Fig. 10):

Fig. 10

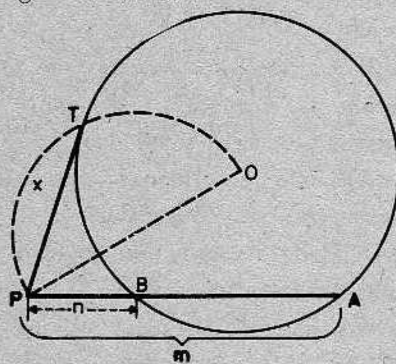


1) se copia m = hipotenusa;
2) se le resta n = $\overline{BH}$ (proyección);
3) se dibuja la semi ⊙ de Thales ($\overline{AB}$);
4) la ⊥ en H determina C.
Resulta: $\overline{BC}$ = x (cateto).

3ª construcción: se basa en el teorema de »la tangente y la secante« (Nº 312) siendo:

x = tangente
m = secante completa
n = segmento externo.

Fig. 11

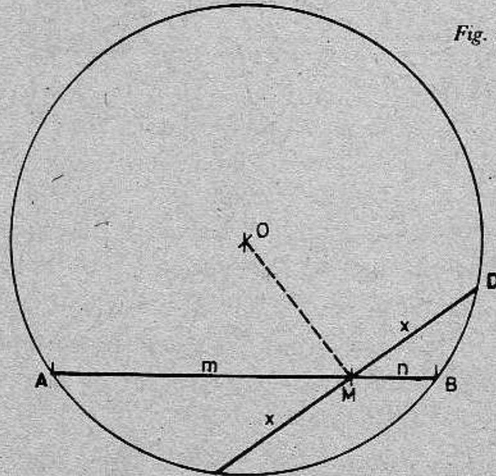


Entonces:

1) se copia m = $\overline{PA}$ y n = $\overline{PB}$ (Fig. 11);
2) se dibuja *cualquier* circunferencia que pase por A y B (para esto se traza la simetral de $\overline{AB}$ y se elige un punto O de ella);
3) se une P con O y se dibuja la semi ⊙ ($\overline{OP}$) que determina T;
4) Resulta $\overline{PT}$ = x (tangente)

4ª construcción: se basa en el corolario (Nº 314) siendo: x = mitad de una de las cuerdas *m* y *n* son los segmentos de la otra cuerda.

Fig. 12



Entonces:

1) se suman $m = \overline{AM}$ y $n = \overline{MB}$ (Fig. 12);

2) se dibuja *cualquier* circunferencia por A y B;

3) se une O con M;

4) en M $\perp$ $\overline{OM}$ determina C y D.

Resulta: $\overline{MC} = \overline{MD} = x$ (mitad de la cuerda $\overline{CD}$).

317. EJERCICIOS

1) Determinar geométricamente dos trazos conocida su suma »s« y su media proporcional »m«. (»s« y »m« son dos trazos conocidos o dados).

2) Determinar geométricamente dos trazos conocida la diferencia »d« entre ellos y la media proporcional »m«.

3) Aprovechando el »teorema de las secantes« (N° 311), transformar un rectángulo dado en otro que tenga un lado de longitud dada »m«.

4) Aprovechando el »teorema de las cuerdas« (N° 313), transformar un rectángulo dado en otro que tenga un lado de magnitud dada »m«.

5) Aprovechando el »teorema de la tangente y secante« (N° 312) transformar un rectángulo dado en un cuadrado.

6) Aprovechando el »teorema de las cuerdas« (N° 313), transformar un rectángulo dado en un cuadrado.

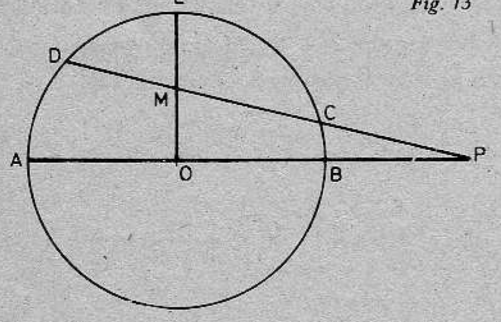


Fig. 13

7) Desde un punto P situado a 12 cm del centro de una circunferencia de 20 cm de radio, se traza una secante que corta a la perpendicular $\overline{OE}$ en su punto medio M. Determinar los segmentos de la cuerda $\overline{CD}$ (Fig. 13).

(Resp.: $\overline{DM} = 6{,}949$; $\overline{CM} = 10{,}795$).

8) En una circunferencia de radio »r« se traza una cuerda de longitud »c«. Siendo »x« la distancia desde el centro del círculo a la cuerda, la longitud de »c« en función de »x« es:

A) $c = r - x$; B) $c = 2(r - x)$;

C) $c = (r + x)(r - x)$;

D) $c = 2\sqrt{(r + x)(r - x)}$;

E) Otro valor distinto a los anteriores.

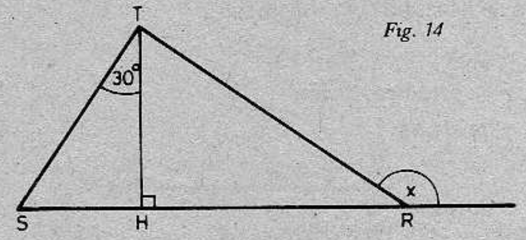


Fig. 14

9) En el triángulo rectángulo SRT se traza la altura $\overline{TH}$. Entonces, la medida del ángulo »x« es (Fig. 14):

A) 120°; B) 150°;

C) 130°; D) 140°;

E) falta más información.

10) Desde un punto situado a 3 cm de un círculo se traza una secante cuyo segmento exterior es igual al radio. El segmento interno de esta secante mide:

A) $r - 4{,}5$; B) r;

C) $3(2r - 9)$; D) $r + 27$;

E) $6 - r + \frac{9}{r}$

11) En un círculo se traza $\overline{SR}$ perpendicular al diámetro $\overline{VM}$ de modo que $\overline{VT} = 8$ cm y $\overline{TO} = 5$ cm. Marque el valor de la medida de la cuerda $\overline{SR}$ (Fig. 15):

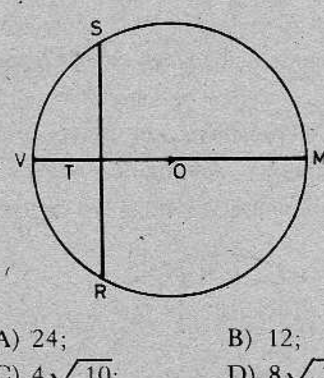


Fig. 15

A) 24; B) 12;

C) $4\sqrt{10}$; D) $8\sqrt{10}$;

E) 26.

12) En una circunferencia de 6 cm de radio se traza un radio y se le divide de modo que PS = 1/3 del radio. Por P se traza una cuerda $\overline{RT}$ en la que $\overline{PR}$ = 5cm.
La medida del otro segmento de ella es (Fig. 16):

A) 10 mm;

B) 0,04 m;

C) 6 cm;

D) 10^{-3} km;

E) 4 dm.

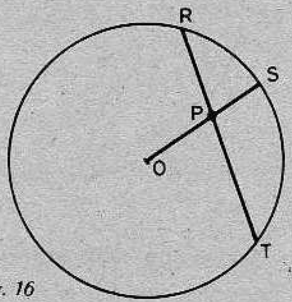
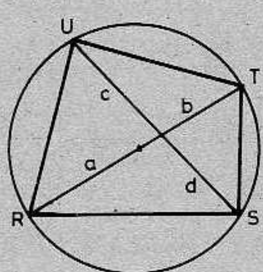


Fig. 16

13) En el cuadrilátero inscrito RSTU (Fig. 17) se verifica una de las siguientes alternativas:

Fig. 17



A) a:b = c:d;

B) (a − c) · a = (b − d) · d;

C) (a + c)d = (b + d) a;

D) (a + c) : (a − c) = b:d;

E) a:d = b:c.

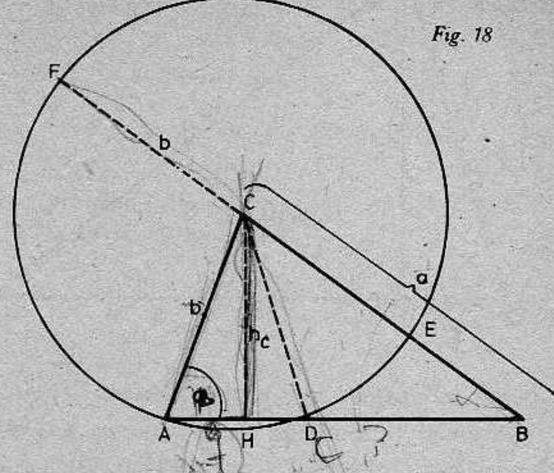
Resp.: 8) **D**; 9) **B**; 10) **E**;
11) **A**; 12) **B**; 13) **C**.

318. TEOREMA GENERAL DE PITAGORAS

»En un *triángulo cualquiera* el cuadrado de un lado es equivalente a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, *más o menos* el doble producto de uno de ellos por la proyección del otro sobre éste, según el lado se oponga a un ángulo obtuso o agudo, respectivamente«.

H.) 1°. Sea $\alpha < 90°$; AH = q = proyección del lado »b« sobre el lado »c«.

T.) $\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2\,c \cdot q}$



D.) Se dibuja la ⊙ (C, b) que determina $\overline{AD} = 2q$ (Fig. 18).
Aplicando el »teorema de la secante« (N° 393) se obtiene sucesivamente:

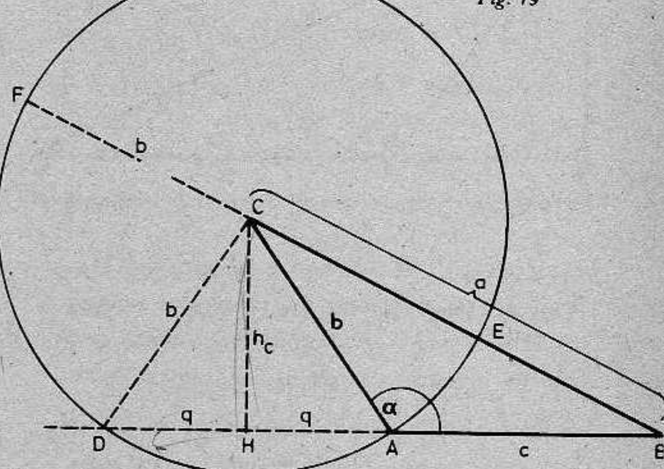
$$\overline{BF} \cdot \overline{BE} = \overline{AB} \cdot \overline{BD}$$

$$(a + b)(a - b) = c \cdot (c - 2q)$$

$$a^2 - b^2 = c^2 - 2\,c \cdot q$$

de donde: $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,c \cdot q$

Fig. 19



2°. Sea $\alpha > 90°$. Aplicando el mismo teorema mencionado, resulta:

$$\overline{BF} \cdot \overline{BE} = \overline{AB} \cdot \overline{BD} \text{ (Fig. 19)}$$

$$(a + b)(a - b) = c \cdot (c + 2q)$$

de donde: $\boxed{a^2 = b^2 + c^2 + 2\,c \cdot q}$

Otra demostración:

1°. $\alpha < 90°$.

El △ ABC queda dividido en dos trián-

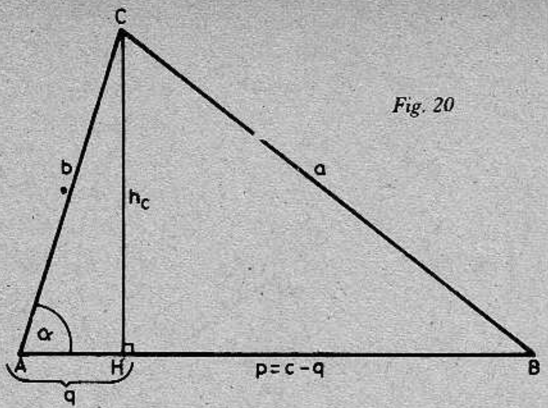


Fig. 20

gulos rectángulos al trazar la altura $\overline{CH} = h_c$. Aplicando el corolario de Pitágoras a cada uno de estos triángulos, se obtiene (Fig. 20):

$$\begin{array}{l} h_c^2 = a^2 - (c-q)^2 \\ h_c^2 = b^2 - q^2 \\ \hline \end{array}$$

$$\therefore\ a^2 - (c-q)^2 = b^2 - q^2$$

Basta desarrollar y reducir para obtener:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,c \cdot q$$

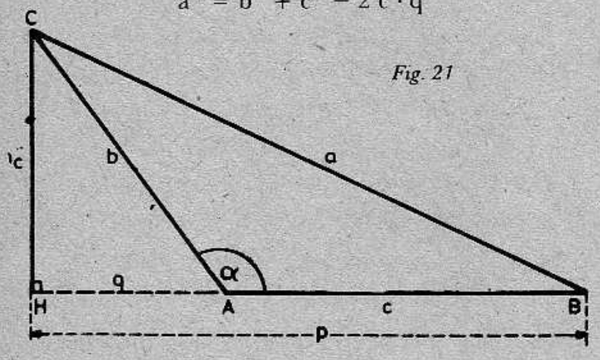


Fig. 21

2°. $\alpha > 90°$. Se traza la altura $\overline{CH} = h_c$ (Fig. 21) obteniéndose los triángulos rectángulos HBC y HAC. Aplicando el corolario de Pitágoras a estos triángulos, se obtiene sucesivamente:

$$\begin{array}{l} h_c^2 = a^2 - (c+q)^2 \\ h_c^2 = b^2 - q^2 \\ \hline \end{array}$$

$$\therefore\ a^2 - (c+q)^2 = b^2 - q^2$$

de donde resulta: $a^2 = b^2 + c^2 + 2c \cdot q$.

¿Qué teorema se obtiene si $\alpha = 90°$?

319. TEOREMA PARTICULAR DE PITAGORAS

Ya hemos demostrado anteriormente en el N° 263 este teorema. Ahora, daremos una demostración probablemente más simple para algunos. Se basa en el teorema de la »tangente y la secante« (N° 312) y para ello se dibuja la circunferencia de centro A y radio »b«, resultando: (Fig. 22):

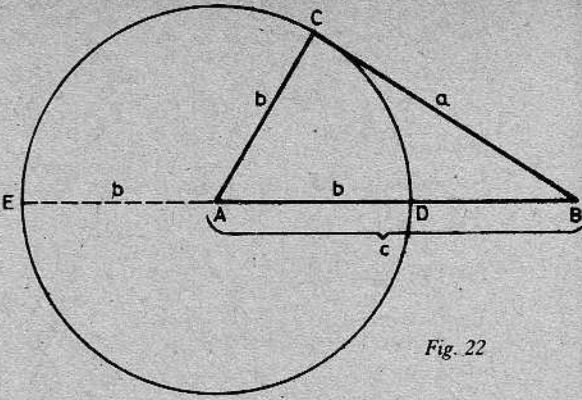


Fig. 22

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} \Rightarrow \frac{c+b}{a} = \frac{a}{c-b}$$

de donde: $c^2 - b^2 = a^2 \Rightarrow \boxed{c^2 = a^2 + b^2}$

320. PRIMER TEOREMA DE EUCLIDES

También lo hemos demostrado anteriormente por más de un camino (N° 262 y 309). Ahora aprovecharemos para su demostración el teorema de »la tangente y la secante« (N° 312) y para ello se dibuja la circunferencia de diámetro $\overline{AC} = b$, obteniéndose (Fig. 23):

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{BH} \Rightarrow \boxed{a^2 = c \cdot p}$$

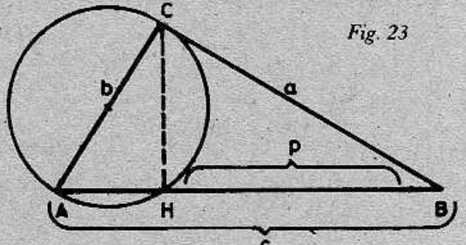
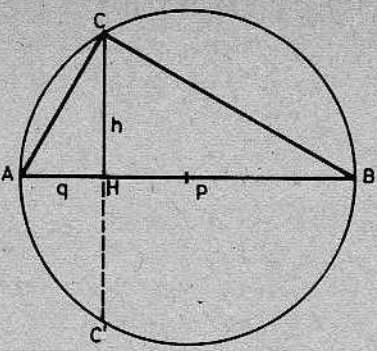


Fig. 23

321. SEGUNDO TEOREMA DE EUCLIDES:

Al igual que los anteriores ya ha sido demostrado más de una vez (N° 265 y 308). Aprovecharemos, ahora, el »teorema de las cuerdas«

Fig. 24



para su demostración. Para ello se dibuja la circunferencia de diámetro

$\overline{AB} = c = q + p$. Como $\overline{HC} = \overline{HC'} = h$ obtenemos (Fig. 24):

$$\overline{CH} \cdot \overline{C'H} = \overline{AH} \cdot \overline{BH}$$

Luego: $\boxed{h^2 = p \cdot q}$

322. EJERCICIOS

1) Demostrar que la suma de los cuadrados de los cuatro lados de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de las diagonales.

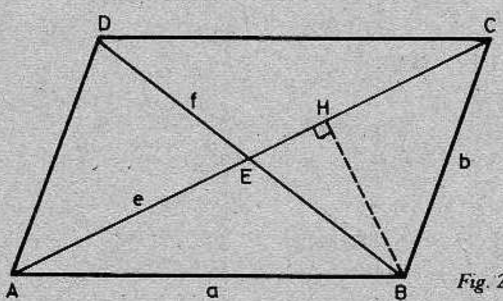


Fig. 25

Indicación: Aplique el Teorema General de Pitágoras (N° 318) al △ ABE y al △ BCE trazando, previamente, la perpendicular $\overline{BH}$ a $\overline{AC}$.

Siendo $\overline{AC} = e$, $\overline{BD} = f$ debe demostrar que (Fig. 25):

T.) $2 \cdot a^2 + 2 \cdot b^2 = e^2 + f^2$

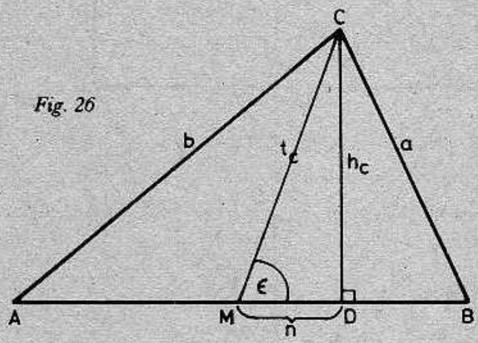
D.) $\left.\begin{array}{l} a^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots \\ b^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} +$

$a^2 + b^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$ (siga usted)...

2) Determinar el L.G. de todos los puntos de un plano de modo que los cuadrados de las distancias a dos puntos dados tengan una diferencia dada (la diferencia debe ser constante).

Solución: Siendo C un punto del L.G. se forma el △ ABC en el cual se traza h_c y t_c. Además, designemos $\overline{MD} = n$, ∡ CMD = $= \epsilon$ y $\overline{AB} = c$ (Fig. 26).

Fig. 26



Entonces, la condición del problema es:

$$\overline{CA}^2 - \overline{CB}^2 = k^2 \Longrightarrow b^2 - a^2 = k^2$$

Aplicando el Teorema General de Pitágoras al △ AMC y al △ MBC, se obtiene, respectivamente:

$$\left.\begin{array}{l} b^2 = t_c^{\,2} + \left(\frac{c}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{c}{2} \cdot n, \text{ pues } ∡\,AMC \text{ es obtuso} \\ a^2 = t_c^{\,2} + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{2} \cdot n, \text{ pues } ∡\,BMC \text{ es agudo} \end{array}\right\} (X)$$

Al restar se obtiene: $b^2 - a^2 = 2\,c \cdot n = k^2$

de donde: $2\,c \cdot n = k^2 \Longrightarrow n = \frac{k^2}{2c}$ = constante.

Esta constante »n« se calcula geométricamente como tercera proporcional geométrica: $2c : k = k : n$ (N° 289).

Este desarrollo indica que el L.G. pedido es una perpendicular al trazo $\overline{AB}$ que determinan los dos puntos dados. Por lo tanto, basta determinar solamente un punto C de este L.G. y trazar la perpendicular desde C a $\overline{AB}$.

Para determinar un punto de este L.G. se procede en el orden siguiente (Fig. 27):

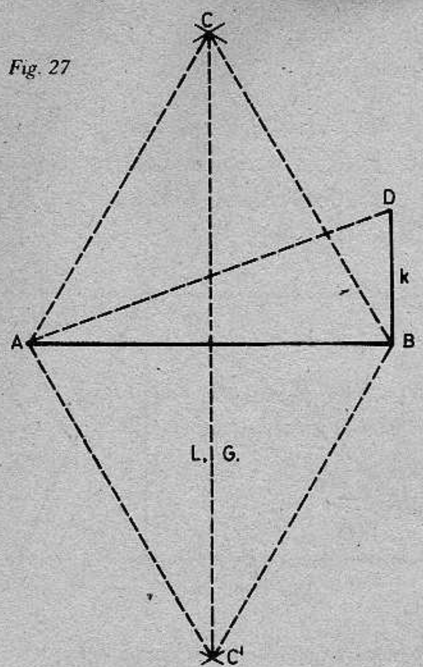
1) ⊥ en B y $\overline{BD} = k$ (dato)

2) se une A con D.

3) arco ⊙ (A, $\overline{AD}$) y arco ⊙ (B, $\overline{BA}$) determinan C y C'.

4) $\overline{CC'}$ es el L.G. pedido.

Fig. 27



D.) Se tiene:

$$\left.\begin{array}{l}\overline{AC} = \overline{AD} \Rightarrow \overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 \\ \overline{BC} = \overline{AB} \Rightarrow \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2\end{array}\right\} -$$

$$\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{AB}^2$$

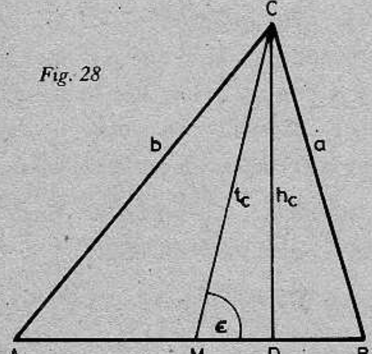
pero en el △ ABD: $k^2 = \overline{AD}^2 - \overline{AB}^2$

luego: $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = k^2$

Por lo tanto: $\overline{CC'}$ es el L.G. pedido.

3) Determinar el L.G. de todos los puntos del plano de modo que los cuadrados de las distancias a dos puntos dados tengan una suma dada (suma constante).

Fig. 28



Solución: Sea C un punto del L.G. (Fig. 28); y $\overline{AB}$ = c (conocido), $\overline{CM} = t_c$, $\overline{CD} = h_c$, ∢CMD = ε.

Condición:

$$\overline{CA}^2 + \overline{CB}^2 = k^2$$

o bien:

$$b^2 + a^2 = k^2$$

Sumando las igualdades (X) del problema anterior, se obtiene:

$$a^2 + b^2 = 2 \cdot t_c^2 + \frac{c^2}{2} = k^2$$

Por lo tanto: $2 \cdot t_c^2 + \frac{c^2}{2} = k^2$.

de donde: $t_c = \sqrt{\frac{k^2}{2} - \left(\frac{c}{2}\right)^2}$ = constante porque »c« y »k« son constantes conocidas.

Siendo t_c = constante, concluimos que todos los puntos del L.G. deben estar a la distancia »t_c« del punto medio M del trazo $\overline{AB}$ que determinan los puntos dados. Por lo tanto, el L.G. pedido es la ⊙ (M, t_c).

4) △: $a^2 - b^2$, c, t_c (Ind.: véase problema 2).

5) △: $a^2 - b^2$, c, t_a. Ind.: Probl. 3: determina $\overline{CD}$;

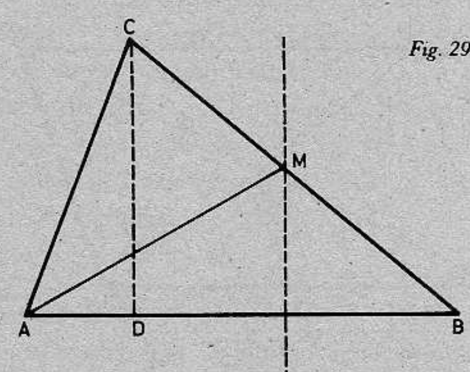


Fig. 29

L.G. para M: 1) simetral de $\overline{DB}$;
2) arco ⊙ (A, t_a).

6) △: $a^2 + b^2$, p, q

7) △: $a^2 + b^2$, c, γ. (Ind.: con $a^2 + b^2$ y c se determina t_c; con c y γ se tiene el arco capaz).

8) △: $a^2 + b^2$, a:b = m:n, c. (Ind.: con $a^2 + b^2$ y c se determina t_c; con a:b = m:n se tiene la circunferencia de Apolonio).

9) △ rectángulo: a, q. (Ind.: $a^2 = p \cdot (p+q)$ de donde se obtiene:

$$p = \frac{1}{2}\sqrt{q^2 + (2a)^2} - \frac{1}{2}q).$$

323. CONSTRUIR LAS RAICES DE LA ECUACION CUADRATICA

1) Siendo »a« y »b« trazos, construir las raíces de la ecuación: $x^2 - 2ax + b^2 = 0$.

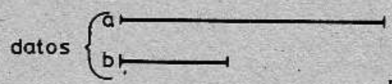
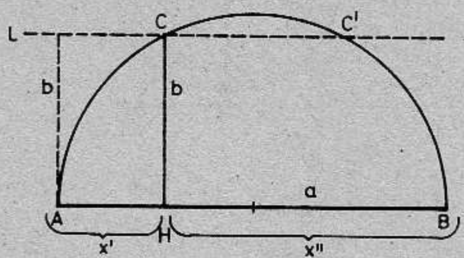


Fig. 30



Solución: De acuerdo con las propiedades que deben tener las raíces de esta ecuación, se obtiene: (Fig. 30)

$$\left.\begin{aligned} x' + x'' &= 2a \\ x' \cdot x'' &= b^2 \end{aligned}\right|$$

Por el 2° Teor. de Euclides se tiene:

1) $\overline{AB} = 2a$; 2) semi ⊙ ($\overline{AB}$); 3) Se traza la paralela a la distancia »b« de $\overline{AB}$ con lo que se determina C y C'; 4) se traza $\overline{CH} \perp \overline{AB}$ la que determina:

$$\overline{AH} = x', \overline{HB} = x''.$$

En efecto: $x' + x'' = 2a$; $x' \cdot x'' = b^2$.

El dibujo muestra que debe ser $a > b$ para que exista x' y x''.

2) Construir las raíces de la ecuación:

$$x^2 - 2ax - b^2 = 0$$

Se debe cumplir que:

$$\left.\begin{aligned} x' - x'' &= 2a \\ x' \cdot x'' &= b^2 \end{aligned}\right|$$

Para construir estas raíces se aplica el teorema de »la tangente y secante« obteniéndose (Fig. 31):

1) Se dibuja una circunferencia de diá-

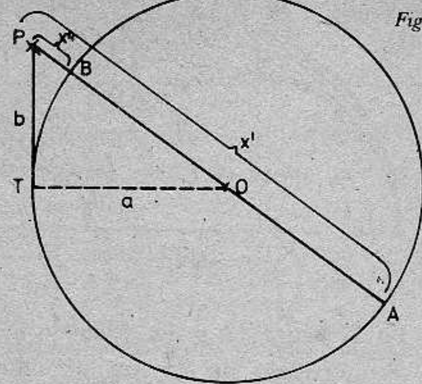


Fig. 31

metro 2a; 2) se traza una tangente $\overline{TP}$ = = b; 3) desde P se traza la secante que pasa por el centro O. De esta manera se obtiene:

$$\overline{PA} = x', \overline{PB} = x''.$$

pues $x' - x'' = \overline{AB} = 2a$; $x' \cdot x'' = \overline{PT}^2 = b^2$

3) Construir las raíces de la ecuación:

$$x^2 + 2ax - b^2 = 0$$

Solución: como el término libre es negativo ($-b^2$), las raíces tienen distinto signo, obteniéndose:

$$\left.\begin{aligned} x' - x'' &= 2a \\ x' \cdot x'' &= b^2 \end{aligned}\right|$$

Análogamente se construyen las raíces como en el problema anterior.

4) Construir las raíces x' y x'' de una ecuación cuadrática si se conoce la semisuma de ellas = s y el medio geométrico de ellas = m.
(Ind.: guíese por el problema 1).

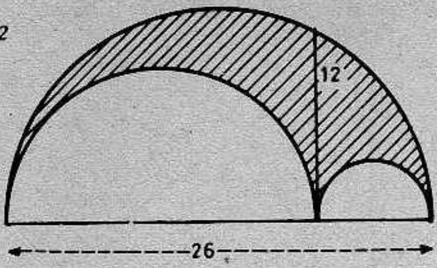
5) Construir las raíces x' y x'' de una ecuación cuadrática si su semidiferencia es »d« y el medio geométrico entre ellas es »m«.

6) Construir las raíces x' y x'' de una ecuación cuadrática si se conoce su medio aritmético »a« y su semidiferencia »b«

7) Construir las raíces de la ecuación $x^2 - 2ax - a^2 = 0$.

8) Construir las raíces de una ecuación cuadrática si tanto su medio aritmético como el medio geométrico de ellas es »a«.

Fig. 32



9) En la figura 32 se ha dibujado una semicircunferencia de 26 cm de diámetro y una perpendicular de 12 cm. Además, se han dibujado otras dos semicircunferencias cuyos diámetros suman el diámetro de la mayor. Calcular el área sombreada.

(*Resp.*: 36π).

10) En la Fig. 33 se han dibujado cuatro semicircunferencias y la perpendicular $\overline{CD}$ en el centro O.
Si $\overline{CD} = 25$ cm y $\overline{CO}:\overline{OD} = 3:2$, calcular el área sombreada.

(*Resp.*: $156{,}25\pi$).

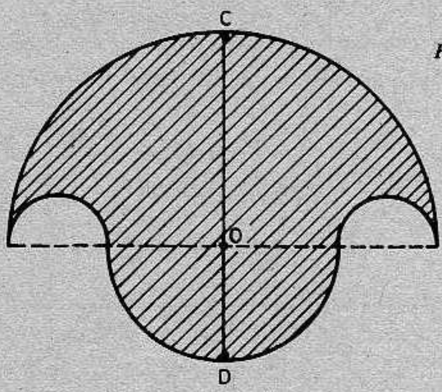


Fig. 33

 Luis Saavedra

Potencia de un punto respecto a una circunferencia. Central. Eje radical.

324. POTENCIA DE UN PUNTO

Recordemos que la *central* de dos circunferencias es el trazo que une sus centros. Un punto puede considerarse como una circunferencia de radio cero y, en consecuencia, la *central* de un punto y una circunferencia es el trazo que une el punto con el centro del círculo.

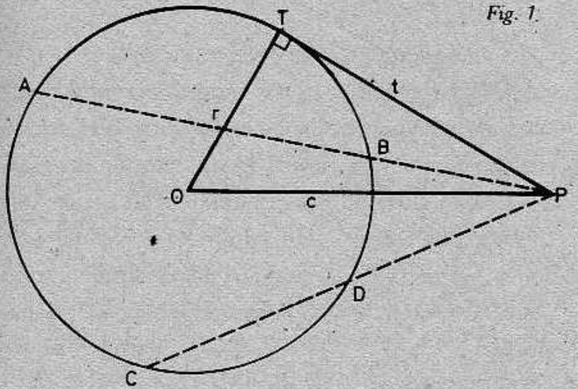


Fig. 1

I) Se define por »potencia de un punto respecto a una circunferencia a la diferencia entre el cuadrado de la central y el cuadrado del radio«. Si esta potencia se designa por P_c se obtiene (Fig. 1):

$$\boxed{P_c = c^2 - r^2}$$

II) Pero de acuerdo con el Teorema de Pitágoras podemos escribir que:

$c^2 = t^2 + r^2$ de donde: $t^2 = c^2 - r^2 = P_c$

De aquí que también se defina como »potencia de un punto respecto a una circunferencia al cuadrado de la tangente trazada desde el punto a la circunferencia«. Es decir (Fig. 1):

$$\boxed{P_c = t^2}$$

III) Finalmente, también sabemos que

$t^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD} =$ const., y por esto se puede definir como »potencia de un punto respecto a una circunferencia al producto que se obtiene al multiplicar una secante trazada desde el punto por su segmento externo«.

O sea: $\boxed{P_c = \overline{PA} \cdot \overline{PB}}$

Desde luego estas tres maneras de expresar la potencia de un punto son equivalentes.

Analicemos algunos casos:

a) Si el punto P pertenece a la circunferencia la central $\overline{OP} = c$ equivale al radio. Por lo tanto, resulta: $P_c = O$.

b) Si el punto no pertenece al círculo, o sea, es punto exterior al círculo, la central $\overline{OP} = c$ es mayor que el radio y, en consecuencia, la potencia es positiva: $P_c > O$.

c) Si el punto es interior (pertenece al círculo), la central $\overline{OP} = c$ es menor que el radio y, por lo tanto, la potencia es negativa: $P_c < O$.

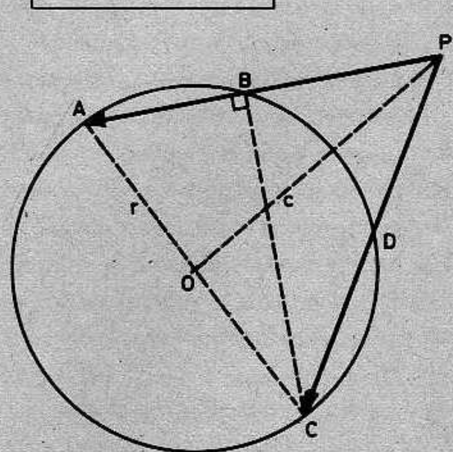
325. OBSERVACION

También la potencia de un punto puede definirse vectorialmente.

Sean A y C los extremos de un diámetro y P el punto de intersección de dos secantes cualesquiera que pasan por A y C. Demostraremos que la potencia de P respecto a la circunferencia es igual al *producto escalar de los vectores* $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC}$ (Fig. 2).

T.) $\boxed{\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} = c^2 - r^2}$

Fig. 2



D.) Aplicando la definición de »producto escalar« a estas dos secantes que son vectores en este caso, se obtiene:

$$\overline{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=\overline{PA}\cdot\overline{PB}\ \text{(pues } \overline{PB} \text{ es la proyección del vector } \overrightarrow{PC} \text{ sobre } \overrightarrow{PA}\text{)}$$

pero: $\overline{PA}\cdot\overline{PB}=c^2-r^2$

Luego: $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=c^2-r^2$

326. EJERCICIOS

1) En una circunferencia de 6 cm de radio se prolonga un diámetro en 4 cm. ¿Cuál es la potencia del punto extremo de esta prolongación respecto a la circunferencia?
2) Se tiene una circunferencia de radio »a«. ¿Cuál es el L.G. de todos los puntos del plano que tienen una potencia de 8 a^2 respecto a esta circunferencia?
3) Se tiene una circunferencia de 25 cm de diámetro. ¿Cuál es la potencia de un punto del círculo situado a 9 cm de la circunferencia?
4) La potencia de un punto situado a 1 cm de la circunferencia de un círculo es 25 cm. ¿Cuánto mide el radio?
5) Desde un punto P situado fuera de un círculo de 18 cm de radio se traza la secante que pasa por el centro. ¿A qué distancia está este punto de la circunferencia si su potencia respecto a ella es 36 cm^2?
6) La semisuma de la distancia de un punto a una circunferencia y el radio es 15 cm, y la semidiferencia de estas distancias es 3 cm. ¿Cuál es la potencia de este punto respecto a la circunferencia? ¿Cuánto mide la tangente desde este punto a ella?
7) La potencia de un punto respecto a una circunferencia es 576 cm^2. ¿Cuánto mide la tangente desde este punto?
8) Desde un punto se traza una secante cuyo segmento externo mide 5 cm. Si la potencia de este punto respecto a la circunferencia es 100 cm^2, ¿cuánto mide la cuerda que determina la secante?
9) Desde un punto fuera de un círculo se traza una secante de modo que el medio aritmético entre su segmento externo y el interno es 13 cm y el medio geométrico entre ellos es 12 cm. ¿Cuál es la potencia de este punto?
10) Calcular la potencia de un punto situado a 4 cm de una circunferencia de 12 cm de radio. Discusión.

Resp.: 1) 64 cm^2; 2) L.G. es ⊙ (O, 3a); 3) −144; 4) r = 12 cm; 5) 2 cm; 6) $P_c = 756$, $t = 6\sqrt{21}$; 7) t = 24; 8) 15 cm; 9) $P_c = 468$; 10) P' = −80; P'' = 112.

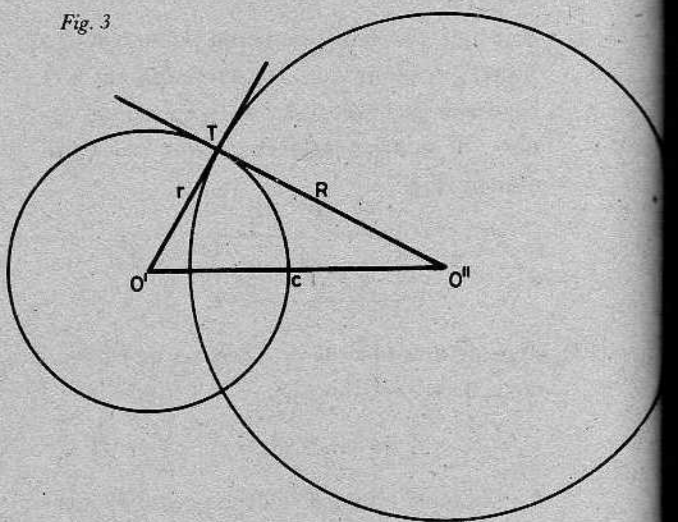
327. OBSERVACION

a) Dos circunferencias se cortan ortogonalmente cuando son perpendiculares las tangentes trazadas en uno de los puntos de intersección de ellas.

b) Al cortarse dos circunferencias ortogonalmente la central mide (Fig. 3): $c=\sqrt{R^2+r^2}$.

c) ¿Qué sucede cuando dos circunferencias que se cortan ortogonalmente tienen el mismo radio?

Fig. 3



OPTATIVO

328. EJE RADICAL DE DOS CIRCUNFERENCIAS

Definición: Se llama *eje radical* de dos circunferencias al conjunto de puntos que tienen la misma potencia respecto a las dos circunferencias. Por lo tanto, el *eje radical* es el L.G. de todos los puntos de un plano que tienen la misma potencia respecto a dos circunferencias y es una recta perpendicular a la central de las dos circunferencias. En efecto: sea P un punto que cumple

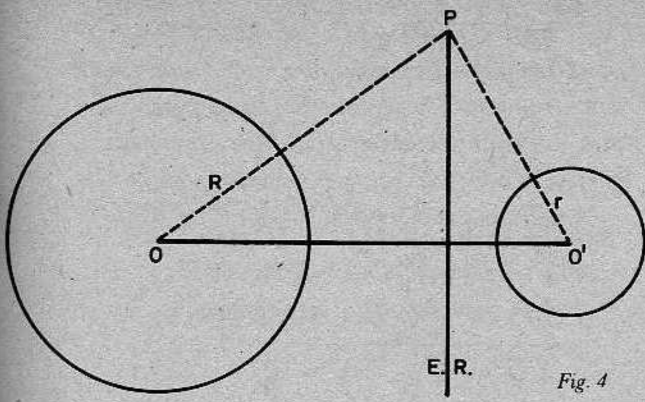


Fig. 4

con la condición de tener la misma potencia respecto a las circunferencias de radios R y r. Luego, por definición, se tiene:

$\overline{PO}^2 - R^2 = \overline{PO'}^2 - r^2$ de donde:

$\overline{PO}^2 - \overline{PO'}^2 = R^2 - r^2$ = constante, pues tanto R como r son constantes. Pero en el N° 322, N° 2, demostramos que los puntos que cumplen con esta condición se encuentran en una perpendicular trazada a la central $\overline{OO'}$.

Veamos algunos casos particulares:

a) Si las circunferencias son secantes, el »eje radical« es la recta que pasa por los puntos de intersección de ellas. Es, por lo tanto, perpendicular a la central.

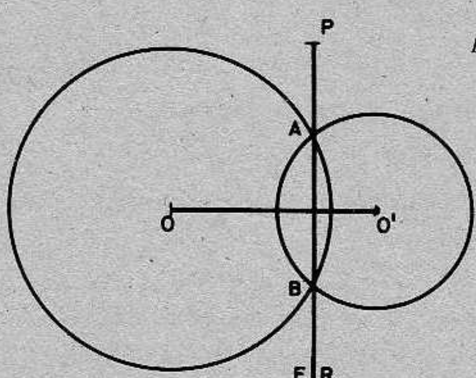
En efecto, para un punto cualquiera P de esta perpendicular se tiene (Fig. 5):

$P_c = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$ (respecto a ⊙ O)

$P'_c = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$ (respecto a ⊙ O')

$\therefore P_c = P'_c$

Fig. 5



b) Si las circunferencias son tangentes, interior o exteriormente, el eje radical es la tangente común en el punto de tangencia (Figs. 6 y 7).

Fig. 6

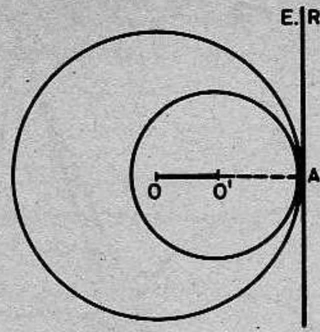
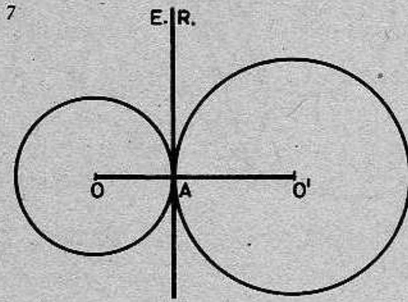
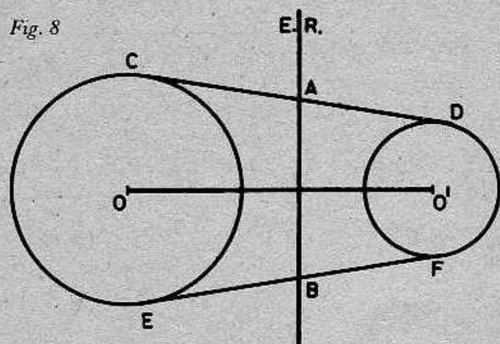


Fig. 7



c) Si las circunferencias son exteriores, el eje radical es la recta que pasa por los puntos medios de las dos tangentes comunes (Fig. 8).

Fig. 8

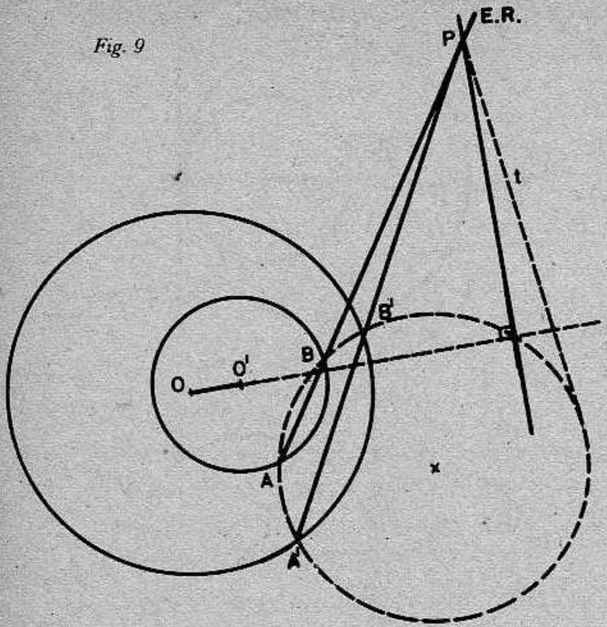


d) Si las circunferencias son interiores, una respecto a la otra, su eje radical es también, como todos los casos anteriores, una recta que es perpendicular a la central $\overline{OO'}$ (Fig. 9).

Para determinar esta perpendicular se dibuja una circunferencia que corte a las circunferencias dadas. Al trazar los ejes radicales $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$ de esta circunferencia auxiliar con cada una de las dadas, se determina el punto de intersección P de ellos.

La perpendicular desde P a la central $\overline{OO'}$ es el eje radical de las dos circunferencias dadas.

Fig. 9



D.) Siendo »t« la tangente desde P a la circunferencia auxiliar, se tiene:

$$\begin{array}{r|} \overline{PA} \cdot \overline{PB} = t^2 \\ \overline{PA'} \cdot \overline{PB'} = t^2 \\ \hline \end{array}$$

$$\therefore \overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PA'} \cdot \overline{PB'} = t^2$$

329. CENTRO RADICAL DE TRES CIRCUNFERENCIAS

Se determina por la intersección de los ejes radicales de estas circunferencias, que son concurrentes, es decir, se cortan en un mismo punto C.

En efecto, por definición se tiene (Fig. 10):

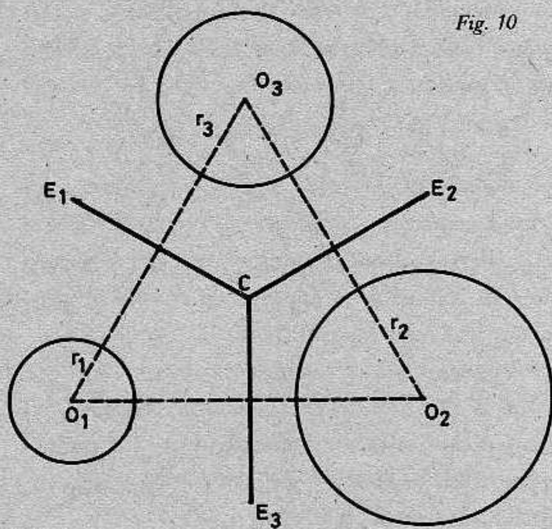
$$\overline{CO_1}^2 - r_1^2 = \overline{CO_2}^2 - r_2^2, \text{ pues } C \in E_3$$

$$\overline{CO_3}^2 - r_3^2 = \overline{CO_2}^2 - r_2^2, \text{ pues } C \in E_2$$

$$\therefore \overline{CO_1}^2 - r_1^2 = \overline{CO_3}^2 - r_3^2$$

Luego: E_1 pasa por C.

Fig. 10



Teoremas sobre polígonos semejantes. Longitud de la circunferencia. El número π. Polígonos homotéticos.

330. TEOREMA XCVI

»Si desde vértices homólogos de polígonos semejantes se trazan diagonales homólogas, el polígono queda dividido en triángulos semejantes«.

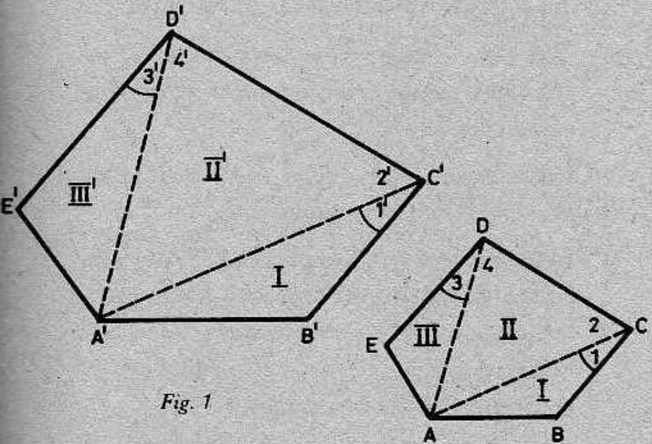


Fig. 1

H.) Polígono ABCDE $\sim$ polígono A'B'C'D'E' (Fig. 1); vértice A homólogo con A'; diagonal $\overline{AC}$ homóloga con $\overline{A'C'}$;

diagonal $\overline{AD}$ homóloga con $\overline{A'D'}$, etc.

T.) $\begin{cases} \triangle I \sim \triangle I' \\ \triangle II \sim \triangle II' \\ \triangle III \sim \triangle III' \end{cases}$

D.) $\triangle I \sim \triangle I'$ por el 2° Teor. de $\sim$ pues

$\begin{cases} \measuredangle ABC = \measuredangle A'B'C' \text{ (por H.)} \\ \overline{AB} : \overline{BC} = \overline{A'B'} : \overline{B'C'} \text{ (por H.)} \end{cases}$

$\triangle III \sim \triangle III'$ por el 2° Teor. de $\sim$ pues

$\begin{cases} \measuredangle AED = \measuredangle A'E'D' \text{ (por H.)} \\ \overline{EA} : \overline{ED} = \overline{E'A'} : \overline{E'D'} \text{ (por H.)} \end{cases}$

De la semejanza de estos triángulos se obtiene:

$\measuredangle 1 = \measuredangle 1', \measuredangle 3 = \measuredangle 3' \Rightarrow \measuredangle 2 = \measuredangle 2'$ y $\measuredangle 4 = \measuredangle 4'$ puesto que, por H., se tiene: $\measuredangle EDC = \measuredangle E'D'C'$ y $\measuredangle BCD = \measuredangle B'C'D'$.

Luego, por el 1er Teor. de semejanza, resulta: $\triangle II \sim \triangle II'$.

331. COROLARIO

»En los polígonos semejantes, las diagonales homólogas o cualquier transversal homóloga son proporcionales a los lados homólogos«.

332. TEOREMA XCVII

(Recíproco del anterior)

»Dos polígonos divididos en triángulos semejantes y dispuestos en el mismo orden, son semejantes«.

H.) $\triangle I \sim \triangle I', \triangle II \sim \triangle II', \triangle III \sim \triangle III'$

T.) Polígono ABCDE $\sim$ polígono A'B'C'D'E'

D.) Se debe demostrar que los lados homólogos son proporcionales y los ángulos homólogos, iguales.

Como $\left.\begin{array}{l} \triangle I \sim \triangle I', \\ \triangle II \sim \triangle II' \end{array}\right\}$ resulta:

$\overline{AB} : \overline{A'B'} = \overline{AC} : \overline{A'C'}$

$\overline{CD} : \overline{C'D'} = \overline{AC} : \overline{A'C'}$

$\therefore \overline{AB} : \overline{A'B'} = \overline{CD} : \overline{C'D'}$

pero: $\overline{AB} : \overline{A'B'} = \overline{BC} : \overline{B'C'}$ (por H.)

luego: $\overline{AB} : \overline{A'B'} = \overline{BC} : \overline{B'C'} = \overline{CD} : \overline{C'D'}$

(. . . siga usted . . .)

333. COROLARIOS

a) »Los polígonos regulares del mismo número de lados, son semejantes«.

b) »En los polígonos semejantes del mismo número de lados, los lados son entre sí como sus radios o sus apotemas«.

c) »Todas las circunferencias son semejantes«.

334. TEOREMA XCVIII

»Los perímetros de dos polígonos semejantes son entre sí como dos lados homólogos o como dos transversales homólogas«.

H.) Polígono ABCDE $\sim$ polígono A'B'C'D'E' (Fig. 1)

T.) $2s:2s' = \overline{AB}:\overline{A'B'} = \ldots = \overline{AC}:\overline{A'C'} = \ldots$

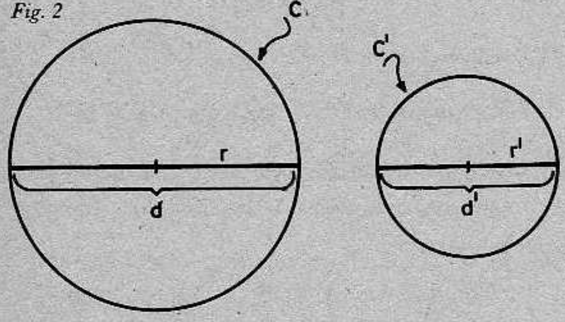
D.) Es análoga a la que hizo en el N° 307-3 (Teor. XC).

335. COROLARIOS

a) »Los perímetros de los polígonos regulares del mismo número de lados son proporcionales a sus radios o a sus apotemas«.

b) »Los perímetros de las circunferencias son proporcionales a sus radios o a sus diámetros«.

Fig. 2



Esta conclusión lleva a algo muy importante. En efecto, de lo anterior se puede escribir:

$$\frac{C}{C'} = \frac{r}{r'} = \frac{d}{d'} \quad \text{(Fig. 2)}$$

De aquí se obtiene también:

$$\frac{C}{d} = \frac{C'}{d'} = \frac{C''}{d''} = \ldots = \text{constante}$$

Es decir: »Entre una circunferencia y su diámetro existe una razón constante«:

$$\frac{C}{d} = \text{const.}$$

Esta constante se designa con la letra griega π (pi) y numéricamente representa »las veces que el diámetro cabe en la circunferencia correspondiente«.

Se ha determinado el valor de esta constante por diversos métodos, como lo veremos más adelante, obteniéndose un número irracional (inconmensurable) y para el cual se toma *aproximadamente* el valor:

$$\boxed{\pi = 3{,}1416 = \frac{22}{7}}$$

Más exacto es 3,1415926536 ... (no existe período).

De lo anterior obtenemos:

$$\frac{C}{d} = \pi \Rightarrow \boxed{C = \pi\, d} \quad \text{o bien:} \quad \boxed{C = 2\pi\, r}$$

pues $d = 2r$.

Con esta fórmula podemos calcular la longitud o perímetro de una circunferencia conocido su radio »r«.

336. EJERCICIOS

1) Una pista circular tiene un radio de 50 m. ¿Cuántos metros corre un atleta al dar una vuelta completa?

2) Una circunferencia tiene una longitud de 62,8 cm. ¿Cuál es su radio?

3) El perímetro de un polígono es 125 cm y una de sus diagonales mide 12 cm. La diagonal homóloga a ésta en otro polígono semejante al anterior mide 15 cm. ¿Cuánto mide el perímetro de este otro polígono?

4) El perímetro de un triángulo mide 48 cm y el de otro triángulo semejante con él mide 64 cm. El radio de la circunferencia circunscrita al primer triángulo mide »n« cm. ¿Cuánto mide el radio de la circunferencia circunscrita al segundo triángulo?

5) Los radios de dos circunferencias son entre sí como 5:8. Si el perímetro de la primera es 3,25 cm, ¿cuál es el perímetro de la otra?

6) En un plano de un estadio, hecho en la escala de $\frac{1}{12500}$, aparece una pista circular. En el plano esta pista tiene una longitud de 4 cm. ¿Cuántos metros corre un atleta que da una vuelta a la pista?

7) El perímetro de un $\triangle$ A con el de otro $\triangle$ B son entre sí como 3:8. A su vez, el perímetro del $\triangle$ B con el de otro $\triangle$ C son entre sí como 4:9. La transversal de gravedad t_c del $\triangle$ A mide 2,4 cm. Si los tres triángulos son semejantes entre sí, ¿cuánto mide la transversal de gravedad homóloga a t_c en el $\triangle$ C?

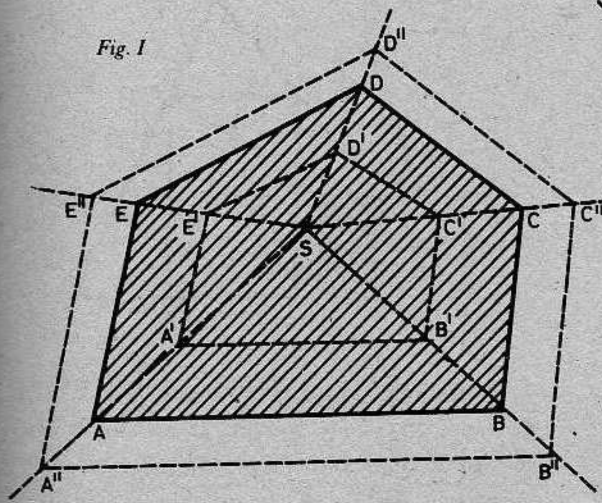
Resp.: 1) 314 m; 2) 10 cm; 3) 156,25 cm; 4) $\frac{4}{3}$ m; 5) 5,2 cm; 6) 500 m; 7) 14,4 cm.

337. *POLIGONOS HOMOTETICOS*

Estos son los polígonos semejantes que tienen sus lados homólogos paralelos.

Primer caso. Tomemos un punto cualquiera S en la región interior del polígono ABCDE. A este punto se le llama *centro de homotecia* o *centro de similitud.* Al unir este punto S con todos los vértices del polígono se obtienen los *rayos de similitud* o *rayos de homotecia* (Fig. I).

Fig. I



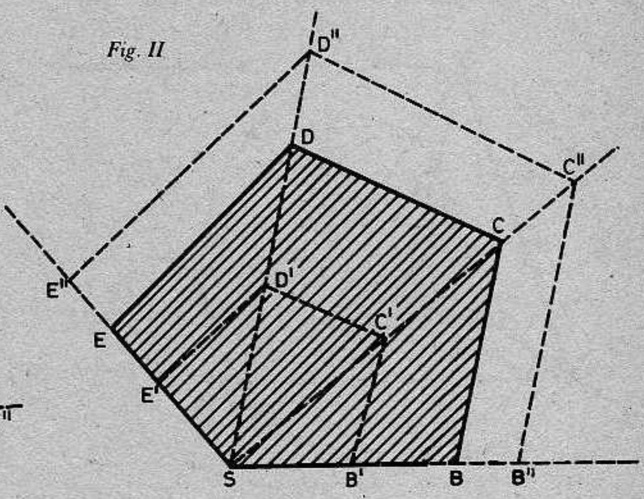
Al tomar un punto A' o A'' en uno de los rayos de similitud y trazar las paralelas a los lados por estos puntos y los que se obtengan sucesivamente en los otros rayos, resultan los polígonos A'B'C'D'E' y A''B''C''D''E'' que son semejantes entre sí y al polígono ABCDE en virtud del Teorema XCVII (N° 322).

Por lo tanto:

$$\frac{\overline{SA}}{\overline{SA'}} = \frac{\overline{SB}}{\overline{SB'}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{SC'}} = \frac{\overline{SD}}{\overline{SD'}} = \frac{\overline{SE}}{\overline{SE'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$$

A esta razón entre las distancias del centro de homotecia a dos vértices homólogos se llama *razón de similitud o de homotecia.*

Fig. II

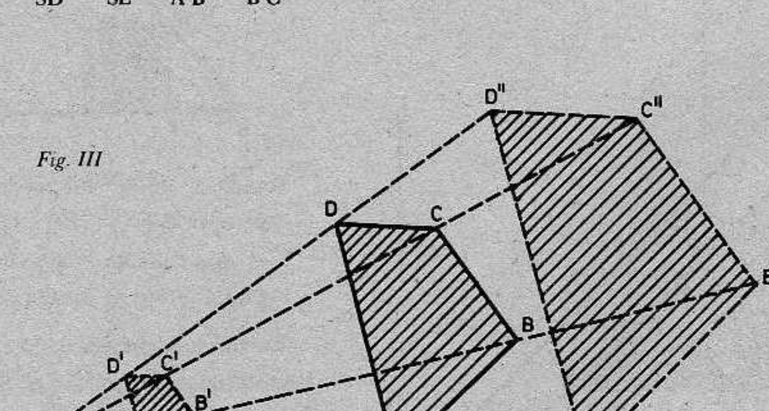


Segundo caso (Fig. II). Se considera el centro S de similitud en un vértice del polígono. Se obtienen los polígonos SB'C'D'E', SB''C''D''E'', . . . , que son semejantes al SBCDE en virtud del Teorema XCVII.

Tercer caso (Fig. III). Se puede considerar el centro de similitud S en la región exterior del polígono ABCD. Se une S con los vértices del polígono ABCD y se trazan las paralelas por un punto A' o A'' a los lados.

Cualesquiera de estos tres casos permite construir fácilmente un polígono semejante a otro dado. También será útil en la construcción de triángulos en los cuales se da la razón entre elementos lineales.

Fig. III



338. *EJERCICIOS*

1) Construir un triángulo semejante a un triángulo dado A'B'C' y de modo que el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo tenga una magnitud dada »m«.

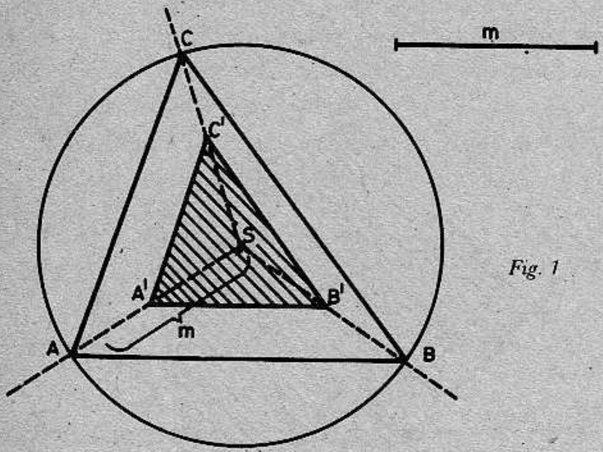


Fig. 1

Solución: 1) se elige como centro de homotecia S al centro de la circunferencia circunscrita (basta trazar y determinar la intersección de dos simetrales del △A'B'C' (Fig. 1); 2) desde S se dibujan los rayos de similitud; 3) se dibuja la ⊙ (S, m); la intersección de esta circunferencia con los rayos de similitud determina los vértices A, B y C del triángulo pedido ABC.

2) Construir un triángulo semejante a un △ A'B'C' dado y de modo que el radio de la circunferencia inscrita tenga una magnitud dada »n«.
Solución: 1) se elige como centro de homotecia S al centro de la circunferencia inscrita (basta trazar dos bisectrices), (Fig. 2);

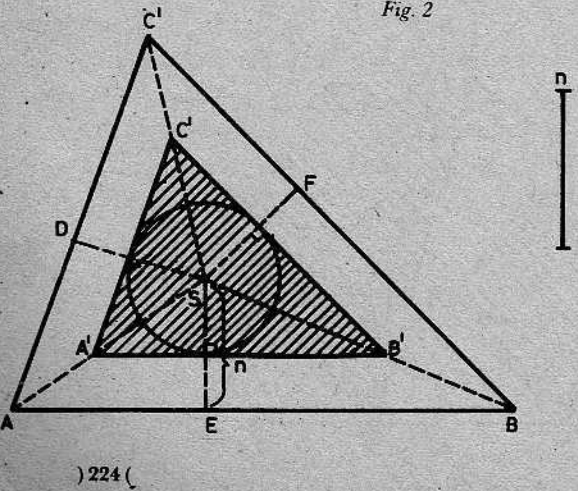


Fig. 2

2) desde S se trazan las perpendiculares a los lados del △ A'B'C' y sobre estas perpendiculares se copia $n = \overline{SD} = \overline{SE} = \overline{SF}$; 3) por los puntos D, E y F se trazan las respectivas paralelas a los lados del △ A'B'C' las que al cortarse determinan el △ ABC.

3) En un △ ABC inscribir un rectángulo cuyos lados estén en la razón de m:n.

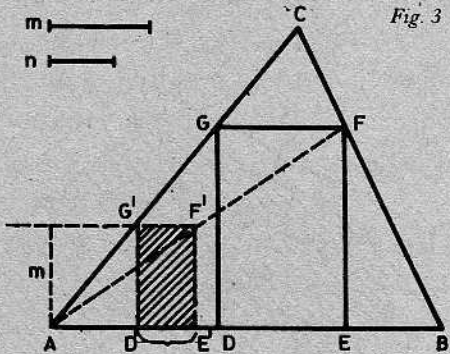


Fig. 3

Solución: 1) se dibuja el rectángulo D'E'F'G' de lados m y n (Fig. 3); 2) siendo A el centro de homotecia se traza el rayo de homotecia $\overline{AF'}$ ⟶ F' lo que determina F; 3) se traza por F las paralelas a los lados m y n determinándose el rectángulo pedido DEFG.

4) En un triángulo ABC inscribir un cuadrado.

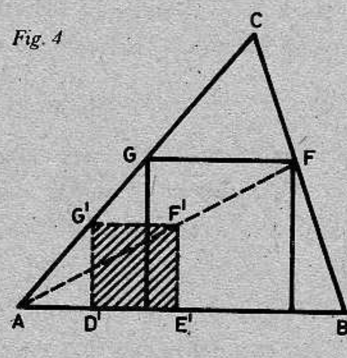


Fig. 4

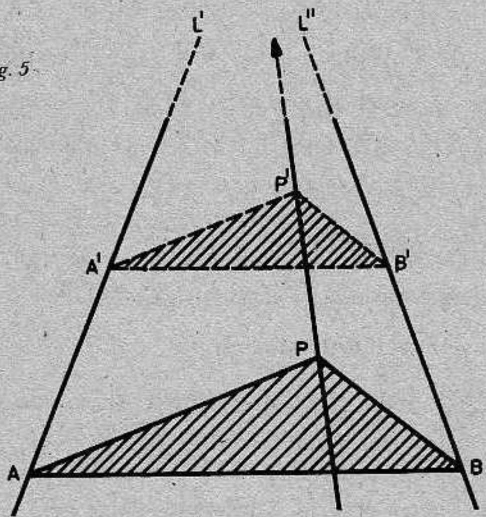
Solución: 1) se dibuja un cuadrado cualquiera D'E'F'G' (Fig. 4); 2) se une A con F' y se prolonga hasta cortar el lado opuesto en un punto F; 3) siga usted . . .

5) En un semicírculo dado inscribir un rectángulo cuyos lados estén en la razón m:n. (*Indicación:* elija como centro de homotecia el centro del semicírculo).

6) En un semicírculo dado inscribir un cuadrado.

7) Entre dos rectas oblicuas L' y L'' que no pueden prolongarse hasta su intersección, se da un punto P. Trazar por P una recta que pase por el punto de intersección inaccesible de estas dos rectas, es decir, que pase por el vértice del ángulo que formarían L' y L'' si se prolongaran (Fig. 5).

Fig. 5



Solución: 1) Se dibuja un triángulo cualquiera ABP siendo P el punto dado; 2) se traza una paralela cualquiera $\overline{A'B'}$ al lado $\overline{AB}$; 3) por A' // $\overline{AP}$ y por B' // $\overline{BP}$ determinan P'; 4) la recta $\overline{PP'}$ → P' pasa por el vértice del ∡ (L', L'').

8) ∡: a:b:c: = m:n:k, r
(*Indicación:* con m, n y k se construye el △ A'B'C' semejante al pedido; después se sigue como en el problema 1.)

9) △ : a:b = m:n, β, ρ.
(*Indicación:* con m, n y β se construye el △ A'B'C' semejante al pedido; después se sigue como en el problema 2.)

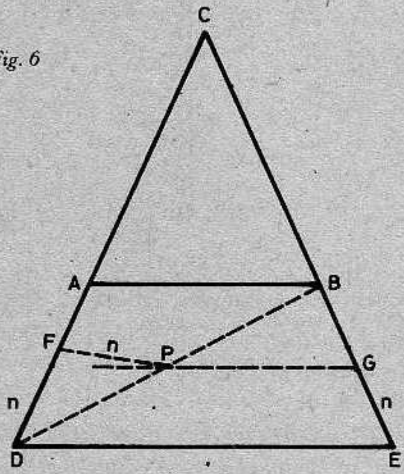
10. △ : a + c, b + c, γ
Solución: 1) △ auxiliar DEC con CD = = c + b, CE = a + c, ∡ DCE = γ (Fig. 6); 2) se toma un trazo cualquiera n = $\overline{DF}$ = $\overline{EG}$; 3) la paralela por G a $\overline{DE}$ y arco de ⊙ (F, n) determina P; 4) D (–) P → P determina B; etcétera.

11) △ : c:t_c = m:n, γ, r.

12) Dentro de un △ ABC inscribir un triángulo isósceles de modo que cada vértice esté sobre un lado.

13) Dentro de un △ ABC inscribir un triángulo equilátero.

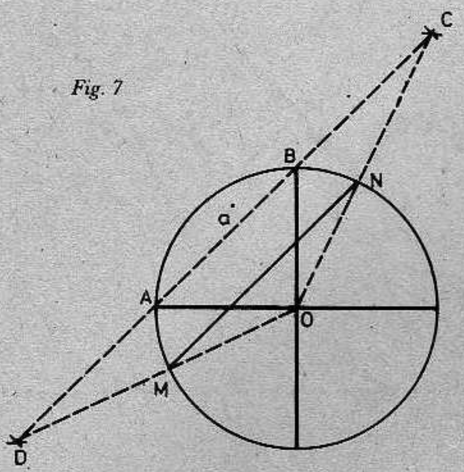
Fig. 6



14) Dentro de un círculo trazar una cuerda que quede trisectada por dos diámetros perpendiculares.

Solución: 1) Se hace $\overline{BC}$ = $\overline{AD}$ = $\overline{AB}$ = a (Fig. 7); 2) al unir O con C y D se determina M y N; 3) la cuerda $\overline{MN}$ queda trisectada.

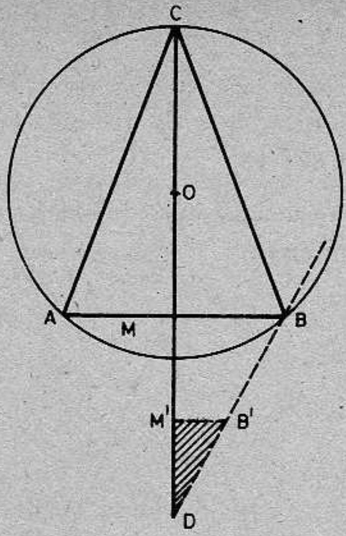
Fig. 7



15) Construir un △ isósceles dados:
r, c + h_c (Fig. 8)

Solución: 1) se dibuja la ⊙ (O, r); 2) se copia c + h_c = $\overline{CD}$; 3) como $\overline{MD}$ = 2·$\overline{MB}$, se

Fig. 8



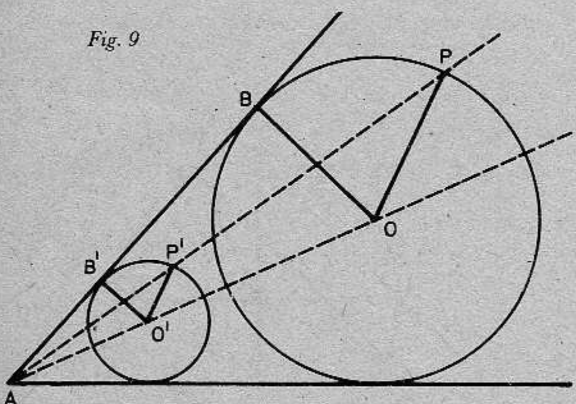
copia una magnitud cualquiera »n« de modo que $\overline{DM'} = 2n$, $\overline{M'B'} = n$; 4) D(–)B' → → B' determina B, etc.

16) Construir un octógono regular de modo que su lado tenga una magnitud dada »a«.

17) En un cuadrante de círculo inscribir un cuadrado de modo que dos vértices estén en los radios del cuadrante y los otros dos en el arco correspondiente.

18) En la región interior de un ángulo se da un punto P. Trazar por P una circunferencia tangente a los lados del ángulo (Fig. 9).

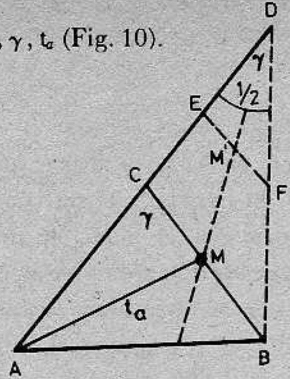
Fig. 9



Solución: 1) se traza la bisectriz del ángulo; 2) se traza cualquier circunferencia O' tangente a los lados del ángulo; 3) al unir A con P se determina P'; 4) por P // $\overline{P'O'}$ determina el centro O de la circunferencia pedida; 5) se dibuja ⊙ (O, $\overline{OB}$).

19) $\triangle$: $a + b, \gamma, t_a$ (Fig. 10).

Fig. 10



Solución: 1) sea $\overline{AD} = a + b \Rightarrow \overline{CD} = \overline{CB} = a$; 2) $\measuredangle$ ADB = $\frac{1}{2}\ \gamma$; $\overline{AM} = t_a$; 3) se dibuja cualquier $\triangle$ isósceles FDE de modo que $\overline{ED} = \overline{EF}$; 4) $\overline{M'E} = \overline{M'F}$; 5) L.G. para M:

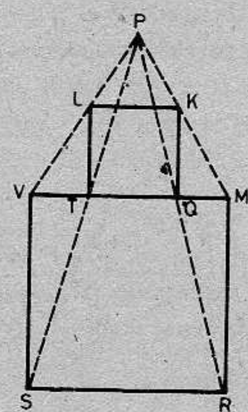
1°) $\overline{DM'} \rightarrow$ M'

2°) arco ⊙ (A, t_a)

6) por M // $\overline{EF}$ determina C; 7) $\overline{CM} \rightarrow$ M y $\overline{DF} \rightarrow$ F determinan B.

20) Se tiene el cuadrado SRVM de lado »a« (Fig. 11); el punto P está situado a la distancia »b« del lado $\overline{VM}$ que se une con los cuatro vértices. La perpendicular en T corta a $\overline{PV}$ en L y la perpendicular en Q corta a $\overline{PM}$ en K.

Fig. 11



Entonces, el cuadrilátero TQKL es:

A) un rombo de lado $\frac{a+b}{2}$;

B) un rectángulo de lados $(a - h)$ y $\frac{a}{3}$;

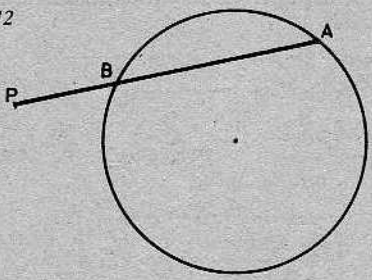
C) un trapezoide de lados $\frac{a}{3}$ y $\frac{2b}{3}$;

D) un cuadrado de lado $\frac{ab}{a+b}$;

E) un rectángulo de lados $\frac{a}{a+b}$ y $\frac{b}{a+b}$

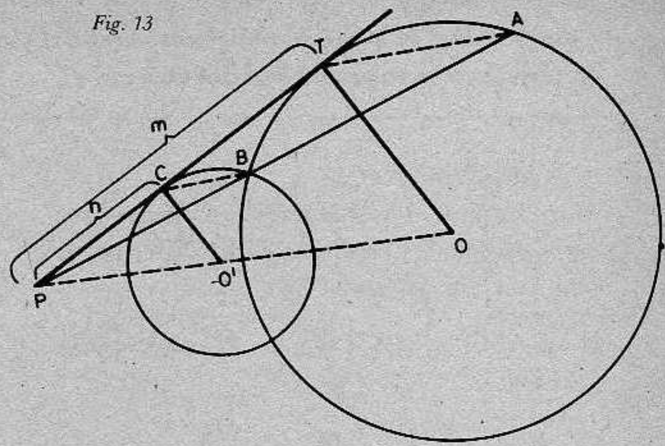
21) Desde un punto P situado fuera de un círculo trazar una secante $\overline{PA}$ de modo que $\overline{PA} : \overline{PB} = m:n$ (Fig. 12).

Fig. 12



Solución: 1) desde P se traza la tangente $\overline{PT}$ la cual se divide en la razón m:n tal que $\overline{PT} : \overline{PC} = m:n$ (Fig. 13); 2) la perpendicular en C corta a la central $\overline{OP}$ en O'; 3) la intersección de la ⊙ (O', $\overline{CO'}$) con la ⊙ (O, $\overline{OT}$) determina B; 4) la unión de P con B y la prolongación más allá de B determina A.

Fig. 13



22) El mismo problema anterior, pero de modo que el segmento exterior de la secante sea al segmento interior de ella como m:n.

32ª UNIDAD

Comparación de áreas de polígonos. Area del círculo. Area de sectores y segmentos circulares. Determinación experimental del número π.

---

339. TEOREMA XCIX

»Las áreas de dos triángulos cualesquiera son entre sí como los productos de sus bases por la altura correspondiente a ella«.

H.) $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ son $\triangle$ cualesquiera (Fig. 1).

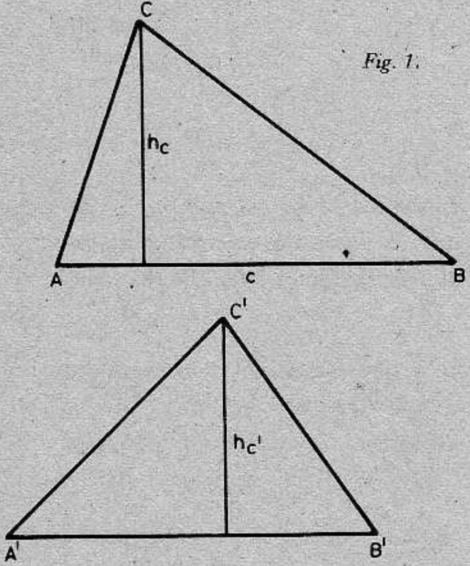


Fig. 1.

T.) $\dfrac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \dfrac{c \cdot h_c}{c' \cdot h_{c'}}$

D.) Al calcular el área de estos triángulos (Nº 253-2), se óbtiene:

$$\left.\begin{array}{l}\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c \\ \triangle A'B'C' = \frac{1}{2} \cdot c' \cdot h_{c'}\end{array}\right\} :$$

$$\therefore \boxed{\dfrac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \dfrac{c \cdot h_c}{c' \cdot h_{c'}}}$$

340. COROLARIOS

a) »Las áreas de los triángulos que tienen la misma altura son entre sí como las bases correspondientes«.

En efecto:

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \frac{c \cdot h_c}{c \cdot h_{c'}}\ ; \quad \text{pero si } h_c = h_{c'}, \text{ resulta:}$$

$$\boxed{\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \frac{c}{c'}}$$

b) »Las áreas de los triángulos que tienen la misma base son proporcionales a las alturas correspondientes a ellas«.

En efecto: $\dfrac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \dfrac{c \cdot h_c}{c \cdot h_{c'}}$;

pero al ser $c = c'$ resulta: $\boxed{\dfrac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \dfrac{h_c}{h_{c'}}}$

c) »Las áreas de los triángulos que tienen la misma base y la misma altura son iguales, es decir, los triángulos son equivalentes«.

Si $c = c'$, $h_c = h_{c'}$, se obtiene: $\dfrac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = 1$

por lo tanto: $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$

341. TEOREMA C

»Las áreas de dos triángulos que tienen un ángulo igual son entre sí como los productos de los lados que forman el ángulo«.

H.) $\alpha = \alpha'$

T.) $\triangle ABC : \triangle A'B'C' = (b \cdot c) : (b' \cdot c')$

D.) Al trazar las alturas se obtiene (Fig. 2):

$\triangle ADC \sim \triangle A'D'C'$ (1° Teor. de $\sim$), de donde:

$$1)\quad \frac{b}{b'} = \frac{h_c}{h_{c'}}$$

Pero, por el Teorema XCIX (Nº 339), se tiene:

2) $\dfrac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \dfrac{c}{c'} \cdot \dfrac{h_c}{h_{c'}}$

Por lo tanto, al sustituir 1) en 2), resulta:

$$\boxed{\dfrac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \dfrac{b \cdot c}{b' \cdot c'}}$$

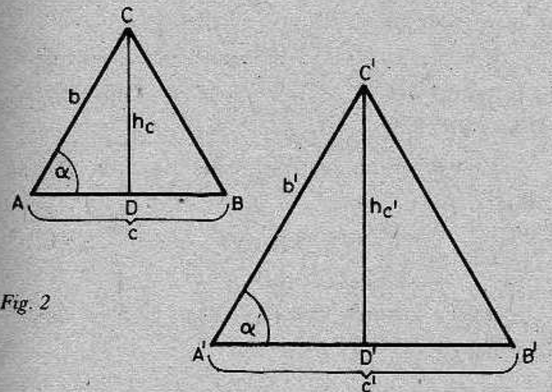


Fig. 2

Otra demostración: por Trigonometría se sabe que »el área de un triángulo es igual al semiproducto de dos lados por el seno del ángulo que forman«; entonces (Fig. 2):

$$\left.\begin{aligned} \triangle ABC &= \tfrac{1}{2}\, bc \cdot \operatorname{sen} \alpha \\ \triangle A'B'C' &= \tfrac{1}{2}\, b'c' \cdot \operatorname{sen} \alpha' \end{aligned}\right\} :$$

$\dfrac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \dfrac{b \cdot c}{b' \cdot c'}$ pues sen α = sen α' al ser $\alpha = \alpha'$.

342. TEOREMA CI

»Las áreas de los triángulos semejantes son entre sí como los cuadrados de dos lados homólogos«.

H.) $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

T.) $\dfrac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \dfrac{c^2}{c'^2}$

D.) Por el Teorema C, se tiene (Fig. 3):

1) $\dfrac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \dfrac{b \cdot c}{b' \cdot c'}$, pero $\dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$ porque los triángulos son semejantes.

Sustituyendo esta igualdad en 1) resulta:

$$\boxed{\dfrac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \dfrac{c^2}{c'^2}}$$

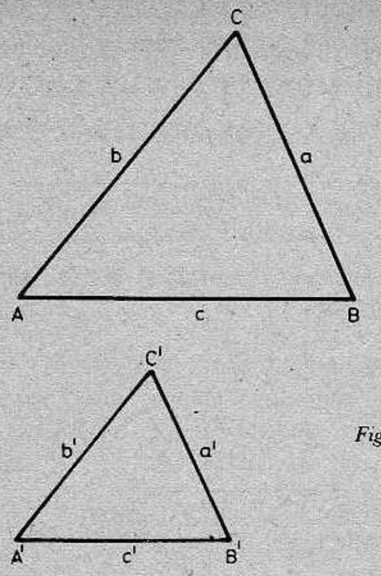


Fig. 3

343. COROLARIOS

a) Como los lados de triángulos semejantes son proporcionales a las transversales homólogas (N° 306-c), se obtiene: »Las áreas de triángulos semejantes son entre sí como los cuadrados de cualquier transversal homóloga«. Es decir:

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \frac{a^2}{a'^2} = \frac{h_c^2}{h_{c'}^2} = \frac{b_\alpha^2}{b_{\alpha'}^2} = \frac{t_b^2}{t_{b'}^2} = \frac{r^2}{r'^2} = \ldots$$

b) »Las áreas de dos polígonos semejantes son proporcionales a los cuadrados de dos lados homólogos o a los cuadrados de dos diagonales homólogas o a los cuadrados de dos transversales homólogas cualesquiera«.

c) »Las áreas de dos polígonos regulares del mismo número de lados son proporcionales a los cuadrados de sus lados o a los cuadrados de los radios de las circunferencias inscritas o circunscritas a los polígonos«.

d) »Las áreas de dos círculos son proporcionales a los cuadrados de sus radios o a los cuadrados de sus diámetros«.

Es decir: $\boxed{\dfrac{\text{área} \odot (O)}{\text{área} \odot (O')} = \dfrac{r^2}{r'^2} = \dfrac{d^2}{d'^2}}$

344. TEOREMA CII

»Considerando los lados de un triángulo *rectángulo como lados homólogos* de polígonos semejantes construidos sobre ellos, demostrar que el área del polígono construido sobre la

hipotenusa es equivalente a la suma de las áreas de los polígonos construidos sobre los catetos«.

H.) Políg. X $\sim$ políg. Y $\sim$ políg. Z

T.) $\boxed{\text{políg. X} + \text{políg. Y} = \text{políg. Z}}$

D.) Aplicando el Corolario b (N° 343), se tiene (Fig. 4):

$$\left.\begin{aligned}\frac{(X)}{(Z)} &= \frac{a^2}{c^2}\\ \frac{(Y)}{(Z)} &= \frac{b^2}{c^2}\end{aligned}\right\} +$$

$$\frac{(X) + (Y)}{(Z)} = \frac{a^2 + b^2}{c^2}$$

Pero, según el Teorema de Pitágoras: $a^2 + b^2 = c^2$, luego:

$$(X) + (Y) = (Z)$$

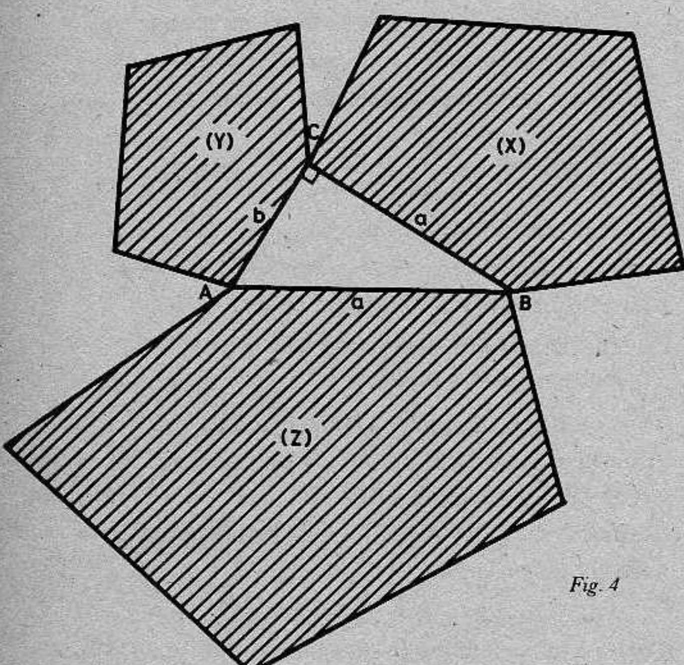


Fig. 4

345. AREA DEL CIRCULO

En el N° 267 demostramos que »el área de un polígono regular es igual al producto del semiperímetro por la apotema«. Es decir:

I) $\boxed{A = s \cdot \rho}$

Al aumentar indefinidamente el número de lados del polígono regular éste se confundirá con la circunferencia y, el apotema, con el radio de ella. Por lo tanto, el área del círculo es:

II) $\boxed{A = \frac{1}{2}\ C \cdot r}$

Este resultado se puede interpretar diciendo que »el área de un círculo es equivalente al área de un triángulo que tiene por base a la circunferencia y por altura el radio de ella«.

Pero en el N° 335-b, vimos que el perímetro o longitud de la circunferencia de radio »r« es: $C = 2\pi r$.

Entonces, al sustituir este valor en II), se obtiene:

$$\boxed{A = \pi r^2}$$

que es la fórmula para calcular el área de un círculo.

346. EJERCICIOS

1) Calcular el perímetro y el área de un círculo de 25 cm de radio.
2) La longitud de una circunferencia es 125,6 cm. ¿Cuál es el área del círculo correspondiente?
3) El área de un círculo es 314 cm^2. ¿Cuál es la longitud de la circunferencia?
4) Demostrar que el área A del círculo en función de la longitud C de la circunferencia es:

$$A = \frac{C^2}{4\pi}$$

5) Demostrar que $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$
6) Demostrar que $C = 2\sqrt{\pi \cdot A}$
7) En el # ABCD se tiene $\overline{AM} = \overline{MB}$ y $\overline{ND} = \overline{NC}$. Calcular la razón entre las áreas I: II: III (Fig. 5).

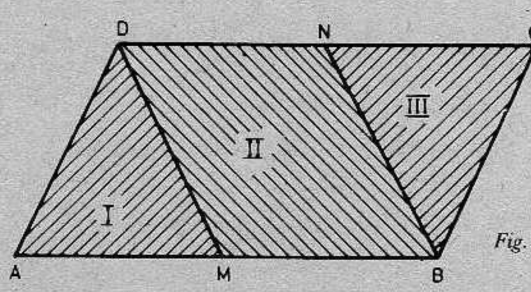
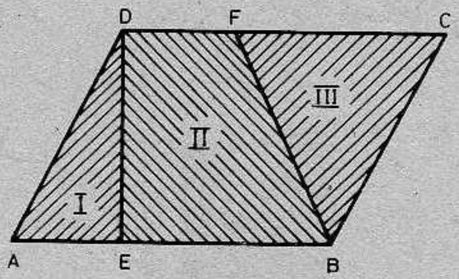


Fig. 5

8) En el # ABCD se tiene $\overline{AE}:\overline{EB} = \overline{DF}:\overline{FC} = 1 : 2$. Determinar la razón entre las áreas (Fig. 6):

$\triangle$ AED: trapecio EBFD: $\triangle$ BCF : # ABCD

Fig. 6



Resp.: 1) C = 157 cm; A = 1962,5 cm^2; 2) 1256 cm^2; 3) C = 62,8 cm; 7) 1:2:1; 8) 1:3:2:6.

347. *AREAS DE SECTORES Y SEGMENTOS CIRCULARES*

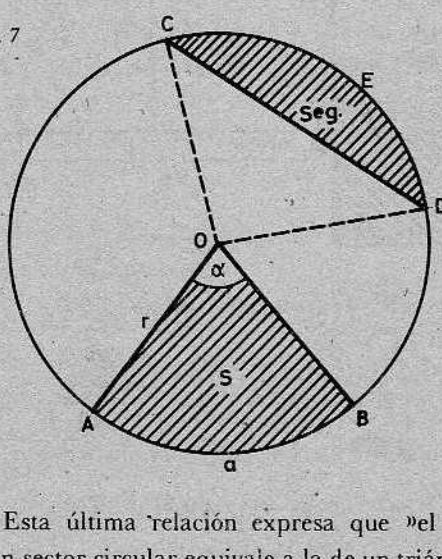
Sea S el sector circular que comprende el arco »a« y el ángulo del centro α.

Para calcular el área del sector S lo compararemos con el área del círculo, obteniéndose (Fig. 7):

I) $\frac{\pi r^2}{S} = \frac{360°}{\alpha°} \Rightarrow \boxed{S = \pi r^2 \cdot \frac{360°}{\alpha°}}$

II) $\frac{\pi r^2}{S} = \frac{2\pi r}{a} \Rightarrow \boxed{S = \frac{1}{2}\, a \cdot r}$

Fig. 7



Esta última relación expresa que »el área de un sector circular equivale a la de un triángulo que tiene por base una longitud igual al arco y por altura el radio del círculo«.

Ahora, para calcular el área del segmento (Seg.) basta restar al área del sector correspondiente (ODECO) el área del $\triangle$ CDO si $\alpha < 180°$. Por lo tanto:

área Seg. CDE = sector (ODECO) $-$ $\triangle$ CDO.

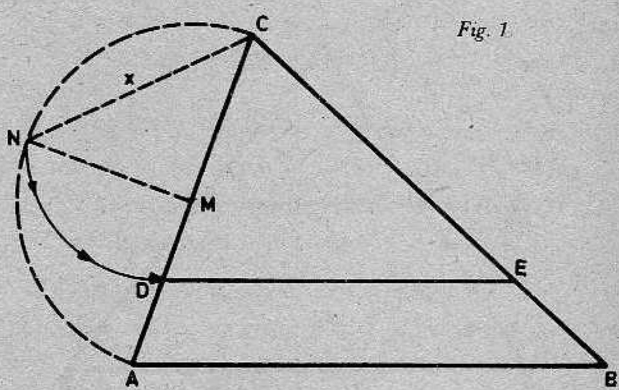
¿Cómo se procedería si $\alpha > 180°$?

348. *EJERCICIOS*

1) Dividir un triángulo en dos partes equivalentes por medio de una paralela a un lado.

Solución: Sea $\overline{CD} = x$; $\overline{CA} = b$ (Fig. 1).

Fig. 1



Condición: $\triangle$ DEC = trapecio ABED o bien: $\triangle$ DEC $= \frac{1}{2}$ $\triangle$ ABC, por lo tanto:

$$\frac{\triangle DEC}{\triangle ABC} = \frac{1}{2}$$

Pero, por Teor. CI (N° 342) se tiene:

$$\frac{\triangle DEC}{\triangle ABC} = \frac{\overline{CD}^2}{\overline{CA}^2} = \frac{x^2}{b^2}$$

de aquí: $\frac{x^2}{b^2} = \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}\, b \cdot b$. Esto indica que »x« es media proporcional geométrica entre »b« y » $\frac{1}{2}$ b«.

Por lo tanto, basta construir esta media proporcional geométrica que, en este caso, conviene construirla aplicando el Primer Teorema de Euclides (N° 316). Para esto: 1) se dimidia $\overline{AC}$; 2) se dibuja la semi ⊙ ($\overline{AC}$); 3) la perpendicular en M determina N; 4) resulta $\overline{CN} = x$; 5) al dibujar el arco de ⊙ (C, $\overline{CN}$) se determina D; 6) finalmente se traza por D//$\overline{AB}$.

2) Dividir un triángulo en dos partes por medio de una paralela a la base y de modo que

las partes resultantes sean entre sí como 1:3.

Solución: Sea $\overline{CD} = x$, $\overline{AC} = b$ (Fig. 2).

Condición: $\dfrac{\triangle DEC}{\text{trap. } ABED} = \dfrac{1}{3}$

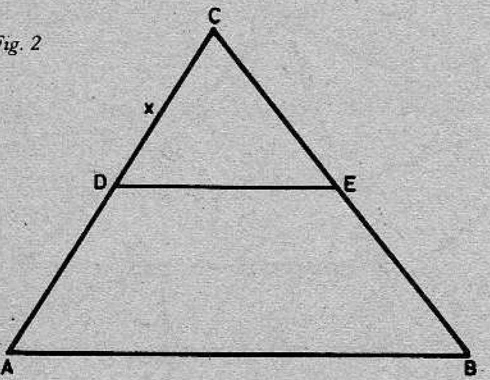
o bien: $\dfrac{\triangle DEC}{\triangle ABC} = \dfrac{1}{4}$

Pero en virtud del Teor. CI (N° 342), se tiene:

$$\frac{\triangle DEC}{\triangle ABC} = \frac{x^2}{b^2}$$

Luego: $\dfrac{x^2}{b^2} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow x^2 = \dfrac{1}{4} b^2 \Rightarrow x = \dfrac{b}{2}$

Fig. 2



Este resultado indica que basta trazar la mediana del $\triangle ABC$ para que se cumpla la condición del problema (Ver N° 170).

3) Dividir un triángulo en tres partes equivalentes por medio de paralelas a la base.

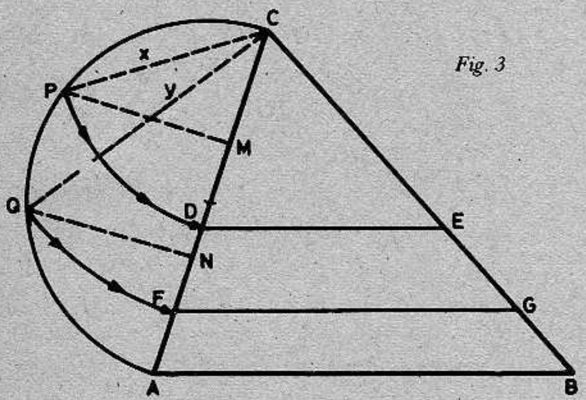


Fig. 3

Solución: Sea $\overline{CD} = x$, $\overline{CF} = y$ (Fig. 3): 1) se divide $\overline{AC}$ en tres partes iguales: $\overline{CM} = \overline{MN} = \overline{NA}$; 2) se dibuja la semi ⊙ ($\overline{AC}$); 3) las perpendiculares en M y N determinan los puntos P y Q, respectivamente; 4) el arco ⊙ (C, $\overline{CP}$) determina D y el arco ⊙ (C, $\overline{CQ}$) determina F.

D.) ¡Hágala usted!

4) Dividir un triángulo en dos partes por medio de una paralela a la base y de modo que el triángulo que se determina sea las 3/5 partes del triángulo dado.

5) Construir un cuadrado que sea el doble de otro dado.

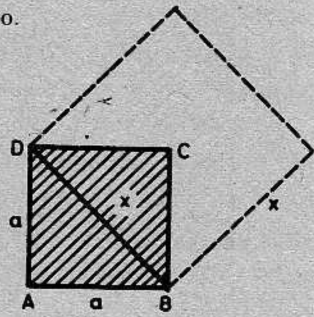


Fig. 4

1ª solución: sea a = lado del cuadrado dado. Luego, su diagonal mide $\overline{BD} = a\sqrt{2}$ (Fig. 4). Por lo tanto, basta construir el cuadrado que tiene por lado la diagonal del cuadrado dado.

2ª solución: sea x = lado del cuadrado pedido. La condición del problema es:

$x^2 = 2a^2 = 2a \cdot a$

Por lo tanto, para determinar »x« basta construir la media proporcional geométrica entre »2a« y »a«.

De acuerdo al 2° Teor. de Euclides se tiene (Fig. 5):

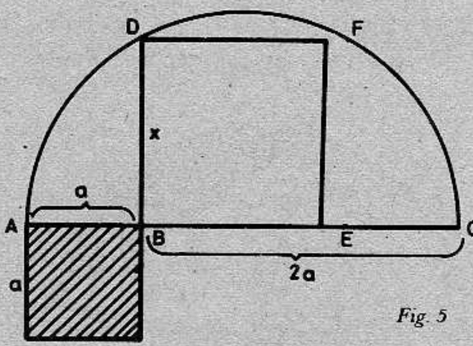


Fig. 5

1) $\overline{AB} = a$ (lado del cuadrado dado)

2) $\overline{BC} = 2a$

3) se dibuja la semi ⊙ ($\overline{AC}$) y se traza la perpendicular en B, lo que determina D; 4) resulta $\overline{BD} = x$, lado del cuadrado pedido.

3ª solución: se basa en el 1er Teor. de Euclides:

1) $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = a$ (Fig. 6);

2) semi ⊙ ($\overline{AB}$);

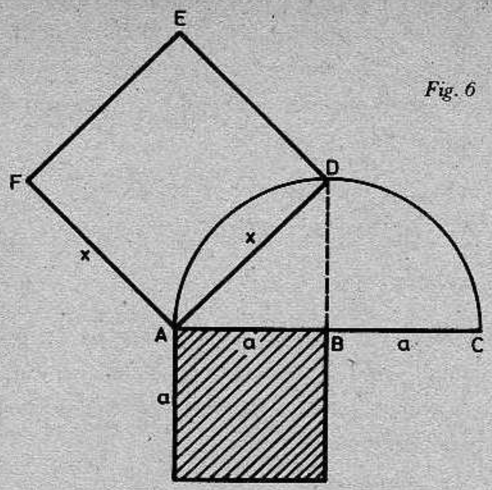


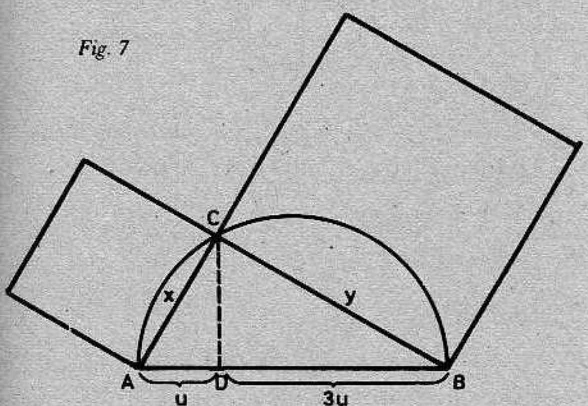
Fig. 6

3) perpendicular en B determina D;

4) $\overline{AD} = x$

6) Construir dos cuadrados de modo que uno de ellos sea el triple del otro.

Fig. 7



Solución: se basa en el corolario »b« del Nº 310. Para esto (Fig. 7): 1) se copia un trazo unitario $u = \overline{AD}$; 2) se hace $\overline{DB} = 3u$; 3) la semi ⊙ ($\overline{AB}$) y la perpendicular en D determinan C; 4) resulta: $\overline{AC} = x$, $\overline{BC} = y$, pues $x^2 : y^2 = u : 3u = 1 : 3$.

7) Construir dos cuadrados de modo que uno sea los 2/3 del otro.

8) Dados dos rectángulos semejantes construir otro rectángulo semejante con ellos y cuya área sea la suma de las áreas de los rectángulos dados.
(Ind.: Teor. CII, Nº 344).

9) Construir un cuadrado equivalente a la suma de dos rectángulos dados.
(Ind.: 1°) construir el rectángulo semejante y equivalente a la suma de las áreas de los dos rectángulos dados (Nº 344); 2°) transformar el rectángulo obtenido en el cuadrado que se pide (según Nº 344).)

10) Dados dos triángulos semejantes construir otro triángulo semejante a ellos y equivalente a la suma de ellos.
(Ind.: Nº 344).

11) Dados dos trapezoides semejantes construir otro trapezoide semejante con ellos y equivalente a la diferencia de ellos.
(Ind.: Nº 344).

12) Dados dos trapezoides semejantes construir un triángulo equivalente a la suma de sus áreas.
(Ind.: 1°) Encontrar el trapezoide equivalente a la suma de ellos según Nº 344; 2°) transformar el trapezoide obtenido en el triángulo que se pide según Nº 278-13).

13) Dados dos triángulos congruentes construir otro triángulo equivalente a la suma de ellos.
(Ind.: Nº 344).

14) Dados dos rectángulos congruentes construir otro rectángulo equivalente a la suma de ellos.

15) Dados dos triángulos congruentes construir un cuadrado equivalente a la suma de ellos.
(Ind.: 1°) encontrar el triángulo equivalente a la suma de ellos según Nº 344; 2°) transformar el triángulo encontrado en el cuadrado pedido según Nº 278, Nº 10 y 17 .

16) Dado un cuadrado de lado »a« construir otro cuadrado que sea equivalente al triple de él.

17) Dividir un semicírculo dado en dos semicírculos. ¿Cuántas soluciones existen?
(Ind.: Nº 344).

18) Dividir un semicírculo dados en dos semicírculos de modo que el área de uno de ellos sea los 2/3 del otro. ¿Cuántas soluciones hay?
(Ind.: Nº 344 y Nº 310-b).

19) Calcular, en función del radio, la longitud de la diagonal de un pentágono regular inscrito en una circunferencia.

20) Calcular, en función del radio, la longitud del lado de una estrella regular de cinco puntas inscrita en una circunferencia.

21) En un círculo se dibuja la »media luna« X. Su área en función del radio, mide (Fig. 8):

A) $\frac{1}{4}\pi r^2$

B) $\frac{2}{3}\pi r^2$

C) $(2-\sqrt{2})\cdot r^2$

D) r^2

E) $0{,}5\pi r^2$

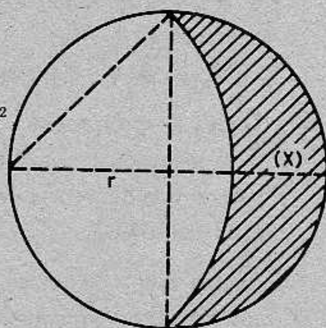


Fig. 8

22) En un círculo se dibuja una especie de lente plano-convexa Y. Su área, en función del radio, mide (Fig. 9):

A) $\frac{1}{4}\pi r^2$ B) $\frac{2}{3}\pi r^2$

C) $(\frac{\pi}{2}-1)\cdot r^2$

D) r^2

E) $0{,}5\pi r^2$

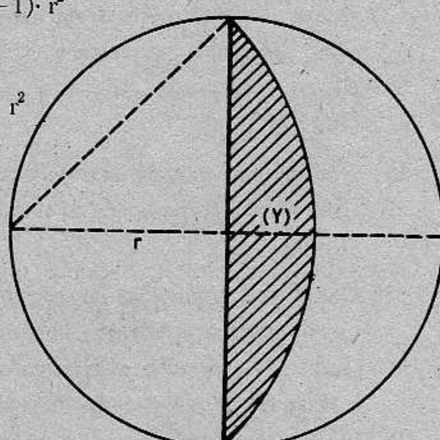


Fig. 9

23) En un círculo se dibuja el arco $\overline{MN}$ de radio $\overline{PM}$. El área »achurada« S, en función del radio »r«, mide (Fig. 10):

A) $\frac{1}{4}\pi r^2$ B) $\frac{2}{3}\pi r^2$

C) $(\frac{\pi}{2}-1)\cdot r^2$

D) r^2

E) $0{,}5\pi r^2$

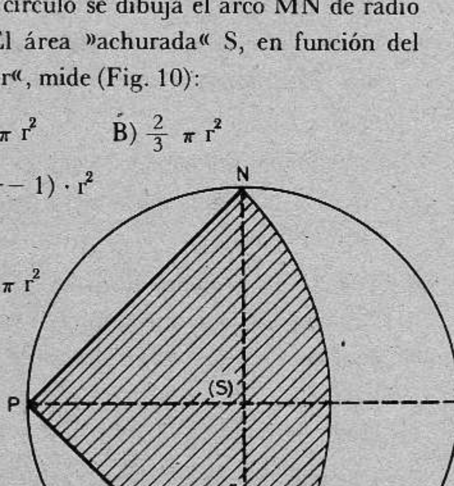


Fig. 10

24) En un círculo se dibuja la »media luna« X (especie de lente cóncava-convexa positiva). El perímetro de ella mide, en función del radio »r« (Fig. 8):

A) $0{,}5\pi r(2+\sqrt{2})$ B) $\pi r\sqrt{2}$

C) $1{,}5\pi r\sqrt{2}$ D) $2\pi r(\sqrt{2}+1)$

E) otro valor

25) Calcular el perímetro y el area de un polígono regular circunscrito a una circunferencia en función del número »n« de lados y del radio »r«.

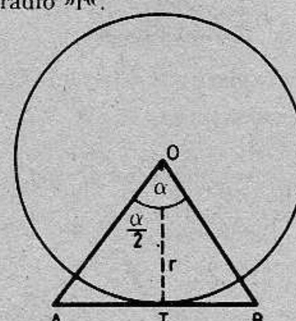


Fig. 11

Solución: Sea ABO el triángulo fundamental del polígono (Fig. 11).

El perímetro será: $p = n\cdot AB$

pero $\overline{AT} = r\cdot \text{tg}\,\frac{\alpha}{2}$

de donde: $p = 2n\cdot r\cdot \text{tg}\,\frac{\alpha}{2}$; pero

$\alpha = \frac{2\pi}{n}$ radianes, por lo tanto:

$$\boxed{p = 2rn\cdot \text{tg}\,\frac{\pi}{n}}$$

Por otro lado, el área del polígono es: $A = n\cdot\triangle ABO = n\cdot OT\cdot AT$

luego: $\boxed{A = nr^2\cdot \text{tg}\,\frac{\pi}{n}}$

26) Calcular el área y el perímetro del polígono regular inscrito en una circunferencia en función del número »n« de lados y del radio »r«.

27) Siendo »a« el lado del polígono regular inscrito en una circunferencia de radio »r«, calcular el área del polígono en función del lado y del radio.

28) En un mismo círculo se inscribe un pentadecágono y un decágono regulares. Calcular la razón entre sus áreas.

29) En un triángulo rectángulo los catetos son entre sí como 15:36. Calcular su área si la hipotenusa mide 65 cm.

Resp.: 19) $\frac{r}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$;

20) $l_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$;

21) D; 22) C; 23) E; 24) A;

26) $p = 2rn \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{n}$; $A = \frac{1}{2}\,nr^2 \cdot \text{sen}\,\frac{2\pi}{n}$;

27) $A = \frac{1}{4} \cdot na^2 \cdot \cot\frac{\pi}{n}$;

28) $A_{15} : A_{10} = 1{,}038$; 29) 750 cm^2.

349. TESTS

1) En la figura 1, el diámetro de la circunferencia mayor mide 12 cm y se le divide en partes que son entre sí como 1 : 2 : 3. La parte »achurada« mide:

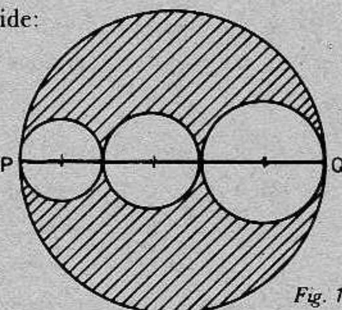


Fig. 1

A) 36π cm^2

B) 30π cm^2

C) 33π cm^2

D) 22π cm^2

E) ninguno de estos valores es correcto.

2) En la figura 1 el diámetro de la circunferencia mayor está dividido en la razón de 1 : 2 : 3. Marque la alternativa correcta:

A) al sumar el perímetro de las tres circunferencias menores se obtiene el de la mayor y la suma de las áreas es 1/3 del círculo mayor

B) los perímetros de las cuatro ⊙ son entre sí como 1 : 2 : 3 : 6 y sus áreas también

C) las áreas de las cuatro ⊙ son como 1:4:9:36 y el perímetro de la mayor es igual a la suma de las tres menores

D) la suma de las áreas de las tres ⊙ menores es de $33\frac{1}{3}$ % del mayor y la suma de los perímetros de las tres menores es $66\frac{2}{3}$ % del de la ⊙ mayor

E) todo lo anterior es falso.

3) En la figura 2 el diámetro PQ se divide en cuatro partes iguales y se dibujan las ⊙ que tiene por diámetro 1/4, 1/2 y las 3/4 partes del diámetro. La parte »achurada« comprendida entre la segunda y la tercera ⊙ mide:

A) lo mismo que la parte entre el primer y segundo círculo

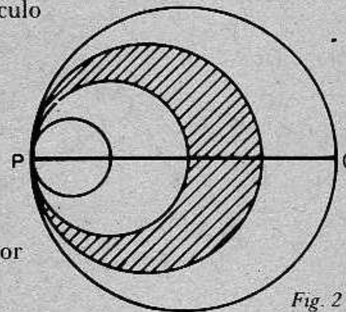


Fig. 2

B) $0{,}75\,\pi\, r^2$

C) $\frac{5\pi}{16}\, r^2$

D) $\frac{9\pi}{16}\, r^2$

E) ningún valor anterior.

4) En la figura 2 se obtiene la siguiente alternativa correcta:

A) la suma de los perímetros de las tres ⊙ menores equivale al de la mayor.

B) los perímetros de las ⊙ son entre sí como 1 : 2 : 3 : 4

C) si al perímetro de la mayor se le resta la suma de los perímetros de las dos menores, se obtiene la longitud de la tercera.

D) la suma de los perímetros de las tres menores valen 6π r.

E) todo lo anterior es falso.

5) En la figura 3 el trazo $\overline{PQ} = a$ se divide en cuatro partes iguales y se dibujan las ⊙ de diámetro 0,25a; 0,5a; 0,75a y a, respectivamente, siendo todas tangentes en P. Designando por M, N, S y T las partes no comunes se obtiene la siguiente alternativa correcta:

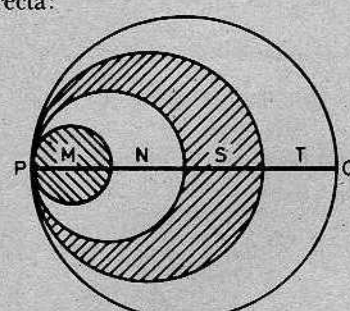


Fig. 3

A) M + N = T

B) T − N = S

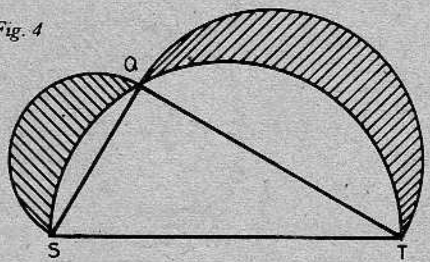
C) M : N : S : T = 1 : 2 : 3 : 4

D) M : N : S : T = 1 : 3 : 5 : 7

E) todo lo anterior es falso.

6) En la figura 4 un cateto mide 6 cm y la hipotenusa 10 cm. Se dibujan las semicircunferencias sobre los catetos y la hipotenusa en el sentido indicado en la figura. La parte »achurada« comprendida entre las tres semicircunferencia mide:

Fig. 4



A) $12{,}5\pi$ cm^2 B) $\frac{17\pi}{2}$ cm^2

C) 24 cm^2 D) 48 cm^2

E) ningún valor anterior.

7) En la figura 5 un trazo $\overline{PQ}$ se divide en tres partes desiguales a, b y c, dibujándose la semicircunferencia sobre cada uno de estos trazos y sobre el trazo $\overline{PQ}$ en el sentido indicado. La parte »achurada« tiene un área de:

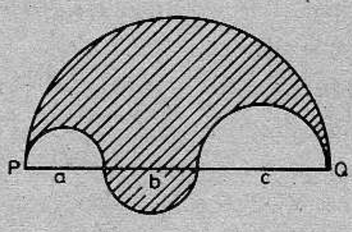


Fig. 5

A) $0{,}125\pi\,(a^2 + b^2 + c^2)$

B) $\pi\,(a^2 + c^2 - b^2)$

C) $0{,}25\pi\,(b^2 - a^2 - c^2)$

D) $0{,}25\pi\,(a + b)\,(b + c)$

E) ningún valor anterior.

8) El perímetro de la parte »achurada« de la figura 5 vale:

A) $0{,}5\pi\,(a + b + c)$

B) $\pi\,(a + b + c)$

C) $2\pi\,(a - b + c)$

D) $\pi\,(a + b - c)$

E) falso todo lo anterior.

9) En la figura 6 se ha dibujado un triángulo equilátero de 6 cm de lado. Se unen los puntos de tangencia V y M de la circunferencia inscrita. El área »achurada« mide aproximadamente:

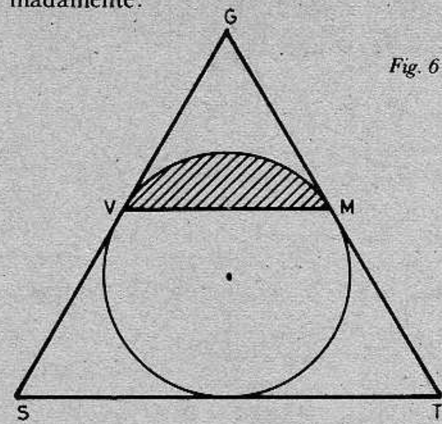


Fig. 6

A) 1,8 cm^2 B) 7,37 cm^2

C) 5,19 cm^2 D) $0{,}75\sqrt{3}$ cm^2

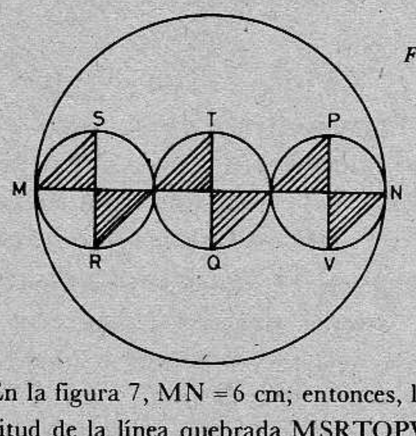
E) ningún valor anterior.

10) Si el diámetro MN = 6 cm, entonces la suma de las partes »achuradas« de la figura 7 es, en cm^2:

A) 3 B) 1,5 C) 6

D) 9 E) otro valor.

Fig. 7



11) En la figura 7, MN = 6 cm; entonces, la longitud de la línea quebrada MSRTQPVN es en cm:

A) 8 B) $6 + 6\sqrt{2}$

C) $12\sqrt{2}$ D) 12

E) otro valor.

12) Si en la figura 7, MN = 6 cm, entonces la suma del perímetro de las tres circunferencias chicas es:

A) 3π B) 12π

C) 9π D) igual a la circunferencia mayor

E) otro valor

14) El área »achurada« en la figura 8 mide: (siendo »a« el radio de la circunferencia).

A) $\frac{2}{9}\ a^2$

B) $2a^2$

C) $1{,}5\ a^2$

D) $\frac{a^2}{3}\sqrt{3}$

E) $\frac{\pi a^2}{3}$

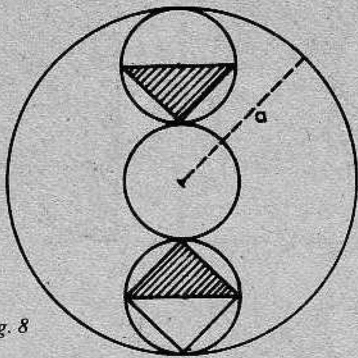


Fig. 8

15) En la figura 9 se ha dibujado una circunferencia y un ángulo del centro AOB; entre los lados de este ángulo se dibujan los arcos de radios 1/3 y 2/3 de OA con lo cual el sector AOB queda dividido en tres partes S_1, S_2 y S_3. La relación correcta entre estas partes es:

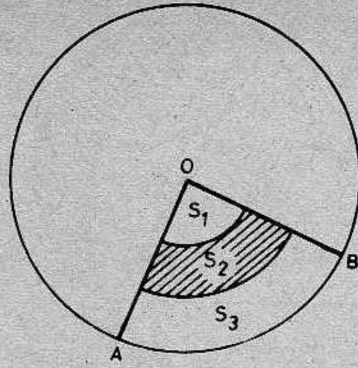


Fig. 9

A) $S_2 = 0{,}5\,(S_1 + S_3)$

B) $S_2 = 1/3\,(S_1 + S_3)$

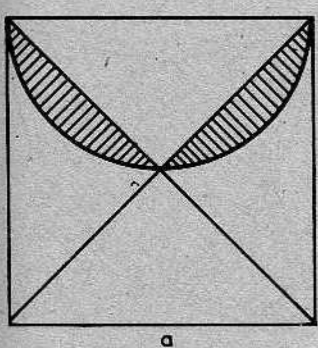
C) $S_1 : S_2 : S_3 = 1 : 3 : 9$

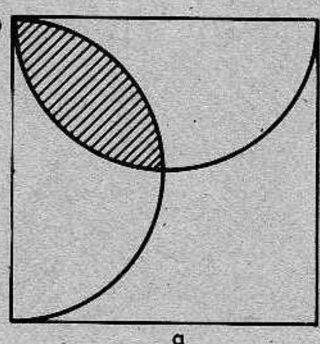
D) $S_3 : (S_1 + S_2) = 1 : 3$

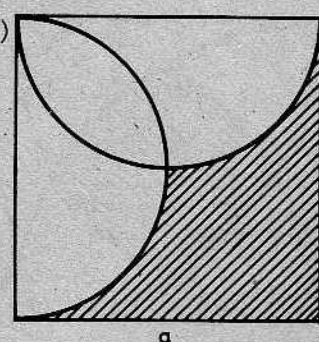
E) ninguna de estas relaciones es correcta.

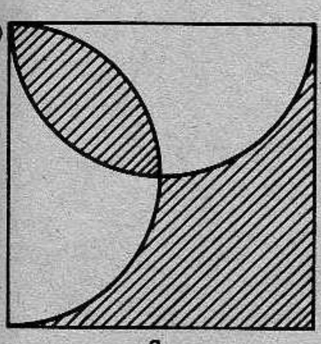
Resp.: 1) D; 2) C; 3) C; 4) B; 5) D; 6) C; 7) D; 8) B; 9) A; 10) A; 11) B; 12) D; 13) D; 14) A; 15) A.

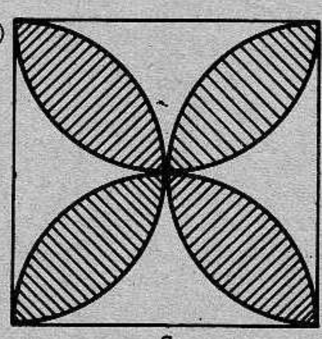
350. EJERCICIOS DE TAREA (Variaciones sobre un mismo tema)

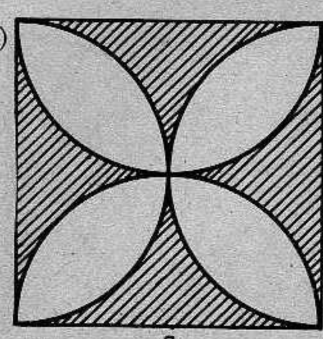
1)


2)


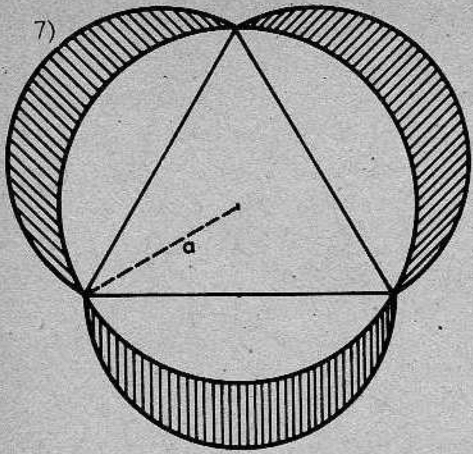
3)


4)


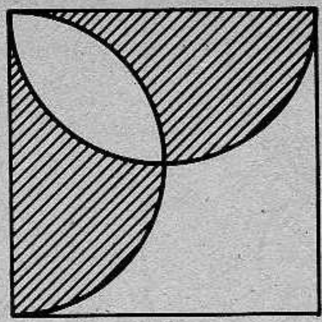
5)


6)


7)

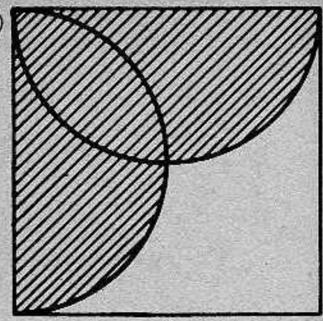


8)



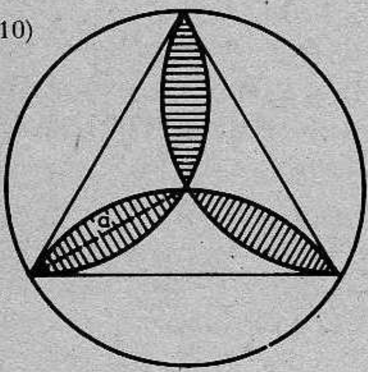
a

9)

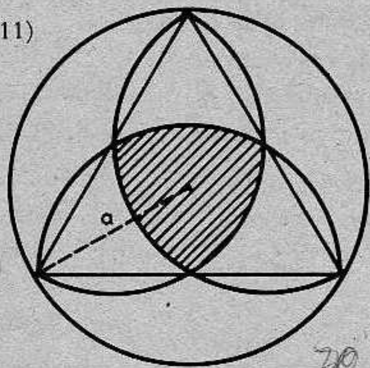


a

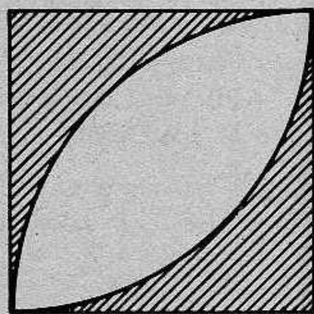
10)



11)



12)

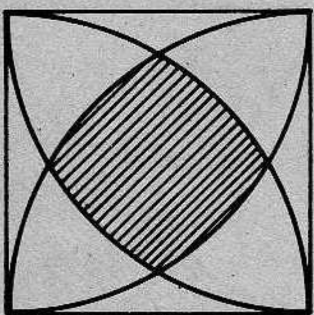


a

a

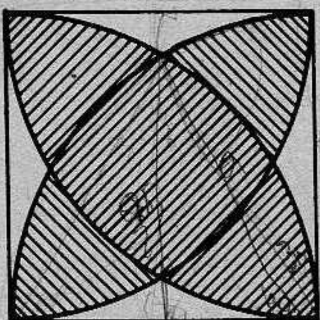
13)

a



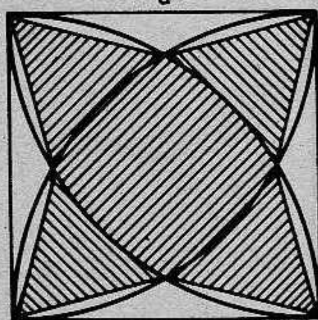
a

14)



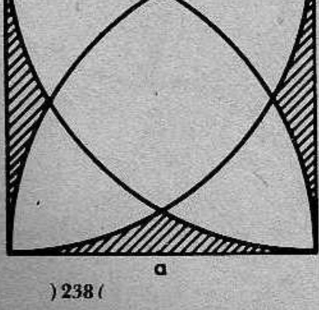
a

15)



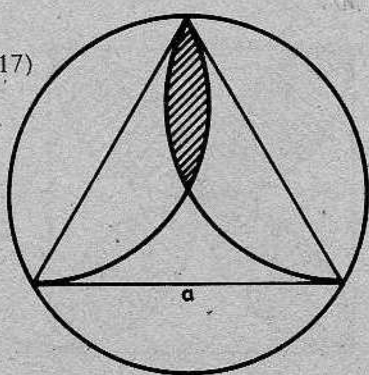
a

16)

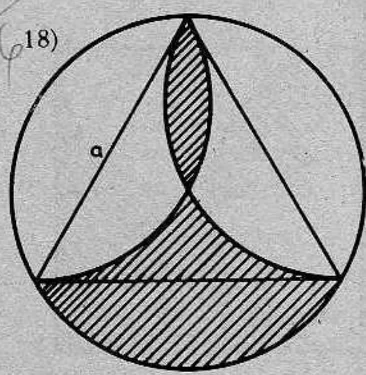


a

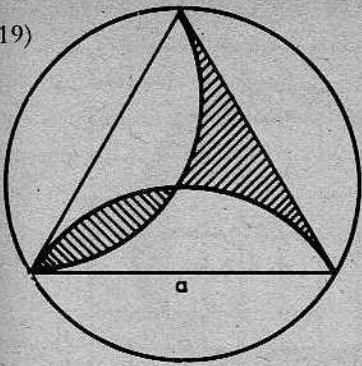
17)



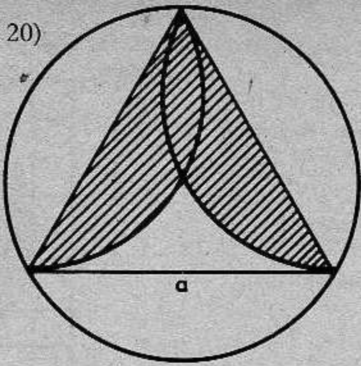
18)



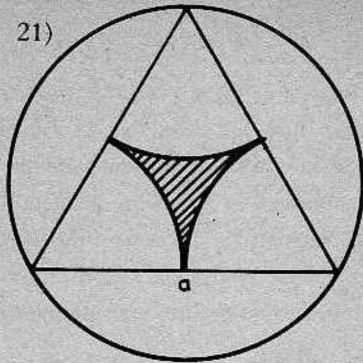
19)



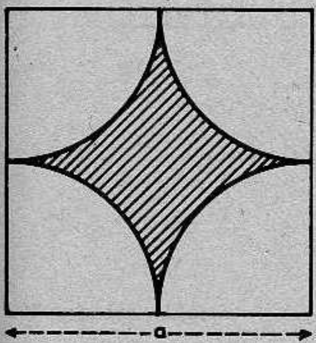
20)



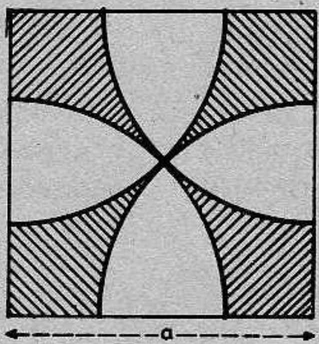
21)



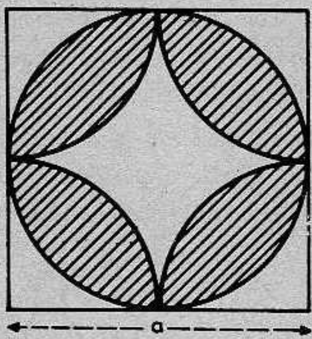
22)



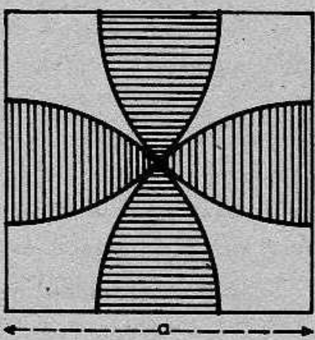
23)



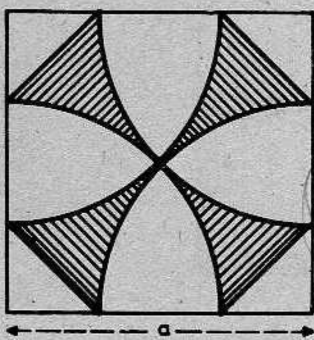
24)



25)



26)



$\left(\frac{a^2}{4}\sqrt{3}+\frac{a^2}{6}\right)$

$\frac{a^2}{2}-\left(\frac{a^2}{4}+\frac{a^2\pi}{6}\right)$

TAREA I

En todas las figuras anteriores se debe calcular el área »achurada« en función de la magnitud »a«. Estos ejercicios tienen por objeto darlos de »tarea« de a dos diferentes a alumnos distintos. De este modo aprenderán a relacionar y calcular áreas y, al mismo tiempo, tendrán oportunidad de practicar la operatoria algebraica.

Uno de mis alumnos encontró los resultados que se dan a continuación y, además, me informó que había »algunos que no pudo »sacar« (resolver). ¿Está de acuerdo con los resultados que él encontró? ¿Es usted capaz de resolver los que faltan?

Resp. I)

1) $0{,}25 \cdot a^2 \cdot (\frac{\pi}{2} - 1)$; 2) $0{,}25 \cdot a^2\ (\frac{\pi}{2} - 1)$;

3) $\frac{1}{4} a^2\ (3 - \frac{\pi}{2})$; 4) $0{,}5 \cdot a^2$; 5) $a^2 \cdot (\frac{\pi}{2} - 1)$;

6) $a^2 \cdot (2 - \frac{\pi}{2})$; 7) $\frac{1}{8}\ a^2 \cdot (\pi + 6\sqrt{3})$;

8) $0{,}5 \cdot a^2$; 9) $\frac{1}{4}\ a^2 \cdot (\frac{\pi}{2} + 1)$;

10) $a^2 \cdot (\pi - \frac{3}{2}\sqrt{3})$; 11) $\frac{1}{2} a^2 \cdot (\pi - \sqrt{3})$;

12) $a^2 \cdot (2 - \frac{\pi}{2})$; 13) $a^2 \cdot (1 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3})$;

14) $a^2 \cdot (\frac{2}{3}\pi + \sqrt{3} - 3)$; 15) $a^2 \cdot (\sqrt{3} - 1)$;

16) $a^2 \cdot (4 - \sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi)$;

22) $0{,}25 \cdot a^2\ (4 - \pi)$; 23) $0{,}5 \cdot a^2\ (4 - \pi)$;

24) $0{,}5a^2\ (\pi - 2)$; 25) $0{,}5a^2\ (\pi - 2)$.

TAREA II

Calcular el perímetro de la parte »achurada«.

351. *CALCULO EXPERIMENTAL DE* π

Este tema tiene por objeto darlo como »tarea« para que los alumnos de Enseñanza Básica y Media trabajen individualmente en sus casas, practiquen la medición de magnitudes diferentes, no olviden la operatoria aritmética, calculen el error que se comete y se discutan posteriormente en grupo los resultados obtenidos.

Primer método:

1) Tomar una hoja de cuaderno (o de un papel milimetrado) y cortar de ella una tira de más o menos 2 cm de ancho.

2) Con esta tira de papel dar una vuelta a una botella o a un tarro cilíndrico y marcar la longitud de una vuelta (Fig. 1).

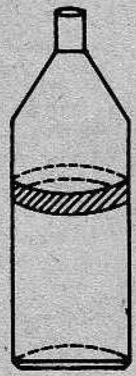


Fig. 1

3) Medir la longitud de esta vuelta.

4) Con una regla (o con un vernier o »pie de metro«) medir el diámetro de la botella o tarro.

5) Calcular las veces que este diámetro cabe en la longitud de una vuelta. (Para esto basta dividir las magnitudes correspondientes a la longitud de una vuelta por la longitud del diámetro.)

6) Aprovechar el resultado obtenido para calcular el % de error cometido considerando como verdadero el valor $\pi = 3{,}14$.

Segundo método:

1) Dibujar en el cuaderno una circunferencia de unos 8 »cuadraditos« de diámetro.

2) Calcular aproximadamente el área A del círculo correspondiente »cuadriculando« la figura 2. Para esto se considera como unidad de área la correspondiente a »un cuadradito« (ver N° 274).

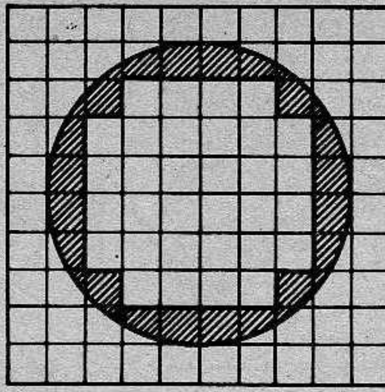


Fig. 2

3) Medir el radio del círculo.

4) Como el área del círculo es: $A = \pi r^2$, se obtiene de aquí:

$$\pi = \frac{A}{r^2}$$

5) Se sustituyen en la fórmula anterior los valores encontrados que llevarán al valor de π.

6) Para calcular el % de error cometido se considera el valor $\pi = 3{,}14$.

Ejemplo: En el círculo adjunto hay 32 »cuadraditos enteros«; con los saldos de »cuadraditos« se completan aproximadamente 17,4 más. Con esto, el total de cuadraditos es 49,4.

Como un cuadradito mide, en este dibujo, 0,5 cm de lado, su área es de $0{,}25\ cm^2$.

Por lo tanto, el área de este círculo es:

$0{,}25\ cm^2 \cdot 49{,}4 = 12{,}35\ cm^2$.

Por otra parte, el radio de este círculo es $0{,}5\ cm \cdot 4 = 2{,}0\ cm$.

$$\text{Luego } \pi = \frac{A}{r^2} = \frac{12{,}35\ cm^2}{4{,}0\ cm^2} = 3{,}0875\ (=)\ 3{,}09$$

El error absoluto cometido en esta determinación es: $E_{abs} = 3{,}09 - 3{,}14 = -0{,}05$.

El % de error cometido es:

$$\%\ E = \frac{0{,}05}{3{,}14} \cdot 100 = 1{,}59\ \%$$

Tercer método: Consiste en determinar el área del círculo A por »pesada«. Para esto se recorta un círculo dibujado sobre una cartulina o cartón o plástico y se pesa en una balanza. En seguida, del mismo material elegido se recorta un cuadrado de lado conocido (no es necesario que sea de lado 1 cm) o un rectángulo de lados conocidos (por ej., 3 cm × 4 cm) y se pesa. Como se conoce el área de la figura elegida, se establece la siguiente relación que permite determinar el área del círculo:

$$\frac{\text{área del círculo}}{\text{área figura elegida}} = \frac{\text{peso del círculo}}{\text{peso fig. elegida}}$$

de donde:

$$\textbf{área del círculo} = \frac{\text{peso del círculo}}{\text{peso fig. elegida}} \cdot \textbf{área fig. elegida}$$

A continuación se mide con una regla el radio del círculo y se sustituyen los valores encontrados análogamente como en el caso anterior.

33ª UNIDAD

Cálculo de los lados de los polígonos regulares inscritos y circunscritos en función del radio de la circunferencia. Cálculo de apotemas y áreas de estos polígonos. Sección áurea o divina.

352. En el cálculo usaremos las siguientes abreviaciones:

n = número de lados del polígono regular.

l_n = lado del polígono regular inscrito de n lados; ej.:

$l_3, l_4, l_5, l_8 \dots l_n$

l_{2n} = lado del polígono regular inscrito de doble número de lados que el anterior. A los ejemplos anteriores corresponden:

$l_6, l_8, l_{12}, l_{16} \dots l_{2n}$

ρ_n = apotema del polígono inscrito (Es la ⊥ desde el centro de la ⊙ al lado del polígono inscrito; cae en el punto medio del lado); OM = ρ_n es también la altura del △ fundamental ABO del polígono, regula (Fig. 1).

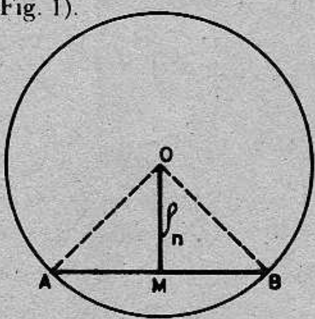


Fig. 1

L_n = lado del polígono circunscrito de n̲ lados = CD. Ej.:

$L_3, L_4, L_6, \dots L_n$

p_n = perímetro del polígono regular inscrito de n̲ lados. Ej.: p_6 = perímetro del exágono inscrito.

p_{12} = perímetro del dodecágono inscrito.

P_n = perímetro del polígono regular circunscrito de n̲ lados.

Ej.:

P_{10} = perímetro del decágono regular circunscrito.

a_n = área del polígono regular inscrito de n̲ lados. Ej.:

a_6 = área del exágono regular inscrito.

A_n = área del polígono regular circunscrito de n̲ lados.

Ej.:

A_8 = área del polígono regular circunscrito de 8 lados (octógono).

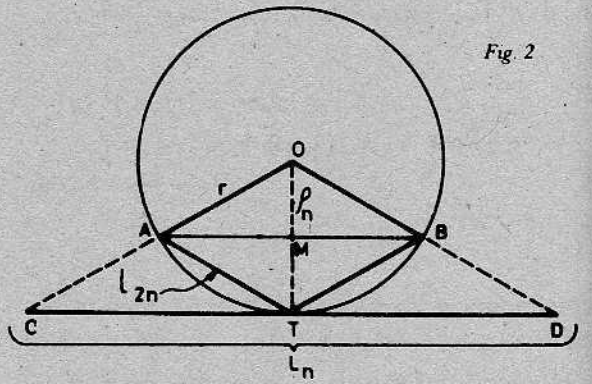


Fig. 2

Si AB = L_n resulta (Fig. 2)

OM = ρ_n; AT = TB = l_{2n}; CD = L_n

Siendo n ∈ $\mathbb{N}_0$, estudiaremos:

a) la serie del triángulo representada por $3 \cdot 2^n$ (por ejemplo: $l_3, l_6, l_{12}, \dots$)

b) la serie del cuadrado representada por $4 \cdot 2^n$ (por ejemplo: $l_4, l_8, l_{16}, \dots$)

c) La serie del pentágono representada por $5 \cdot 2^n$ (por ejemplo: $l_5, l_{10}, l_{20}, \dots$)

353. Calcular el lado del cuadrado inscrito en función del radio r̲ de la ⊙ circunscrita. Abreviadamente se escribirá: Calcular:

$l_4 = f(r)$

Construcción: Se trazan dos diámetros perpendiculares y se unen sus extremos. El △ fundamental AOB del cuadrado es △ rectángulo isósceles. Luego resulta: AB = l_4 (Fig. 3).

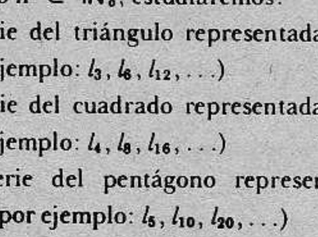


Fig. 3

Cálculo de l_4: **Basta con aplicar el teorema de Pitágoras al △ fundamental ABO:**

$$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2$$

$$(l_4)^2 = r^2 + r^2$$

$$(l_4)^2 = 2r^2$$

a) $\boxed{l_4 = r\sqrt{2}}$

Conocido el lado l_4 es fácil calcular los otros elementos del polígono:

$p_4 = 4 \cdot l_4 = 4r\sqrt{2}$

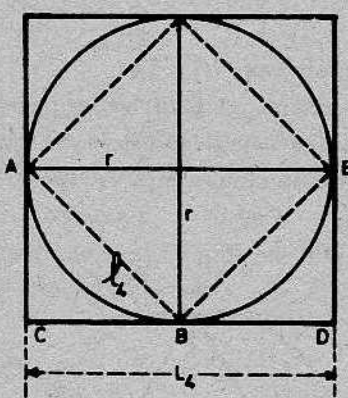
$\rho_4 = OM = \frac{r}{2}\sqrt{2}$ porque el △ BMO es isósceles rectángulo y por lo tanto

$$BM = MO = \frac{1}{2} l_4 = \frac{r}{2}\sqrt{2}$$

$a_4 = (l_4)^2 = 2r^2$

354. Calcular $L_4 = f(r)$ (lado del cuadrado circunscrito).

Fig. 4



Construcción: Se trazan dos diámetros ⊥ y las tangentes en sus extremos. Resulta $CD = L_4$ (Fig. 4).

Cálculo: Como $\overline{CD} = \overline{AE} = 2r$, se obtiene:

a) $\boxed{L_4 = 2r}$

Además, $P_4 = 8r$; $A_4 = (L_4)^2 = 4r^2$

Problema 1): ¿En qué razón están las áreas del cuadrado inscrito y circunscrito a la misma ⊙?

$$\begin{cases} a_4 = 2r^2 \\ A_4 = 4r^2 \end{cases}$$

$$\frac{a_4}{A_4} = \frac{2r^2}{4r^2} = \frac{1}{2}$$

Problema 2): En una ⊙ de radio $\underline{a}$ se inscribe y circunscribe un cuadrado. ¿Cuánto vale el área comprendida por los dos polígonos?

$$- \begin{cases} A_4 = 4a^2 \\ a_4 = 2a^2 \end{cases}$$

$$A_4 - a_4 = 2a^2$$

Problema 3): En una ⊙ se inscribe un cuadrado cuyo lado mide 10 cm. ¿Cuánto mide el radio de la ⊙ circunscrita y el de la inscrita al cuadrado?

$l_4 = 10$ cm

$l_4 = r\sqrt{2}$

$r\sqrt{2} = 10$

$r = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$

$\rho_4 = \frac{r}{2}\sqrt{2} = \frac{l_4}{2} = 5$ cm

355. Calcular $l_6 = f(r)$ (lado del exágono inscrito).

Construcción: A partir de un punto A de la ⊙ se aplica el radio como cuerda. El △ fundamental ABO del exágono es △ equilátero, o sea $\alpha = 60°$. Luego $\overline{AB} = l_6$ y como $\overline{AB} = \overline{OA} = r$; resulta (Fig. 5):

a) $\boxed{l_6 = r}$

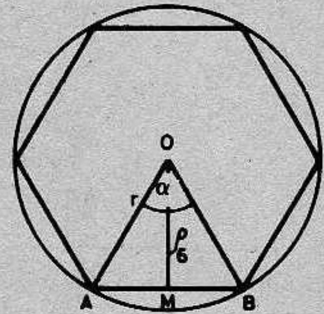


Fig. 5

Para calcular $\rho_6 = \overline{OM}$ se aplica el corolario de Pitágoras al △ AMO:

$$\overline{OM}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{AM}^2 = r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2 = r^2 - \frac{r^2}{4} = \frac{3r^2}{4}$$

luego: $\rho_6 = \sqrt{\frac{3r^2}{4}} = \frac{r}{2}\sqrt{3}$, o sea:

b) $\boxed{\rho_6 = \frac{r}{2}\sqrt{3}}$

Para calcular el área a_6 del exágono se multiplica por 6 el área del △ fundamental ABO.

$$a_n = \frac{n \cdot l_n \cdot \rho_n}{2}$$

$$a_6 = \frac{6 \cdot l_6 \cdot \rho_6}{2} = 3 \cdot r \cdot \frac{r}{2}\sqrt{3}$$

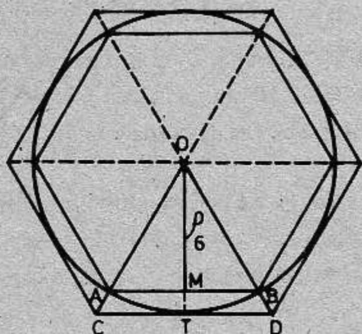
Luego:

c) $a_6 = \frac{3}{2} r^2 \sqrt{3}$

356. Calcular $L_6 = f(r)$

Construcción: Se dibuja el $\triangle$ fundamental ABO del exágono inscrito; se traza su apotema $\overline{OM} = \rho_6$ y se la prolonga hasta cortar la $\odot$ en T. En T se traza la tangente (o//AB) y se limita con las prolongaciones de los radios $\overline{OA} \longrightarrow A$ y $\overline{OB} \longrightarrow B$. Resulta $\overline{CD} = L_6$ (Fig. 6).

Fig. 6



Cálculo de L_6: Como $\triangle CDO \sim \triangle ABO$ resulta que:

$\frac{CD}{AB} = \frac{OT}{OM}$; reemplazando estas cantidades por sus valores, se obtiene sucesivamente:

$$\frac{L_6}{r} = \frac{r}{\frac{r}{2}\sqrt{3}}$$

$$L_6 = \frac{2r^2}{r\sqrt{3}} = \frac{2r}{\sqrt{3}}$$ (Se amplifica por $\sqrt{3}$ para racionalizar el denominador)

a) $\boxed{L_6 = \frac{2}{3} r\sqrt{3}}$

Además: $P_6 = 6 \cdot L_6 = 4r\sqrt{3}$

$$A_6 = 6 \cdot \triangle CDO = \frac{6 \cdot L_6 \cdot r}{2} = 3 \cdot \frac{2}{3} r\sqrt{3} \cdot r$$

b) $A_6 = 2r^2\sqrt{3}$

Problema 1): ¿En qué razón se encuentran las áreas del exágono inscrito y circunscrito a la misma $\odot$?

$$\therefore \left\{ \begin{array}{l} a_6 = \frac{3}{2} r^2\sqrt{3} \\ A_6 = 2r^2\sqrt{3} \end{array} \right.$$

$$\frac{a_6}{A_6} = \frac{\frac{3}{2} r^2\sqrt{3}}{2r^2\sqrt{3}} = \frac{3}{4}$$

Problema 2): A una $\odot$ de radio *a* se inscribe y circunscribe un exágono regular. Calcular el área comprendida entre ambos.

$$\begin{array}{l} A_6 = 2a^2\sqrt{3} \\ a_6 = \frac{3}{2} a^2\sqrt{3} \end{array}$$

$$A_6 - a_6 = 2a^2\sqrt{3} - \frac{3}{2} a^2\sqrt{3}$$

$$A_6 - a_6 = \frac{4a^2\sqrt{3} - 3a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$A_6 - a_6 = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

Problema 3): El área comprendida entre el exágono inscrito y circunscrito a una $\odot$ mide 60 cm². ¿Cuánto mide el radio de la $\odot$?

$$A_6 - a_6 = 2r^2\sqrt{3} - \frac{3}{2}r^2\sqrt{3} =$$

luego:

$$\frac{r^2}{2} \cdot \sqrt{3} = 60$$

$$r^2 = \frac{120}{\sqrt{3}} = \frac{120}{3}\sqrt{3} = 40\sqrt{3}$$

$$\therefore r = \sqrt{40\sqrt{3}} = 2\sqrt{10\sqrt{3}} = \sqrt[4]{300}$$

357. Calcular $l_3 = f(r)$.

Construcción: A partir de un punto A de la $\odot$ se aplica el radio como cuerda y se une un punto por medio. Resulta el $\measuredangle AOB = 60° + 60° = 120°$.

Luego: $\overline{AB} = l_3$ (Fig. 7).

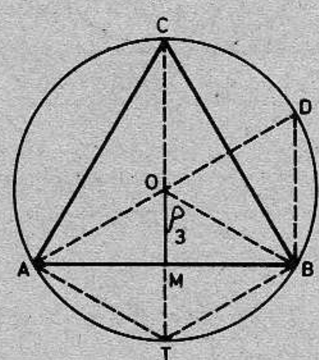


Fig. 7

Cálculo: el cuadrilátero ATBO es un rombo de lado $\underline{r}$; como sus diagonales se dimidian, se obtiene que:

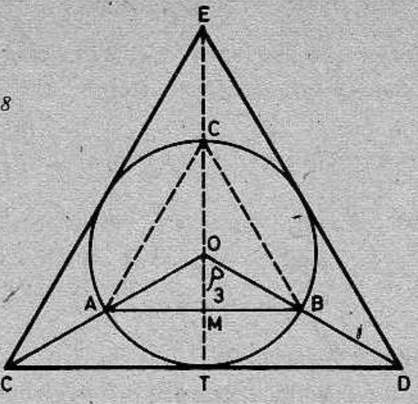
a) $\rho_3 = \frac{r}{2}$.

Además, según Teorema de Thales, el $\triangle ABD$ es rectángulo; y por lo tanto aplicando el Teorema de Pitágoras se obtiene:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{BD}^2$$

$$(l_3)^2 = (2r)^2 - r^2$$

Fig. 8



$$(l_3)^2 = 4r^2 - r^2 = 3r^2$$

b) $\boxed{l_3 = r\sqrt{3}}$

Además, $p_3 = 3 \cdot l_3 = 3r\sqrt{3}$

$$a_3 = \frac{AB \cdot CM}{2} = \frac{r\sqrt{3} \cdot \frac{3}{2}r}{2}$$

c) $\boxed{a_3 = \frac{3}{4} r^2 \sqrt{3}}$

358. Calcular $L_3 = f(r)$

Construcción: Se dibuja primero el △ inscrito; se traza $\rho_3 = \overline{OM}$ y se prolonga hasta el punto de tangencia T; la tangente se limita con las prolongaciones de los radios $\overline{OA} \longrightarrow$ A y $\overline{OB} \longrightarrow$ B. Resulta $\overline{CD} = L_3$.

Cálculo:

$$\triangle CDO \sim \triangle ABO$$
$$\therefore \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OT}}{\overline{OM}}$$

$$\frac{L_3}{r\sqrt{3}} = \frac{r}{\frac{r}{2}} = \frac{2}{1}$$

$\therefore$ a) $\boxed{L_3 = 2r\sqrt{3}}$

Además, $P_3 = 3 \cdot L_3 = 6r\sqrt{3}$

$$A_3 = \frac{\overline{CD} \cdot \overline{ET}}{3} = \frac{2r\sqrt{3} \cdot 3r}{2} =$$

b) $\boxed{A_3 = 3r^2\sqrt{3}}$

Problema 1): A una misma ⊙ se inscribe y circunscribe un △ equilátero. ¿En qué razón se encuentran sus áreas?

$$: \begin{cases} a_3 = \frac{3}{4} r^2 \sqrt{3} \\ A_3 = 3r^2\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\frac{a_3}{A_3} = \frac{\frac{3}{4} r^2\sqrt{3}}{a_3 = 3r^2\sqrt{3}} = \frac{1}{4}$$

A este mismo resultado se llega comparando las áreas de estos △, que son semejantes con los cuadrados de dos lados homólogos; como los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son entre sí como 1:2, las áreas de los △ serán entre sí como 1:4 (Según N° 343-b.)

Problema 2): A una misma ⊙ se inscribe y circunscribe un △ equilátero de modo que el área comprendida entre ambos sea 81 cm^2. ¿Cuánto mide el radio de la ⊙?

$$- \begin{cases} A_3 = 3r^2\sqrt{3} \\ a_3 = \frac{3}{4} r^2\sqrt{3} \end{cases}$$

$$A_3 - a_3 = 3r^2\sqrt{3} - \frac{3}{4} r^2\sqrt{3} = \frac{12r^2\sqrt{3} - 3r^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A_3 - a_3 = \frac{9}{4} r^2\sqrt{3}$$

$$\therefore \frac{9}{4} r^2\sqrt{3} = 81$$

$$r^2 = \frac{81 \cdot 4}{9\sqrt{3}} = \frac{36}{\sqrt{3}} = \frac{36 \cdot \sqrt{3}}{3} = 12\sqrt{3}$$

$$\therefore r = \sqrt{12\sqrt{3}} = 2\sqrt{3\sqrt{3}} = 2\sqrt{\sqrt{27}} = 2\sqrt[4]{27} \text{ cm}$$

359. Calcular $l_{12} = f(r)$.

Construcción: Primeramente se dibuja el exágono y en seguida se prolonga ρ_6 hasta determinar T, o bien se traza la bisectriz del ángulo del centro AOB que dimidiará al arco $\widehat{AB}$ y a la cuerda $\overline{AB} = l_6$.

Resulta: $\overline{AT} = \overline{TB} = l_{12}$.

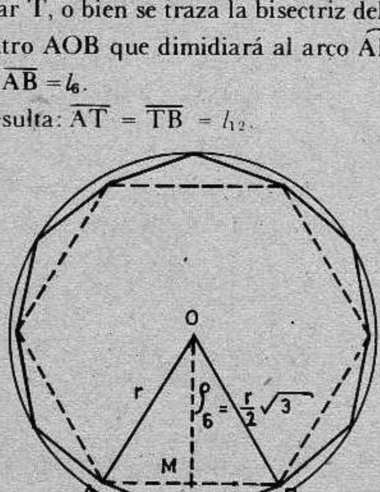


Fig. 9

Cálculo: se aplica el teorema de Pitágoras al $\triangle$ ATM:

$$\overline{AT}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{MT}^2$$

$$(l_{12})^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 + \left(r - \frac{r}{2}\sqrt{3}\right)^2$$

$$(l_{12})^2 = \frac{r^2}{4} + r^2 - r^2\sqrt{3} + \frac{3r^2}{4}$$

$$(l_{12})^2 = \frac{r^2 + 4r^2 - 4r^2\sqrt{3} + 3r^2}{4}$$

$$(l_{12})^2 = \frac{4r^2(2 - \sqrt{3})}{4}$$

$$\therefore \text{a)} \quad \boxed{l_{12} = r\sqrt{2 - \sqrt{3}}}$$

Otro cálculo de l_{12}: se aplica el teorema general de Pitágoras al triángulo ATO (Fig. 9):

$$\overline{AT}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OT}^2 - 2 \cdot \overline{OT} \cdot \overline{OM}$$

$$(l_{12})^2 = r^2 + r^2 - 2 \cdot r \cdot \frac{r}{2}\sqrt{3}$$

$$(l_{12})^2 = 2r^2 - r^2\sqrt{3}$$

$$l_{12} = r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

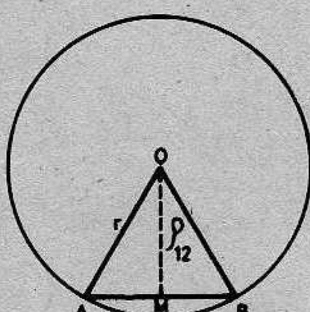


Fig. 10

Sea ahora $\overline{AB} = l_{12}$ y, por lo tanto $\overline{OM} = \rho_{12}$; para calcular ρ_{12} se aplica el corol. de Pitágoras al $\triangle$ AMO:

$$\overline{OM}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{AM}^2$$

$$(\rho_{12})^2 = r^2 - \left(\frac{l_{12}}{2}\right)^2$$

$$(\rho_{12})^2 = r^2 - \left(\frac{r\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}\right)^2$$

$$(\rho_{12})^2 = r^2 - \frac{r^2 \cdot (2 - \sqrt{3})}{4}$$

$$(\rho_{12})^2 = \frac{4r^2 - 2r^2 + r^2\sqrt{3}}{4}$$

$$(\rho_{12})^2 = \frac{2r^2 + r^2\sqrt{3}}{4} = \frac{r^2}{4}(2 + \sqrt{3})$$

$$\text{b)} \therefore \rho_{12} = \frac{r}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

Podemos con este valor calcular el área del dodecágono regular inscrito; en efecto:

$$a_{12} = \frac{12 \cdot l_{12} \cdot \rho_{12}}{2} = 6 \cdot r\sqrt{2 - \sqrt{3}} \cdot \frac{r}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

$$= 3r^2\sqrt{4 - 3}$$

luego: c) $a_{12} = 3r^2$

369. Calcular $L_{12} = f(r)$

Construcción: Se construye primero el dodecágono regular inscrito: sea

$$\overline{AB} = l_{12} = r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

y por lo tanto

$$\overline{OM} = \rho_{12} = \frac{r}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

La tangente en T y las prolongaciones de OA $\to$ A y OB $\to$ B determinan $\overline{CD} = L_{12}$.

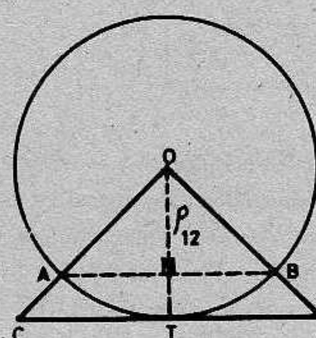


Fig. 11

Cálculo:

$\triangle$ CDO $\sim$ $\triangle$ ABO

$$\therefore \frac{CD}{AB} = \frac{OT}{OM} \text{ (en virtud del N° 304-I°)}$$

$$\frac{L_{12}}{r\sqrt{2 - \sqrt{3}}} = \frac{r}{\frac{r}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

$$L_{12} = \frac{2r^2\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{r\sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

(se racionaliza amplificando por $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$)

$$L_{12} = \frac{2r(\sqrt{2 - \sqrt{3}})^2}{\sqrt{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})}}$$

$$\therefore \text{a)} \quad \boxed{L_{12} = 2r(2 - \sqrt{3})}$$

Además, $P_{12} = 12\, L_{12} = 24r \cdot (2 - \sqrt{3})$

$$A_{12} = \frac{12\, L_{12} \cdot r}{2} = 6 \cdot 2r(2 \cdot \sqrt{3}) \cdot r = 12r^2 \cdot (2 - \sqrt{3})$$

361. Calcular $l_8 = f(r)$

Construcción: Se construye el cuadrado de modo que

$\overline{AB} = l_4 = r\sqrt{2}$; $\overline{OM} = \rho_4 = \frac{r}{2}\sqrt{2}$.

Prolongando $\overline{OM} \longrightarrow$ M, o trazando la bisectriz del ∡ AOB se determina $\overline{AT} = \overline{TB} = l_8$ (Fig. 12).

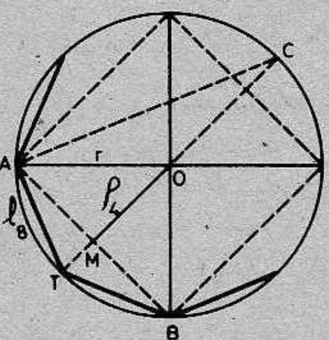


Fig. 12

Cálculo: Se puede calcular de varias maneras:

1°. Aplicando el Teorema particular de Pitágoras al △ ATM:

$$\overline{AT}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{MT}^2$$

$$(l_8)^2 = \left(\frac{r\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(r - \frac{r}{4}\sqrt{2}\right)^2$$

haciendo los cálculos se obtiene:

a) $\boxed{l_8 = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}}$

2°. Aplicando el 1^er^ Teorema de Euclides al △ TCA:

$$\overline{AT}^2 = \overline{TC} \cdot \overline{TM}$$

$(l_8)^2 = 2r \cdot \left(r - \frac{r}{2}\sqrt{2}\right)$; finalmente da:

$$(l_8)^2 = 2r^2 - r^2\sqrt{2} = r^2(2 - \sqrt{2})$$

$$l_8 = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

3°. Aplicando el Teorema General de Pitágoras al △ ATO:

$$\overline{AT}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OT}^2 - 2 \cdot \overline{TO} \cdot OM$$

$$(l_8)^2 = r^2 + r^2 - 2 \cdot r \cdot \frac{r}{4}\sqrt{2}$$

$$(l_8)^2 = 2r^2 - r^2\sqrt{2}$$

$$l_8 = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

Siguiendo el mismo camino que para calcular ρ_{12} y a_{12} se encuentra:

$$\rho_8 = \frac{r}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}} \quad \text{y} \quad a_8 = 2r^2\sqrt{2}$$

362. Cálculo de ρ_n en función de l_n y de r; o sea:

$$\rho_n = f(l_n, r).$$

Sea $\overline{AB}$ el lado de un polígono regular inscrito cualquiera de n lados; o sea $\overline{AB} = l_n$ y en consecuencia $\overline{OM} = \rho_n$.

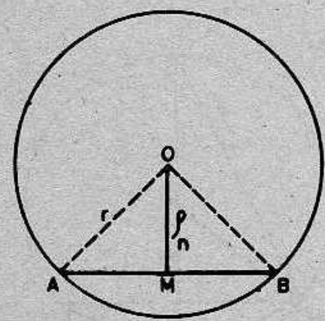


Fig. 13

Aplicando el corolario de Pitágoras al △ AMO, se obtiene (Fig. 13):

$$\overline{OM}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{AM}^2$$

$$(\rho_n)^2 = r^2 - \left(\frac{l_n}{2}\right)^2 = r^2 - \frac{(l_n)}{4} = \frac{4r^2 - (l_n)^2}{4}$$

$$\rho_n = \sqrt{\frac{4r^2 - (l_n)^2}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4r^2 - (l_n)^2}$$

si en la cantidad subradical se saca factor común r^2, resulta:

$\rho_n = \frac{1}{2}\sqrt{r^2 \cdot \left(4 - \frac{(l_n)^2}{r^2}\right)}$; finalmente:

a) $\boxed{\rho_n = \frac{r}{2}\sqrt{4 - \left(\frac{l_n}{r}\right)^2}}$

Con esta fórmula podemos calcular rápidamente, sin hacer la figura geométrica, el valor de cualquier apotema del polígono regular inscrito conocido el lado del polígono y el radio.

363. Calcular ρ_8 · (Conocido $l_8 = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}$)

Primeramente se calcula:

$$\rho_8 = \frac{r}{2}\sqrt{4 - \left(\frac{l_8}{r}\right)^2}$$

$$\rho_8 = \frac{r}{2}\sqrt{4 - \left(\frac{\cancel{r}\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\cancel{r}}\right)^2}$$

$$\rho_8 \; 8 \; \frac{r}{2}\sqrt{4 - (2 - \sqrt{2})}$$

$$\rho_8 = \frac{r}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

364. Calcular el lado l_{2n} del polígono de 2n lados conocido el lado l_n del polígono de n lados y el radio r. Es decir, calcular

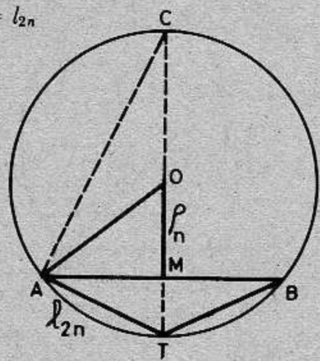
$$l_{2n} = f(l_n, r)$$

Siendo $\overline{AB} = l_n$ resulta

$$\overline{OM} = \rho_n = \frac{r}{2}\sqrt{4-\left(\frac{l_n}{r}\right)^2}$$

y $\overline{AT} = l_{2n}$

Fig. 14



a) Se puede calcular por el 1^{er} Teorema de Euclides aplicándolo al $\triangle$ TCA:

$$\overline{AT}^2 = \overline{TC}\cdot\overline{TM}$$

$$(l_{2n})^2 = 2r\cdot(r-\rho_n)$$

$$(l_{2n})^2 = 2r^2 - 2r\cdot\rho_n$$

$$(l_{2n})^2 = 2r^2 - 2r\cdot\frac{r}{2}\sqrt{4-\left(\frac{l_n}{r}\right)^2}$$

$$(l_{2n})^2 = r^2\left(2-\sqrt{4-\left(\frac{l_n}{r}\right)^2}\right)$$

finalmente: $\boxed{l_{2n} = r\sqrt{2-\sqrt{4-\left(\frac{l_n}{r}\right)^2}}}$

b) Se llega al mismo resultado aplicando el Teorema General de Pitágoras al $\triangle$ ATO:

$$\overline{AT}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{TO}^2 - 2\cdot\overline{TO}\cdot\overline{OM}$$

$$(l_{2n})^2 = r^2 + r^2 - 2\cdot r\cdot\frac{r}{2}\sqrt{4-\left(\frac{l_n}{r}\right)^2}$$

$$(l_{2n})^2 = 2r^2 - r^2\sqrt{4-\left(\frac{l_n}{r}\right)^2}$$

$$(l_{2n})^2 = r^2\cdot\left(2-\sqrt{4-\left(\frac{l_n}{r}\right)^2}\right)$$

$$\boxed{l_{2n} = r\sqrt{2-\sqrt{4-\left(\frac{l_n}{r}\right)^2}}}$$

Con la ayuda de esta fórmula podemos calcular, sin hacer la figura geométrica, el lado l_{12} conocido l_6; el lado l_8 conocido l_4; l_{16} conocido l_8; en general, el lado l_{2n} en función de l_n.

365. Calcular l_8 (conocido $l_4 = r\sqrt{2}$)

$$l_8 = r\sqrt{2-\sqrt{4-\left(\frac{l_4}{r}\right)^2}}$$

$$l_8 = r\sqrt{2-\sqrt{4-\left(\frac{\cancel{r}\sqrt{2}}{\cancel{r}}\right)^2}}$$

$$l_8 = r\sqrt{2-\sqrt{4-2}}$$

$$\therefore l_8\, r\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

366. Calcular l_{16} (conocido $l_8 = r\sqrt{2-\sqrt{2}}$)

$$l_{16} = r\sqrt{2-\sqrt{4-\left(\frac{l_8}{r}\right)^2}}$$

$$l_{16} = r\sqrt{2-\sqrt{4-\left(\frac{\cancel{r}\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\cancel{r}}\right)^2}}$$

$$l_{16} = r\sqrt{2-\sqrt{4-(2-\sqrt{2})}}$$

$$l_{16} = r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

Análogamente se encontrará que:

$$l_{32} = r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}};\ \text{etc.}$$

367. Calcular: $l_{12} = f(l_6)$

$$l_{12} = r\sqrt{2-\sqrt{4-\left(\frac{l_6}{r}\right)^2}},\ \text{pero } l_6 = r$$

$$l_{12} = r\sqrt{2-\sqrt{4-\underbrace{\left(\frac{\cancel{r}}{\cancel{r}}\right)^2}_{1}}}$$

$$\therefore l_{12} = r\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

368. Calcular $l_{24} = f(l_{12})$

$$l_{24} = r\sqrt{2-\sqrt{4-\left(\frac{l_{12}}{r}\right)^2}};$$

pero $l_{12} = r\sqrt{2-\sqrt{3}}$

$$l_{24} = r\sqrt{2-\sqrt{4-\left(\frac{\cancel{r}\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\cancel{r}}\right)^2}}$$

$$l_{24} = r\sqrt{2-\sqrt{4-(2-\sqrt{3})}}$$

$$l_{24} = r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

análogamente se calcula l_{48}, después l_{96}; etc.

369. Calcular l_n conocido l_{2n}

Para encontrar la fórmula que exprese l_n en función de l_{2n} basta con despejar l_n de la fórmula:

$$l_{2n} = r\sqrt{2 - \sqrt{4 - \left(\frac{l_n}{r}\right)^2}}$$

Con respecto a l_n es una ecuación irracional y por eso se debe elevar al cuadrado ambos miembros. Se obtiene sucesivamente:

$$(l_{2n})^2 = r^2\left[2 - \sqrt{4 - \left(\frac{l_n}{r}\right)^2}\right]$$

$$(l_{2n})^2 = 2r^2 - r^2\sqrt{4 - \left(\frac{l_n}{r}\right)^2};$$

se aísla la raíz y se vuelve a elevar al cuadrado:

$$(l_{2n})^2 - 2r^2 = -r^2\sqrt{4 - \left(\frac{l_n}{r}\right)^2};$$

al cuadrado ambos miembros:

$$(l_{2n})^4 - 4r^2 \cdot (l_{2n})^2 + 4r^4 = r^4 \cdot \left[4 - \left(\frac{l_n}{r}\right)^2\right]$$

$$(l_{2n})^4 - 4r^2 \cdot (l_{2n})^2 + 4r^4 = 4r^4 - r^2 \cdot (l_n)^2;$$

se aísla en el primer miembro el término con la incógnita:

$$r^2 \cdot (l_n)^2 = 4r^2 \cdot (l_{2n})^2 - (l_{2n})^4 \qquad /: r^2$$

$$(l_n)^2 = 4 \cdot (l_{2n})^2 - \frac{(l_{2n})^4}{r^2}$$

$$(l_n)^2 = (l_{2n})^2 \cdot \left[4 - \left(\frac{l_{2n}}{r}\right)^2\right]$$

luego: $\boxed{\text{a) } l_n = l_{2n} \cdot \sqrt{4 - \left(\frac{l_{2n}}{r}\right)^2}}$

Con ayuda de esta fórmula se puede calcular l_3 conocido l_6; l_5 conocido l_{10}; l_4 conocido l_8; en general, l_n conocido l_{2n}.

370. Calcular $l_3 = f(l_6)$

$$l_3 = l_6 \cdot \sqrt{4 - \left(\frac{l_6}{r}\right)^2}; \text{ pero } l_6 = r$$

$$l_3 = r\sqrt{4 - \left(\frac{r}{r}\right)^2}$$

$$\therefore\ l_3 = r\sqrt{4 - 1} = r\sqrt{3}$$

371. Calcular $l_5 = f(l_{10})$ si $l_{10} = \frac{r}{2} \cdot (\sqrt{5} - 1)$

$$l_5 = l_{10} \cdot \sqrt{4 - \left(\frac{l_{10}}{r}\right)^2}$$

$$l_5 = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1) \cdot \sqrt{4 - \left(\frac{\frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)}{r}\right)^2}$$

$$l_5 = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1) \cdot \sqrt{4 - \frac{5 - 2\sqrt{5} + 1}{4}}$$

$$l_5 = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1) \cdot \sqrt{\frac{16 - 6 + 2\sqrt{5}}{4}}$$

$$l_5 = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1) \cdot \sqrt{\frac{10 + 2\sqrt{5}}{4}}$$

se introduce $(\sqrt{5} - 1)$ como factor del subradical:

$$l_5 = \frac{r}{2}\sqrt{\frac{(\sqrt{5} - 1)^2 \cdot (10 + 2\sqrt{5})}{4}}$$

$$l_5 = \frac{r}{2}\sqrt{\frac{(6 - 2\sqrt{5})(10 + 2\sqrt{5})}{4}}$$

$$l_5 = \frac{r}{2}\sqrt{\frac{60 - 20\sqrt{5} + 12\sqrt{5} - 20}{4}}$$

$$= \frac{r}{2}\sqrt{\frac{40 - 8\sqrt{5}}{4}}$$

$$\therefore\ \text{a) } \boxed{l_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$$

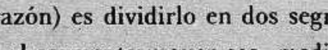
372. SECCION AUREA O DIVINA

Dividir un trazo en sección áurea (o en media y extrema razón) es dividirlo en dos segmentos de modo que el segmento mayor sea media proporcional geométrica entre el trazo entero y el segmento menor.

Es decir, el punto X debe dividir al trazo $\overline{AB}$ de modo que (Fig. 15):

$$\frac{AB}{AX} = \frac{AX}{BX}$$

Fig. 15



Solución:

1) Se traza la $\perp$ en uno de los extremos del trazo de modo que esta $\perp$ sea igual a la mitad del trazo; por ej.: (Fig. 16)

$$\overline{BO} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB}$$

2) Se dibuja la circunferencia $(O, \overline{OB})$.

3) Se une A con O; se prolonga más allá de O.

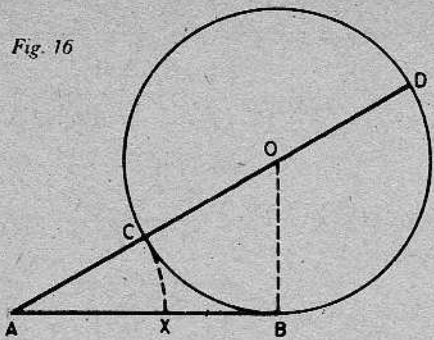


Fig. 16

4) Con centro en A y radio $\overline{AC}$ se corta el trazo dado; se determina el punto X que debe cumplir con la tesis:

$$\frac{AB}{AX} = \frac{AX}{BX}$$

Demostración: Se aplica el teorema de la tangente y la secante:

$\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC}$; descomponiendo se obtiene:

$$\frac{AD - AB}{AB} = \frac{AB - AC}{AC}$$

pero como $\overline{AB} = \overline{CD}$ y $\overline{AC} = \overline{AX}$, resulta:

$$\overline{AD} - \overline{AB} = \overline{AC}, \text{ y } \overline{AB} - \overline{AC} = \overline{BX}.$$

Luego: $\frac{AC}{AB} = \frac{BX}{AC}$ y finalmente: $\frac{AX}{AB} = \frac{BX}{AX}$

373. Construir y calcular el lado del decágono inscrito, o sea, calcular $l_{10} = f(r)$

1ra Solución: Basta dividir el radio en sección áurea; el segmento mayor es el lado l_{10}, o sea $\overline{OX} = l_{10}$. (Fig. 17).

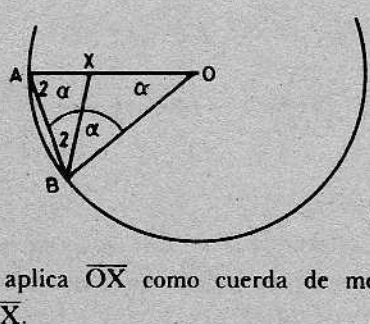


Fig. 17

Se aplica $\overline{OX}$ como cuerda de modo que $\overline{AB} = \overline{OX}$.

Para que $\overline{AB}$ sea l_{10} debemos demostrar que

$$\alpha = 36°; \left(\frac{360°}{10} = 36°\right).$$

En efecto:

$\triangle$ ABO $\sim$ $\triangle$ XAB (tienen 2 lados proporcionales y el $\sphericalangle$ en A comprendido por ellos, igual); por construcción se tiene:

$$AO : OX = OX : AX, \text{ pero } \overline{OX} = \overline{AB}.$$

luego:

$$AO : AB = AB : AX$$

Además, por ser el $\triangle$ ABO isósceles, también lo es su $\triangle$ semejante XAB, o sea $\overline{BX} = \overline{AB}$; de donde resulta que el $\triangle$ BOX también es isósceles.

Por otra parte el $\sphericalangle$ AXB es $\sphericalangle$ ext. del vértice del $\triangle$ BOX y por lo tanto $\sphericalangle$ AXB $= 2\alpha =$ $= \sphericalangle$ XAB, como asimismo el $\sphericalangle$ ABO $= 2\alpha$, por ser $\sphericalangle$ XAB $= \sphericalangle$ ABO.

Sumando los 3 $\sphericalangle$ interiores del $\triangle$ ABO, resulta:

$$2\alpha + 2\alpha + \alpha = 180 \text{ de donde } \alpha = 36°:$$

Luego: $\overline{AB} = l_{10}$

374. Cálculo de l_{10}:

Se obtiene de la proporción de la sección áurea del radio: AO:OX = OX:AX; reemplazando estos trazos por sus valores resulta:

$$r : l_{10} = l_{10} : (r - l_{10});$$

como la incógnita es l_{10} se ordena la ecuación respecto a ella:

$$(l_{10})^2 = r^2 - r \cdot l_{10}$$

$$(l_{10})^2 + r \cdot l_{10} - r^2 = 0$$

$$l_{10} = -\frac{r}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 + r^2}$$

$$l_{10} = -\frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{5r^2}{4}}$$

$$l_{10} = -\frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{5r^2}{4}}$$

$$l_{10} = -\frac{r}{2} \pm \frac{r}{2}\sqrt{5}$$

$$l_{10} = -\frac{r}{2} + \frac{r}{2}\sqrt{5}$$

$$l_{10} = -\frac{r}{2} - \frac{r}{2}\sqrt{5}$$

(no es solución geométrica)

luego: $\boxed{l_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)}$

375. 2ª Solución: Otra construcción y cálculo de l_{10} y l_5 (Construcción de Claudio Ptolomeo, siglo II).

Se traza $\overline{OC} \perp \overline{AB}$; se dimidia el radio $\overline{OB}$ de modo que

$$\overline{OM} = \overline{MB} = \frac{r}{2}$$

Con centro en M y radio $\overline{MC}$ se determina X. Se obtiene que (Fig. 18):

$$\overline{OX} = l_{10} \text{ y } \overline{CX} = l_5$$

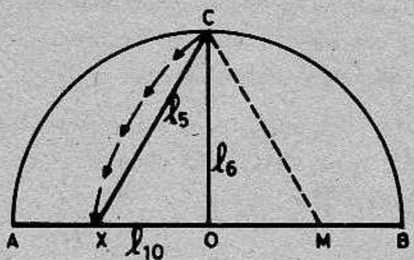


Fig. 18

Dem.: El Teorema de Pitágoras al $\triangle$ OMC se obtiene:

$$\overline{CM}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{OC}^2$$

$$\overline{CM}^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 + r^2 = \frac{r^2}{4} + r^2 = \frac{5r^2}{4}$$

luego

$$\overline{CM} = \frac{r}{2}\sqrt{5} = \overline{MX}$$

por lo tanto:

$$\overline{OX} = \overline{MX} - \overline{MO}$$

$$\overline{OX} = \frac{r}{2}\sqrt{5} - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

que es el valor de l_{10}. Luego $\overline{OX} = l_{10}$

Para demostrar que $\overline{CX} = l_5$ se aplica el Teorema de Pitágoras al $\triangle$ XOC:

$$\overline{CX}^2 = (l_{10})^2 + (l_6)^2$$

$$\overline{CX}^2 = \left[\frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)\right]^2 + r^2$$

$$\overline{CX}^2 = \frac{r^2}{4}(6 - 2\sqrt{5}) + \frac{4r^2}{4}$$

$$\overline{CX}^2 = \frac{r^2}{4}(10 - 2\sqrt{5})$$

$$\overline{CX} = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}, \quad \text{luego: } \overline{CX} = l_5$$

376. EJERCICIOS

1) Calcular un cateto de un $\triangle$ rectángulo si la hipotenusa es l_5 y el otro cateto es l_{10}

$$x^2 = (l_5)^2 - (l_{10})^2;$$

basta mirar el dibujo anterior para llegar a que:

$$x^2 = r^2 \quad \text{o sea} \quad x = r = l_6$$

2) En una $\odot$ se dibuja un $\measuredangle$ del centro AOB = 90°; a partir de A se aplica el radio, como cuerda. (Fig. 19).
Demostrar que la cuerda $\overline{CB}$ es l_{12}.

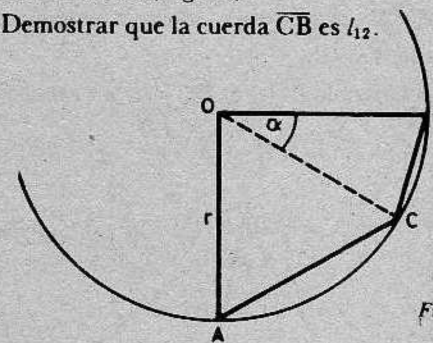


Fig. 19

Solución: Para que $\overline{BC} = l_{12}$ el $\measuredangle\ \alpha$ debe medir:

$$\frac{360}{12} = 30°$$

En efecto:

$$- \begin{cases} \measuredangle AOB = 90° \\ \measuredangle AOC = 60° \end{cases}$$

$\therefore\ \measuredangle\ \alpha = 30°$ luego: $\overline{CB} = l_{12}$

3) A partir de un punto A de una $\odot$ se aplica como cuerda $l_6 = \overline{AB}$ y $l_{10} = \overline{AC}$. Demostrar que la cuerda $\overline{CB}$ es el lado del pentadecágonos regular $= l_{15}$ (Fig. 20).
Para que $\overline{CB} = l_{15}$ debe verificarse que:

$$\alpha = \frac{360}{15} = 24°$$

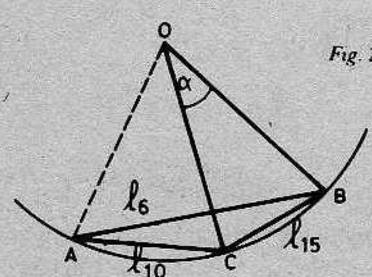


Fig. 20

Dem.: $\overline{AB} = l_6 \ \therefore\ \measuredangle AOB = 60°$

$\overline{AC} = l_{10} \ \therefore\ \measuredangle AOC = 36°$

luego: $\measuredangle$ COB $= 60° - 36° = \alpha = 24°$

y por lo tanto $\overline{BC} = l_{15}$

4) Cálculo de l_{15}: se traza $\overline{BD}$ perpendicular a la prolongación de $\overline{AC} \rightarrow C$ (Fig. 21).

Como $\alpha = 24°$ y el $\triangle$ CBO es isósceles resulta: $\beta = 78°$. Análogamente en el $\triangle$ ACO el $\measuredangle\ \delta = 72°$.

De estos dos valores resulta:

$$\gamma = 180° - (\beta + \delta) = 30°$$

Luego, en el $\triangle$ CDB el $\measuredangle\ \epsilon = 60°$, de donde $\overline{CD}$ es la altura de un $\triangle$ equilátero de lado $\overline{BC} = l_{15}$

Designando $\overline{BD} = a$; $\overline{BC} = l_{15} = x$ resulta

$$h = \frac{x}{2}\sqrt{3}.$$

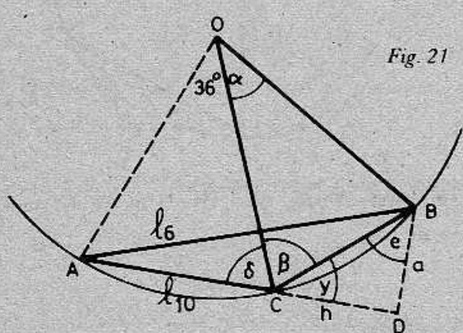


Fig. 21

Aplicando el corolario de Pitágoras al $\triangle$ BCD y al $\triangle$ BAD, se obtiene respectivamente:

$$a^2 = x^2 - h^2$$
$$a^2 = r^2 - (l_{10} + h)^2$$

$$x^2 - h^2 = r^2 - [(l_{10})^2 + 2h \cdot l_{10} + h^2]$$

$$x^2 - h^2 = r^2 - (l_{10})^2 - 2h \cdot l_{10} - h^2$$

$$x^2 = r^2 - (l_{10})^2 - 2h \cdot l_{10}$$

$$\text{pero} \begin{cases} l_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1) \\ h = \frac{x}{2}\sqrt{3} \end{cases}$$

$$x^2 = r^2 - \frac{r^2}{4}(5 - 2\sqrt{5} + 1) -$$
$$- x\sqrt{3} \cdot \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

Al reducir y ordenar esta ecuación se obtiene:

$$x^2 + \frac{r}{2}(\sqrt{15} - \sqrt{3}) \cdot x + \frac{2r^2 - 2r^2\sqrt{5}}{4} = O$$

$$x = -\frac{r}{4}(\sqrt{15} - \sqrt{3}) \pm$$
$$\pm \sqrt{\frac{r^2}{16}(15 - 2\sqrt{45} + 3) - \frac{2r^2 - 2r^2\sqrt{5}}{4}}$$

$$x = -\frac{r}{4}(\sqrt{15} - \sqrt{3}) \pm$$
$$\pm \sqrt{\frac{18r^2 - 6r^2\sqrt{5} - 8r^2 + 8r^2\sqrt{5}}{16}}$$

$$x = -\frac{r}{4}(\sqrt{15} - \sqrt{3}) \pm \sqrt{\frac{10r^2 + 2r^2\sqrt{5}}{16}}$$

$$x = -\frac{r}{4}(\sqrt{15} - \sqrt{3}) \pm \frac{r}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

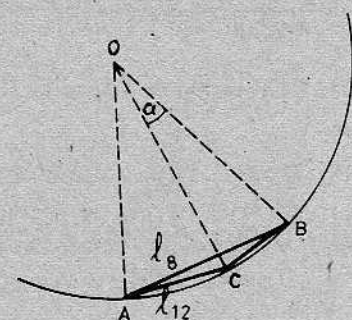
de donde:

$$l_{15} = \frac{r}{4} \cdot (\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + \sqrt{3} - \sqrt{15})$$

Observación: Al mismo resultado se llega al aplicar directamente el Teorema General de Pitágoras al $\triangle$ ACB.

5) A partir del punto A de una ⊙ se aplica $l_8 = \overline{AB}$ y $l_{12} = \overline{AC}$. ¿El lado de qué polígono es $\overline{CB}$? (Fig. 22).

Fig. 22



Si $\overline{AB} = l_8$, el $\measuredangle$ AOB $= \frac{360}{8} = 45°$ y si $\overline{AC} = l_{12}$, el $\measuredangle$ COA $= \frac{360}{12} = 30°$ luego el $\measuredangle$COB $= 45° - 30 = 15°$. Pero: $\frac{360°}{15°} = 24$ veces.

luego $\overline{CB} = l_{24}$.

6) Demostrar que el área del pentágono regular inscrito en una circunferencia de radio r es:

$$s_5 = \frac{5}{8} r^2 \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

377. Calcular el lado L_n del polígono regular circunscrito de n lados conociendo el lado l_n del polígono inscrito del mismo número de lados. Es decir, calcular $L_n = f(l_n, r)$.

Sea $\overline{AB} = l_n$; para dibujar el lado L_n basta con prolongar ρ_n hasta T y en T se traza la tangente, que se limita con $\overline{OA} \rightarrow A$ y $\overline{OB} \rightarrow B$.

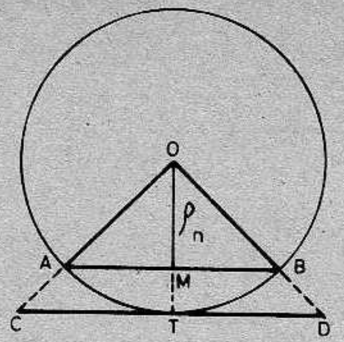


Fig. 23

Resulta: $\overline{CD} = L_n$

Como $\triangle$ ABO $\sim$ $\triangle$ CDO se obtiene:

$\frac{CD}{AB} = \frac{OT}{OM}$; reemplazando por sus valores:

$$\frac{L_n}{l_n} = \frac{r}{\rho_n}$$

$$L_n = \frac{r \cdot l_n}{\rho_n}\text{, pero } \rho_n = \frac{r}{2}\sqrt{4 - (\frac{l_n}{r})^2}$$

(ver N° 362).

$$L_n = \frac{r \cdot l_n}{\frac{r}{2}\sqrt{4 - (\frac{l_n}{r})^2}}$$

$$\therefore \text{ a) } \boxed{L_n = \frac{2 \cdot l_n}{\sqrt{4 - (\frac{l_n}{r})^2}}}$$

Con esta fórmula se puede calcular algebraicamente: L_3, L_4, L_6, L_8, L_{12} ... L_n, conocido $l_3, l_4, l_6, l_8, l_{12}, \ldots l_n$, respectivamente.

378. Calcular $L_4 = f(l_4)$

$$L_4 = \frac{2 \cdot l_4}{\sqrt{4 - (\frac{l_4}{r})^2}} \text{ pero } l_4 = r\sqrt{2}$$

$$L_4 = \frac{2 \cdot r\sqrt{2}}{\sqrt{4 - (\frac{\cancel{r}\sqrt{2}}{\cancel{r}})^2}}$$

$$L_4 = \frac{2r\sqrt{2}}{\sqrt{4 - 2}} \quad \therefore \quad L_4 = 2r.$$

valor que ya habíamos calculado geométricamente, según N° 354.

379. Calcular $L_6 = f(l_6)$

$$L_6 = \frac{2\, l_6}{\sqrt{4 - (\frac{l_6}{r})^2}} \text{ ; pero } l_6 = r$$

$$L_6 = \frac{2r}{\sqrt{4 - (\frac{\cancel{r}}{\cancel{r}})^2}}$$

$$L_6 = \frac{2r}{\sqrt{3}} \text{ ;}$$

se racionaliza el denominador amplificando por $\sqrt{3}$, resultando:

$$L_6 = \frac{2r\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{3} r\sqrt{3} \text{ (ver N° 356)}$$

380. Calcular $L_8 = f(l_8)$

$$L_8 = \frac{2\, l_8}{\sqrt{4 - (\frac{l_8}{r})^2}} \text{ ; pero } l_8 = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$L_8 = \frac{2 \cdot r\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\sqrt{4 - (\frac{\cancel{r}\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\cancel{r}})^2}}$$

$$L_8 = \frac{2r\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\sqrt{4 - (2 - \sqrt{2})}}$$

$$L_8 = \frac{2r\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} \text{ ;}$$

se amplifica por $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ (puede también amplificarse por $\sqrt{2 - \sqrt{2}}$)

$$L_8 = \frac{2r \cdot \sqrt{(2 - \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})}}{(\sqrt{2 + \sqrt{2}})^2}$$

$$L_8 = \frac{2r\sqrt{4 - 2}}{2 + \sqrt{2}}$$

$$L_8 = \frac{2r \cdot \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} \text{ ; se amplifica por } 2 - \sqrt{2}$$

$$L_8 = \frac{2r\sqrt{2}(2 - \sqrt{2})}{4 - 2} = \frac{2r\sqrt{2}(2 - \sqrt{2})}{\cancel{2}} =$$

$$= 2r\sqrt{2} - 2r$$

Finalmente: a) $\boxed{L_8 = 2r \cdot (\sqrt{2} - 1)}$

381. Calcular $L_{12} = f(l_{12})$

$$L_{12} = \frac{2 \cdot l_{12}}{\sqrt{4 - (\frac{l_{12}}{r})^2}} \text{ ; pero } l_{12} = r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

$$L_{12} = \frac{2r\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{4 - \left(\frac{\cancel{r}\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\cancel{r}}\right)^2}}$$

$$L_2 = \frac{2r\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{4 - (2 - \sqrt{3})}}$$

$$L_{12} = \frac{2r\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} \text{ ; se amplifica } \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

$$L_{12} = \frac{2r \cdot (\sqrt{2 - \sqrt{3}})^2}{\sqrt{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}}} = \frac{2r(2 - \sqrt{3})}{\sqrt{4 - 3}}$$

luego: a) $\boxed{L_{12} = 2r \cdot (2 - \sqrt{3})}$

382. Demostrar que: $L_8 = \frac{l_4 \cdot L_4}{l_4 + L_4}$

Solución:

$$L_8 = \frac{r\sqrt{2} \cdot 2r}{r\sqrt{2} + 2r} = \frac{2r^2\sqrt{2}}{r(2 + \sqrt{2})}$$

se amplifica por $(2 - \sqrt{2})$

$$L_8 = \frac{2r\sqrt{2}(2 - \sqrt{2})}{4 - 2} = 2r\sqrt{2} - 2r =$$

$$2r(\sqrt{2} - 1)$$

En general, se verifica que: $L_{2n} = \frac{l_n \cdot L_n}{l_n + L_n}$

383. Calcular $L_6 = f(l_5)$

$$L_6 = \frac{2 \cdot l_6}{\sqrt{4 - (\frac{l_6}{r})^2}} \text{ ;pero } l_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

$$L_6 = \frac{2 \cdot \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{\sqrt{4 - (\frac{r\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{2r})^2}}$$

$$L_6 = \frac{r\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{\sqrt{4 - \frac{10 - 2\sqrt{5}}{4}}}$$

$$L_6 = \frac{r\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{\sqrt{\frac{16 - 10 + 2\sqrt{5}}{4}}} = \frac{r\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{\frac{1}{2}\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}} ;$$

se amplifica por $2\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$

$$L_6 = \frac{2r\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})(6 - 2\sqrt{5})}}{\sqrt{6^2 - (2\sqrt{5})^2}}$$

$$L_6 = \frac{2r\sqrt{80 - 32\sqrt{5}}}{\sqrt{16}}$$

$$L_6 = 2r\sqrt{\frac{80 - 32\sqrt{5}}{16}}$$

$$\therefore \quad L_6 = 2r\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$$

384. Cálculo de $L_{10} = f(l_{10})$

$$L_{10} = \frac{2 \cdot l_{10}}{\sqrt{4 - (\frac{l_{10}}{r})^2}} \quad \text{pero } l_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

$$L_{10} = \frac{2 \cdot \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)}{\sqrt{4 - \left[\frac{\cancel{r}(\sqrt{5} - 1)}{2\cancel{r}}\right]^2}} = \frac{r(\sqrt{5} - 1)}{\sqrt{4 - \frac{6 - 2\sqrt{5}}{4}}} =$$

$$= \frac{r(\sqrt{5} - 1)}{\sqrt{\frac{16 - 6 + 2\sqrt{5}}{4}}}$$

$$L_{10} = \frac{r(\sqrt{5} - 1)}{\frac{1}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \text{ ; se amplifica por}$$

$$2\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

(también puede amplificarse por $2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$)

$$L_{10} = \frac{2r(\sqrt{5} - 1)\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{\sqrt{100 - 20}}$$

se introduce $(\sqrt{5} - 1)$ como factor de la cantidad sub-radical.

$$L_{10} = \frac{2r \cdot \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2 \cdot (10 - 2\sqrt{5})}}{\sqrt{16 \cdot 5}} =$$

$$= \frac{2r\sqrt{(6 - 2\sqrt{5})(10 - 2\sqrt{5})}}{4\sqrt{5}}$$

$$L_{10} = \frac{r\sqrt{60 - 20\sqrt{5} - 12\sqrt{5} + 20}}{2\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{r\sqrt{80 - 32\sqrt{5}}}{2\sqrt{5}}$$

$$L_{10} = \frac{r\sqrt{16(5 - 2\sqrt{5}}}{2\sqrt{5}} \text{ ; se amplifica por } \sqrt{5}$$

$$L_{10} = \frac{4r\sqrt{(5-2\sqrt{5})\cdot 5}}{10} = \frac{2r\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$$

$$L_{10} = \frac{2}{5}\, r\sqrt{25-10\sqrt{5}}$$

385. OBSERVACION

Por Trigonometría resulta fácil calcular el lado de los polígonos aplicando el Teorema del coseno (Teorema General de Pitágoras).

Desarrollaremos algunos ejemplos por este camino.

1) Para el dodecágono se obtiene: (Fig. 24)

$$(l_{12})^2 = r^2 + r^2 - 2r^2 \cdot \cos 30^\circ$$

$$(l_{12})^2 = 2r^2 - 2r^2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

de donde: $l_{12} = r\sqrt{2-\sqrt{3}}$

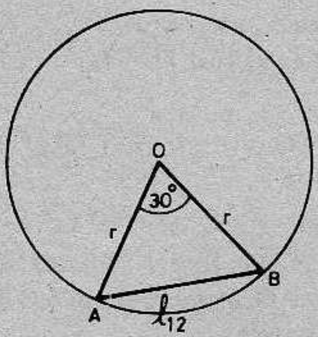


Fig. 24

2) Para el octógono se obtiene:

$$(l_8)^2 = r^2 + r^2 - 2r^2 \cdot \cos 45^\circ$$

$$(l_8)^2 = 2r^2 - 2r^2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

de donde: $l_8 = r\sqrt{2-\sqrt{2}}$

3) Sabiendo que $\cos 15^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$ calcular l_{24}.

4) Sabiendo que $\cos 22^\circ{,}5 = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ calcular l_{16}.

5) Sabiendo que $\cos 18^\circ = 0{,}95$ calcular l_{20}.

386. EJERCICIOS

1) En un cuadrado de lado »a« se trazan arcos de centro en cada vértice y radio »a« (Fig. 1).

Demostrar que: $\overline{EF} = l_{12}$

(Indicación: demostrar que $\measuredangle$ EBF = 30°).

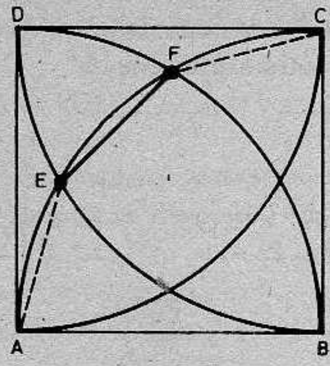


Fig. 1

2) Demostrar que: $(l_5)^2 = (l_6)^2 + (l_{10})^2$

3) Idem.: $(l_3)^2 = (l_6)^2 + (l_4)^2$

4) Idem.: $(l_3)^2 = (L_4)^2 - (l_6)^2$

5) Idem.: $(l_3)^2 = \frac{1}{2} \cdot [(l_4)^2 + (L_4)^2]$

6) Idem.: $\rho_{16} = \frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

7) Idem.: $\rho_{10} = \frac{r}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

8) Idem.: $\rho_5 = \frac{r}{4}(\sqrt{5}+1)$

9) Cálculo del lado l_5^2 del pentágono estrellado (Fig. 2).

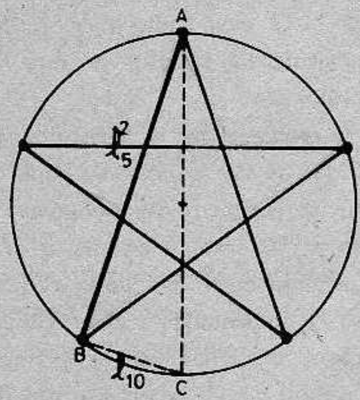


Fig. 2

Sea $\overline{AB} = l_5^2$ y $\overline{BC} = l_{10}$

Aplicando el Corolario del Teorema de Pitágoras al $\triangle$ ABC, se tiene:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2$$

$$\text{pero: } \begin{cases} \overline{AC} = 2r \\ \overline{BC} = \frac{r}{2}\cdot(\sqrt{5}-1) \end{cases}$$

Al sustituir estos valores y efectuar las operaciones correspondientes, se obtiene finalmente:

$$l_5^2 = \frac{r}{2}\cdot\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

Esta expresión da la longitud del lado de la estrella de nuestra bandera que, aproximadamente, puede tomarse el valor 1,9·r.

Cálculo de π. Método de Arquímedes o de los isoperímetros. Rectificación de la circunferencia. Cuadratura del círculo.

387. Ya vimos que el número π es la razón constante que existe entre la longitud de la ⊙ y su diámetro. Es decir:

a) $\boxed{\frac{C}{d} = \pi}$

siendo C el perímetro o longitud de la ⊙ y d el diámetro. Pero d = 2r; por lo tanto: $\frac{C}{2r} = \pi$, de donde se obtiene:

b) $\boxed{C = 2\pi r}$

si se toma por $r = \frac{1}{2}$; (por ej.: $\frac{1}{2}$ cm; $\frac{1}{2}$ m; $\frac{1}{2}$ Km, etcétera), resulta:

c) $\boxed{C = \pi}$

Luego: π equivale numéricamente a la longitud de la ⊙ cuyo radio mide $\frac{1}{2}$. Bastará, entonces, calcular la longitud de esta ⊙ para obtener el valor de π.

Esto se consigue por el *Método de isoperímetros* o *Método de Arquímedes,* que consiste en calcular el perímetro de polígonos regulares inscritos y circunscritos en una ⊙ de $r = \frac{1}{2}$. Al ir duplicando el Nº de lados, el perímetro del inscrito va aumentando y el del circunscrito, disminuyendo, tendiendo ambos perímetros a un límite común que es la ⊙. Los dos coincidirán con la ⊙ cuando el número de lados sea infinitamente grande. De ahí que también se diga que la ⊙ se puede considerar como un polígono regular cuyo número de lados es infinitamente grande.

Ahora, calculemos el perímetro de los polígonos inscritos y circunscritos de 3, 6, 12, 24, etc. lados aprovechando las fórmulas del capítulo anterior, pero siendo $r = \frac{1}{2}$.

1) Sea ABC el △ equilátero inscrito o sea $\overline{AB} = l_3 = r\sqrt{3}$ luego (Fig. 1):

$p_3 = 3 \cdot l_3 = 3r\sqrt{3} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1{,}73205 \ldots$

$\ldots = 2{,}598075 \ldots$ además cuerda $\overline{AB} <$ arco $\widehat{ATB}$ luego: a) $p_3 <$ ⊙ es decir, la longitud C de la ⊙ es mayor que 2,598075.

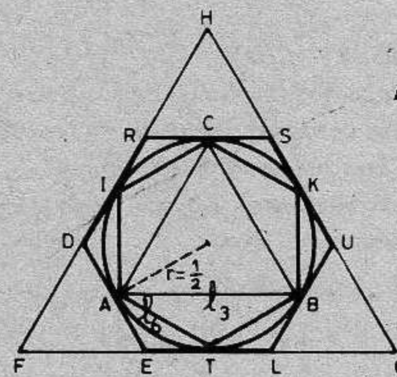


Fig. 1

2) Veamos que sucede con el △ circunscrito FGH en el cual $\overline{FG} = L_3 = 2r\sqrt{3}$; su perímetro es:

$P_3 = 3L_3 = 6r\sqrt{3} = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1{,}73205 \ldots$

$\ldots = 5.19615$

Por otra parte: $\overline{IF} + \overline{FT} = L_3$

$\overline{IF} + \overline{FT} >$ arco $\widehat{IAT}$

luego: b) $P_3 >$ ⊙ o sea, la longitud C de la ⊙ es menor que 5.196 15.

De a) y b) podemos decir que:

$2{,}598075 < \pi < 5{,}191615$. Un valor más aproximado sería el promedio de $p_3 + P_3$

o sea: $\frac{p_3 + P_3}{2} = \frac{2{,}598075 + 5{,}196\,15}{2} = 3{,}8971125$

3) Pasemos al hexágono inscrito ATBKCI en el cual $\overline{AT} = l_6 = r$

$P_6 = 6 \cdot l_6 = 6r = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$

pero la cuerda $\overline{AT} + \overline{TB} > \overline{AB}$. Luego $P_6 > P_3$ o sea el perímetro del polígono inscrito aumenta al aumentar el número de lados.

Además, cuerda $\overline{AT} <$ arco $\widehat{AT}$, o sea: $p_6 <$ ⊙, lo que indica que a pesar de haber aumentado el perímetro p_6 con relación a p_3, sigue siendo menor que la longitud de la ⊙, es decir:

c) $\pi > 3$

4) Pasemos al hexágono circunscrito DELUSR en el cual $DE = L_6 = \frac{2}{3} r\sqrt{3}$

$P_6 = 6L_6 = 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1{,}73205\ldots = 3{,}46410\ldots;$

este valor indica que el perímetro disminuyó de valor al duplicarse el número de lados.

Es decir $P_6 < P_3$

Además, $\overline{ID} + \overline{DE} + \overline{ET} >$ arco IAT, luego: $P_6 > \odot$.

Este resultado indica que a pesar de haber disminuido el perímetro del polígono circunscrito sigue siendo mayor que la $\odot$.

Es decir: d) $C < 3{,}46410\ldots\ldots$

De donde: $3 < \pi < 3{,}46410\ldots\ldots$

El promedio de $p_6 + P_6$ es $\frac{6{,}46410}{2} =$

$= 3{,}23205\ldots\ldots$

5) Si volvemos a duplicar el número de lados obtendremos el dodecágono y se verifica nuevamente que el perímetro del inscrito vuelve a aumentar y el del circunscrito a disminuir con relación al anterior.

Haciendo los cálculos resulta:

$$p_{12} = 12l_{12} = 12 \cdot r\sqrt{2 - \sqrt{3}} =$$
$$= 6 \cdot 0{,}51763809$$
$$= 6\sqrt{2 - 1{,}732050807568\ldots} =$$
$$= 3{,}10582854.$$

$$P_{12} = 12 \cdot L_{12} = 12 \cdot 2r \cdot (2 - \sqrt{3}) =$$
$$= 12 \cdot (2 - 1{,}732050807568\ldots) =$$
$$= 3{,}2153903088$$

pero: $p_{12} < C < P_{12}$, o sea $3{,}105 < \pi < 3{,}215$

El promedio $\frac{p_{12} + P_{12}}{2}$ (=) 3,16

Si se sigue duplicando cada vez se observa que el perímetro del polígono inscrito tiende a coincidir con el del circunscrito y por lo tanto con la circunferencia.

n	p_n	P_n	$\frac{p_n + P_n}{2}$
3	2,598075	5,19615	3,8971725
6	3,000000	3,46410	3,23205
12	3,105828	3,215390	3,160609
24	3,132629	3,159660	3,146145
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
1536	3,1415905	3,1415971	3,1415938

Según el cuadro adjunto para el polígono de 1536 lados resulta $p_n = 3{,}14159\ldots$ y $P_n = 3{,}14159\ldots$ diferenciándose sólo en los millonésimos. De aquí que el valor de π con 5 decimales correctos es $\pi = 3{,}14159$. En la práctica se toman los valores siguientes aproximados:

$$\boxed{\pi = 3{,}1416 = \frac{22}{7}}$$

Por este método Arquímedes obtuvo para π el valor $\frac{22}{7}$.

Como dato curioso anotaremos el siguiente verso en el cual cada palabra indica por su número de letras las cifras de π.

Que j'aime a faire apprendre
un nombre util aux sages
inmortal Archimede, antique ingenieur
on nous a fait connaître le valeur.

Lo que da $\pi = 3{,}14159264358979241482 6\ldots$

El valor de π se calcula por otros métodos, como desarrollos en serie, obteniéndose muchas cifras decimales. Schanks calculó π con 707 decimales correctos.

388. RECTIFICACION DE LA CIRCUNFERENCIA Y CUADRATURA DEL CIRCULO

Son varios los problemas que han preocupado a los matemáticos desde la antigüedad. Los griegos trataron de resolver geométricamente (con regla y compás) varios problemas logrando éxito en muchos de ellos como: la duplicación de un cuadrado dado (el cuadrado construido sobre su diagonal es el doble del cuadrado dado); el problema de tangencia de Apolonio, la cuadratura de las llamadas lúnulas de Hipócrates, el problema de la sección de Apolonio, etc., pero no pudieron resolver otros problemas que hasta hoy siguen sin solución *exacta* sino sólo aproximada. Por ejemplo: a) rectificación de la circunferencia; b) cuadratura del círculo; c) duplicación del cubo; d) trisección del ángulo (conocemos la solución para la trisección del ángulo recto); etcétera.

Veamos en qué consisten los dos primeros problemas y sus soluciones *aproximadas*.

389. RECTIFICACION DE LA CIRCUNFERENCIA

Consiste en encontrar un trazo cuya longitud sea *exactamente* igual que la longitud de la circunferencia.

En el año 1900 el chileno Wicke (de Rengo) dió a conocer una solución bastante sencilla y satisfactoria para este problema: Demostró que 3/5 del perímetro del △ rectángulo que tiene por catetos el radio y el diámetro de la ⊙ era casi igual a la longitud de la semicircunferencia. Es decir:

$$\frac{3}{5} p = \pi r.$$

En efecto, sea ABC el △ rectángulo cuyos catetos son AB = r y AC = 2r; calculemos su hipotenusa $\overline{BC}$ aplicando el teorema de Pitágoras (Fig. 2).

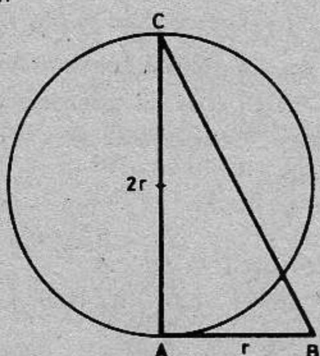


Fig. 2

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$$

$$\overline{BC}^2 = r^2 + (2r)^2 = 5r^2 \text{ luego: } \overline{BC} = r\sqrt{5}$$

El perímetro p de este △ es (Fig. 2):

$$p = 2r + r + r\sqrt{5}$$

$$p = 3r + r\sqrt{5}$$

$$p = r(3 + \sqrt{5})$$

$$p = r(3 + 2{,}23607) = 5{,}23607 \cdot r$$

$$\frac{1}{5} p = 1.04721 \cdot r$$

$$\frac{3}{5} p = 3{,}14163 \cdot r$$

$$\therefore p\,(=)\,\pi \cdot r$$

El error absoluto es: 3.14163 − 3,14159 = = 0,00004 y el error relativo es:

$$\frac{0{,}00004}{3{,}14159} = 0{,}000012 = 0{,}0012\%$$

que es bastante satisfactorio.

Geométricamente la longitud del trazo equivalente a la semicircunferencia se determina sumando los 3 lados del △ ABC para obtener p = $\overline{DE}$; los 3/5 de $\overline{DE} = \overline{DF}$ equivale a la longitud de la mitad de la circunferencia (Fig. 3).

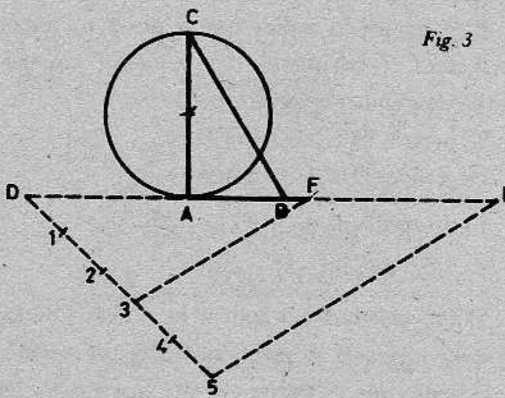


Fig. 3

$$\overline{AB} = r$$

$$\overline{AD} = \overline{AC} = 2r$$

$$\overline{BC} = \overline{BE} = r\sqrt{5}$$

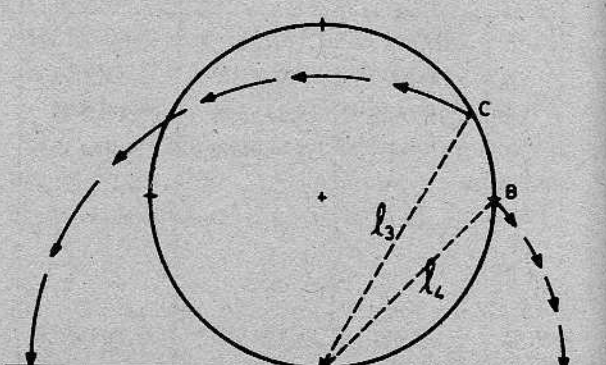
$$\therefore p = \overline{DE}$$

$$\overline{DF} = \frac{3}{5} p\,(=)\,\pi r \text{ (media ⊙)}$$

390. A continuación daré una solución muy sencilla y con una aproximación bastante aceptable (0,15%) para construcciones prácticas.

Sabemos que en una circunferencia de radio »r« el lado del cuadrado inscrito en ella es $l_4 = r\sqrt{2}$ y el lado del triángulo equilátero inscrito es $l_3 = r \cdot \sqrt{3}$ (Fig. 4).

Fig. 4



Demostraré que $l_4 + l_3$ equivale muy aproximadamente a la semicircunferencia de radio »r«.

En efecto:

$$\left.\begin{array}{l} l_4 = r \cdot \sqrt{2} = 1{,}4142 \cdot r \\ l_3 = r \cdot \sqrt{3} = 1{,}7320 \cdot r \end{array}\right\} +$$

$$l_4 + l_3 = 3{,}1462 \cdot r \,(=)\, \pi \cdot r$$

El error absoluto es $0{,}0046 \cdot r$ y el % de error relativo es $\frac{0{,}0046 \cdot r}{3{,}1416 \cdot r} = 0{,}15\%$ que es bastante aceptable para una solución tan simple.

Para la construcción seguiremos este orden:

1°) se dibuja la circunferencia de radio »r« (Fig. 4);

2°) se marcan los extremos de dos diámetros perpendiculares determinándose $l_4 = \overline{AB}$;

3°) se aplica el radio dos veces como cuerda a partir de A determinándose $\overline{AC} = l_3$;

4°) se traza la tangente en A y se copia $\overline{AD} = \overline{AC} = l_3$ y $\overline{AE} = \overline{AB} = l_4$.

La suma de ellos da: $\overline{DE} \,(=)\, \frac{1}{2} \odot$.

(Esta solución es útil en la construcción de modelos en cartulina de cuerpos cónicos o cilíndricos como se verá más adelante N° 451).

391 CUADRATURA DEL CIRCULO

Ya hemos dicho que este problema consiste en determinar el lado de un cuadrado cuya área sea exactamente igual al área de un círculo.

Designando por »x« el lado del cuadrado y por »r« el radio del círculo, debe verificarse que (Fig. 5):

$$x^2 = \pi r^2$$

También, por ser π un número inconmensurable, existen sólo soluciones aproximadas. Una de ellas es la siguiente:

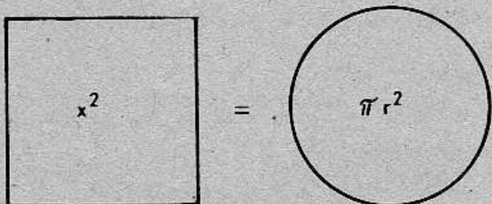


Fig. 5

La ecuación anterior puede escribirse en forma de proporción:

$$\frac{r}{x} = \frac{x}{\pi r}$$

Es decir, el lado $\underline{x}$ del cuadrado pedido es $\frac{1}{2}$ p. geométrica entre el radio $\underline{r}$ y una longitud igual a la semicircunferencia. Pero, según Wicke, π r es igual a $\frac{3}{5}$ del perímetro $\underline{p}$ del $\triangle$ rectángulo de catetos r y 2r.

Luego, el problema se reduce a construir la $\frac{1}{2}$ p. geo. entre $\frac{3}{5}$ p y r. para lo cual aprovechamos el primer Teorema de Euclides.

Se hace $\overline{DF} = \frac{3}{5}$ p; se dibuja la circunferencia de diámetro DF y se traza la $\perp$ en H siendo DH = r. El trazo DI es el lado del cuadrado cuya área es aproximadamente igual a la del círculo de radio r (Fig. 6).

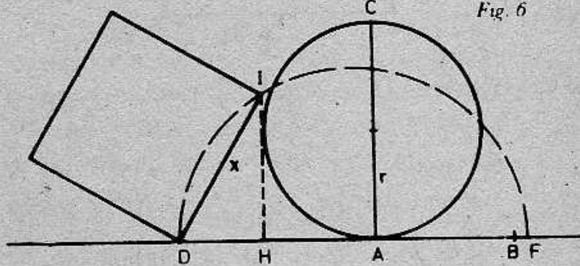


Fig. 6

Otra solución mucho menos exacta se obtiene al considerar $\sqrt{\pi}$ casi igual a $\sqrt{3}$. En efecto: si $x^2 = \pi r^2$ el valor del lado $\underline{x}$ del cuadrado es (Fig. 7):

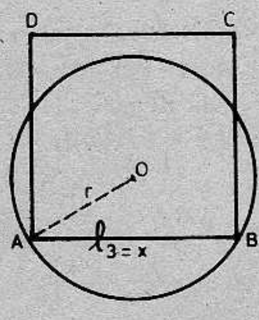


Fig. 7

$$x = r\sqrt{\pi} \,(=)\, r\sqrt{3};$$

o sea que el lado del cuadrado sería l_3.

Siendo $\overline{AB} = l_3 = r\sqrt{3}$ el cuadrado ABCD tiene un área muy próxima a la del círculo de radio $\underline{r}$.

392. EJERCICIOS RESUELTOS

1) En un $\triangle$ isósceles en el cual el $\measuredangle$ del vértice es la mitad del $\measuredangle$ basal, la bisectriz de

un $\sphericalangle$ basal divide al lado opuesto en sección áurea.

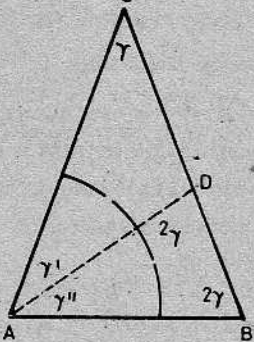
H) $\overline{CA} = \overline{CB}$: (Fig. 1):

$\sphericalangle CAB = \sphericalangle ABC = 2\gamma$

$\overline{AD} = b_\alpha$

T) $\frac{CB}{CD} = \frac{CD}{BD}$

Fig. 1



D) $\overline{AD} = \overline{DC}$ porque $\triangle$ ADC es isósceles ($\gamma = \gamma'$) por tanto $\sphericalangle$ ABD también es isósceles ($\sphericalangle$ ADB $= 2\gamma$ por ser $\sphericalangle$ exterior vértice del $\triangle$ CAD); luego $\overline{AB} = \overline{AD} = \overline{CD}$.

Por el Teorema del ⊙ de Apolonio se tiene que (ver N° 297):

$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$ pero $\overline{AB} = \overline{CD}$ y $\overline{AC} = \overline{CB}$

luego: $\frac{DB}{DC} = \frac{DC}{CB}$

2) En una ⊙ de radio r se trazan dos diámetros $\overline{AB} \perp \overline{CD}$; se hace $\overline{DE} = \overline{AF} = r$.
Demostrar que $\overline{EF} = r\sqrt{2}$

H) $\overline{DE} = \overline{AF} = r$ (Fig. 2):

T) $\overline{EF} = r\sqrt{2}$

D) Si $\overline{ED} = r$, el $\sphericalangle$ DOE $= 60°$

$\sphericalangle$ AOE $= 30°$

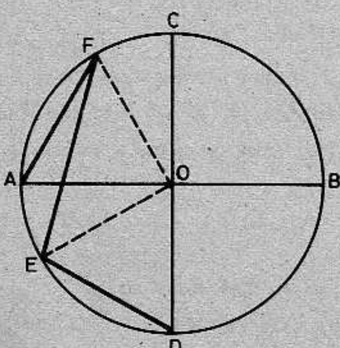


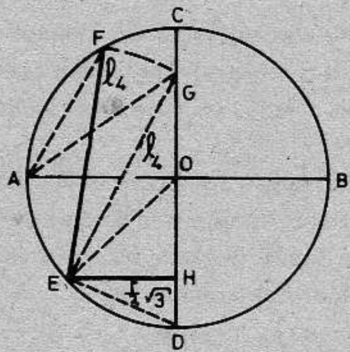
Fig. 2

y como $\overline{AF} = r$, el $\sphericalangle$ FOA $= 60°$ luego, el $\sphericalangle$ EOF $= 30° + 60° = 90°$ y por lo tanto $EF = l_4$ pero $l_4 = r\sqrt{2}$ con lo que queda demostrada la tesis: $\overline{EF} = r\sqrt{2}$.

3) En una ⊙ de radio r se trazan dos diámetros $\overline{AB} \perp \overline{CD}$; se hace $\overline{DE} = \overline{AF} = r$ y se une $\overline{EF}$. Se dibuja arco de centro E y radio $\overline{EF}$ hasta cortar al diámetro $\overline{CD}$ en G.
Demostrar que (Fig. 3):

$\overline{OG} = l_{10}$ y $\overline{AG} = l_5$

Fig. 3



Solución: Por el ejercicio anterior sabemos que $\overline{EF} = l_4 = r\sqrt{2}$ y en consecuencia $\overline{EG} = r\sqrt{2}$.

Trazando la altura $\overline{EH}$ del $\triangle$ equilátero DOE, tenemos que

$\overline{EH} = \frac{r}{2}\sqrt{3}$

Aplicando el Teorema de Pitágoras al $\triangle$ EHG se calcula $\overline{HG}$:

$\overline{HG}^2 = (r\sqrt{2})^2 - (\frac{r}{2}\sqrt{3})^2$

$\overline{HG} = \sqrt{2r^2 - \frac{3r^2}{4}} = \sqrt{\frac{8r^2 - 3r^2}{4}}$

o sea

$\overline{HG} = \frac{r}{2}\sqrt{5}$

Además, como $\overline{OH} = \frac{r}{2}$ resulta

$\overline{OG} = \frac{r}{2}\sqrt{5} - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1) = l_{10}$;

$\overline{AG} = l_5$

porque es hipotenusa de un $\triangle$ rectángulo de catetos:

$\overline{AO} = l_6$ y $\overline{OG} = l_{10}$ (ver N° 375).

4) A partir de un punto A de una ⊙ de radio r se aplican como cuerda $l_6 = \overline{AB}$; después a continuación $l_4 = \overline{BC}$ y finalmente $l_{12} = \overline{CD}$ (Fig. 4).

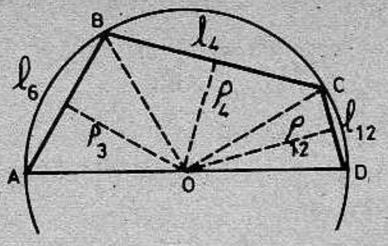


Fig. 4

Calcular el área del cuadrilátero que se obtiene al unir A con D.

Solución:

$$+\left|\begin{array}{l}\measuredangle\ \text{AOB} = 60^\circ\\ \measuredangle\ \text{BOC} = 90^\circ\\ \measuredangle\ \text{COD} = 30^\circ\end{array}\right.$$
$$\measuredangle\ \text{AOD} = 180^\circ,$$

por lo tanto $\overline{AD}$ es diámetro.

Como $l_6 = r$; $l_4 = r\sqrt{2}$ y $l_{12} = r\sqrt{2-\sqrt{3}}$ basta calcular las apotemas correspondientes aplicando la fórmula N° 362 se obtiene:

$$\rho_6 = \frac{r}{2}\sqrt{3};\ \rho_4 = \frac{r}{2}\sqrt{2};\ \rho_{12} = \frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

Se calculan las áreas de los $\triangle$ ABO, $\triangle$ BCO y $\triangle$ CDO.

$$\triangle\ \text{ABO} = \frac{l_6 \cdot \rho_6}{2} = \frac{r \cdot \frac{r}{2}\sqrt{3}}{2} = \frac{r^2}{4}\sqrt{3}$$

$$\triangle\ \text{BCO} = \frac{l_4 \cdot \rho_4}{2} = \frac{r\sqrt{2}\cdot\frac{r}{2}\sqrt{2}}{2} = \frac{r^2}{2}$$

$$\triangle\ \text{CDO} = \frac{l_{12}\cdot\rho_{12}}{2} = \frac{r\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{r^2}{4}$$

luego, el área

$$\text{ADCB} = \frac{r^2}{4}\sqrt{3} + \frac{r^2}{2} + \frac{r^2}{4} = \frac{r^2}{4}(\sqrt{3}+3)$$

5) Calcular l_n en función L_n y r.
Basta despejar l_n en la fórmula:

$$L_n = \frac{2\,l_n}{\sqrt{4-(\frac{l_n}{r})^2}}$$

$$L_n \cdot \sqrt{4-(\frac{l_n}{r})^2} = 2\cdot l_n;$$

ambos miembros al cuadrado

$$(L_n)^2\,(4-(\frac{l_n}{r^2})^2) = 4\cdot(l_n)^2$$

$$4\cdot(L_n)^2 - \frac{(L_n)^2\cdot(l_n)^2}{r^2} = 4\cdot(l_n)^2$$

$$4\cdot(L_n)^2 = 4\cdot(l_n)^2 + \frac{(L_n)^2\cdot(l_n)^2}{r^2}$$

$$4\cdot(L_n)^2 = (l_n)^2\cdot\left(4+\frac{(L_n)^2}{r^2}\right)$$

$$(l_n)^2 = \frac{4\cdot(L_n)^2}{4+(\frac{L_n}{r})^2}$$

$$\therefore\ \text{a)}\ l_n = \frac{2\cdot L_n}{\sqrt{4+(\frac{L_n}{r})^2}}$$

6) Calcular $l_3 = f(L_3)$ siendo $L_3 = 2r\sqrt{3}$
La fórmula anterior expresa que:

$$l_3 = \frac{2\cdot L_3}{\sqrt{4+(\frac{L_3}{r})^2}},\ \text{pero}\ L_3 = 2r\sqrt{3}$$

$$l_3 = \frac{4r\sqrt{3}}{\sqrt{4+\left(\frac{2\cancel{r}\sqrt{3}}{\cancel{r}}\right)^2}}$$

$$l_3 = \frac{4r\sqrt{3}}{\sqrt{4+12}} = \frac{\cancel{4}r\sqrt{3}}{\cancel{4}}$$

luego:

$$l_3 = r\sqrt{3}$$

7) Dado el lado »a« de un octágono regular, se pide construirlo.

Basta trazar en A y B un $\measuredangle$ de $67^\circ\frac{1}{2}$ para determinar O. Se traza $\odot$ (O, OA) y se aplica a = AB como cuerda en esta $\odot$ (Fig. 5).

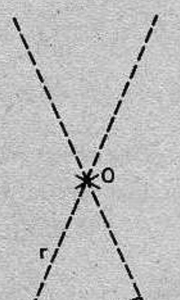


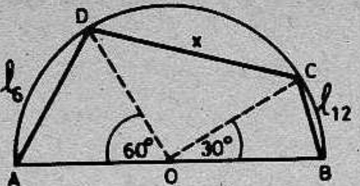
Fig. 5

Otra solución puede obtenerse por homotecia.

8) En una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$ se aplica desde A una cuerda $\overline{AD} = l_6$ y desde B una $\overline{BC} = l_{12}$. Demostrar que al unir C con D resulta $\overline{CD} = l_4$ (Fig. 6).

Solución: Para que $\overline{CD}$ sea l_4 el $\measuredangle$ del centro COD debe valer 90°. En efecto:

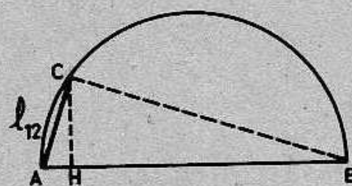
Fig. 6



$\measuredangle$ AOD = 60° y
$\measuredangle$ BOC = 30°. Luego:
$\measuredangle$ COD = 90° y por lo tanto CD = l_4.

9) En una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$ se aplica desde A una cuerda $\overline{AC} = l_{12}$. Demostrar que la proyección de $\overline{AC}$ sobre el diámetro es igual a la cuarta parte del lado del dodecágono circunscrito a la misma circunferencia (Fig. 7).

Fig. 7



Solución: Sea $\overline{AC} = l_{12}$ y $\overline{AH} = x$ según el 1er Teorema de Euclides resulta:

$\overline{AC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AH}$

$(l_{12})^2 = 2r \cdot x$ de donde

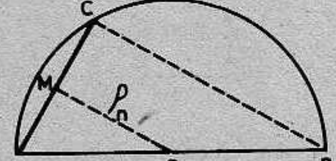
$x = \frac{l_{12}}{2r}$, pero $l_{12} = r\sqrt{2-\sqrt{3}}$

$x = \frac{r^2(2-\sqrt{3})}{2r} = \frac{r}{2}(2-\sqrt{3}) = \frac{r}{4}L_{12}$

pues $L_{12} = 2r \cdot (2-\sqrt{3})$

10) En una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$ se aplica una cuerda $\overline{AC} = l_n$. Demostrar que $BC = 2 \cdot \rho_n$ (Fig. 8).

Fig. 8



H) $\overline{AC} = l_n$, $\overline{OM} = \rho_n$

T) $\overline{BC} = 2 \cdot \rho_n$

D) $\triangle$ ABC $\sim$ $\triangle$ AOM

$\therefore \frac{AB}{AO} = \frac{BC}{OM}$

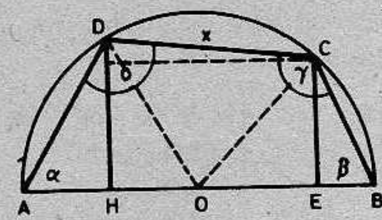
$\frac{2r}{r} = \frac{BC}{\rho_n} \therefore \overline{BC} = 2 \cdot \rho_n$

(o bien: $\overline{OM}$ = mediana del $\triangle$ ABC).

11) En una semi $\odot$ de diámetro AB se aplica como cuerda $\overline{AD} = l_6$ y $\overline{BC} = l_8$.

Calcular el perímetro y el valor de cada ángulo del trapezoide ABCD. Además su área (Fig. 9):

Fig. 9



Solución:

a) $\triangle$ AOD es equilátero

$\therefore \alpha = 60°$ y $DH = \frac{r}{2}\sqrt{3}$

b) $\overline{CB} = l_8 \therefore \measuredangle COB = 45°$ y

$\beta = \frac{180-45}{2} = 67° \frac{1}{2}$

c) $\measuredangle DOC = 180° - 60 - 45 = 75°$ luego:

$\measuredangle CDO = \measuredangle DCO = \frac{180-75}{2} = 52° \frac{1}{2}$

por lo tanto:

$\gamma = 67° \frac{1}{2} + 52° \frac{1}{2} = 120 = \measuredangle BDC$

$\delta = 60 + 52° \frac{1}{2} = 112° \frac{1}{2} = \measuredangle ADC$

$\therefore \alpha + \beta + \gamma + \delta = 60 + 67° \frac{1}{2} + 120° + 112° \frac{1}{2} = 360°$

d) como $\overline{BC} = l_8$ resulta $\overline{CE} = \frac{1}{2} l_4 = \frac{r}{2}\sqrt{2}$

y $\overline{OE} = \rho_4 = \frac{r}{2}\sqrt{2}$ luego $\overline{HE} = \overline{HO} + \overline{OE} =$

$= \frac{r}{2} + \frac{r}{2}\sqrt{2} = \frac{r}{2}(1+\sqrt{2}) = \overline{CI}$.

Aplicando el Teorema de Pitágoras al $\triangle$ ICD, resulta:

$\overline{CD}^2 = \overline{CI}^2 + \overline{DI}^2$

$x^2 = \left[\frac{r}{2}(1+\sqrt{2})\right]^2 + \left[\frac{r}{2}\sqrt{3} - \frac{r}{2}\sqrt{2}\right]^2$

$x^2 = \frac{r^2}{4} \cdot (3 + 2\sqrt{2} + 5 - 2\sqrt{6}) =$

$x^2 = \frac{r^2}{4} \cdot (8 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{6})$

$$\therefore x = \frac{r}{2}\sqrt{8 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{6}} =$$

$$= \frac{r}{2}\sqrt{4(2 + \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{6})} =$$

$$= r\sqrt{2 + \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{6}}$$

Perímetro del trapezoide ABCD es:

$$p = 2r + r\sqrt{2 - \sqrt{2}} +$$

$$+ r\sqrt{2 + \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{6}} + r$$

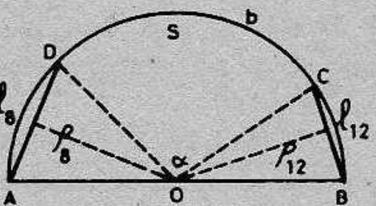
$$p = r \cdot (3 + \sqrt{2 - \sqrt{2}} +$$

$$+ \sqrt{2 + \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{6}})$$

área = $\triangle$ AHD + trapecio DHFC + + $\triangle$ CEB = etc. . . .

12) En una semicircunferencia de diámetro AB = 2r se hace $\overline{AD} = l_8$ y $\overline{BC} = l_{12}$. Calcular el perímetro y el área de la figura limitada por el diámetro $\overline{AB}$, las cuerdas $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ y el arco $\widehat{CD}$ (Fig. 10).

Fig. 10



Solución:

$$\text{arco } \widehat{AD} = \frac{2\pi r}{8} = \frac{\pi}{4} r$$

$$\text{arco } \widehat{BC} = \frac{2\pi r}{12} = \frac{\pi}{6} r$$

$$\text{arco } \widehat{DC} = b = \pi r - \frac{\pi}{4} r - \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{12} r$$

(También se puede calcular al arco $\underline{b}$ por la fórmula N° 347).

$$\frac{b}{2\pi r} = \frac{\alpha}{360} \text{ pero } \alpha = 105°$$

$$b = \frac{105° \cdot 2\pi r}{360} = \frac{7}{12}\pi r$$

Luego: perímetro ABCD es:

$$p = 2r + r\sqrt{2 - \sqrt{3}} + \frac{7}{12}\pi r + r\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$p = r(2\,\frac{7}{12} + \pi + \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{2})$$

El área ABCD = $\triangle$ DAO + sector DOC + $\triangle$ BCO

$$\text{área } \triangle \text{ DAO} = \frac{l_8 \cdot \rho_8}{2} = \frac{r\sqrt{2 - \sqrt{2}} \cdot \frac{r}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} =$$

$$= \frac{r^2}{4}\sqrt{2}$$

$$\text{área sector s} = \frac{b \cdot r}{2} = \frac{7}{24}\pi r^2$$

$$\text{área } \triangle \text{ BCO} = \frac{l_{12} \cdot \rho_{12}}{2} = \frac{r\sqrt{2 - \sqrt{3}} \cdot \frac{r}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} = \frac{r^2}{4}$$

$$\text{área total} = \frac{r^2}{4}\sqrt{2} + \frac{7}{24}\pi r^2 + \frac{r^2}{4} =$$

$$= \frac{r^2}{4}(\sqrt{2} + \frac{7}{6}\pi + 1)$$

35ª UNIDAD

Aplicación del Algebra a la Geometría. Construcciones fundamentales. Expresiones homogéneas y heterogéneas. Duplicación del cubo.

393. Ahora resolveremos los problemas de geometría con la ayuda del álgebra. De esta manera las letras minúsculas servirán para indicar longitudes de trazos. Por ejemplo: a, b, c, d, etc., serán trazos de longitud conocida; t, u, v, x, y, z representarán trazos por determinar.

Veremos lo que se entiende por grado de un término, por grado de una expresión algebraica y por expresión algebraica homogénea.

394. El *grado de un término* es igual a la suma algebraica de los *exponentes* de las letras que intervienen como factores del término.

Ejemplos:

$5ab$ es un término de 2° grado ($a^1 \cdot b^1$ da $1+1=2$)

$8x$ es un término de 1ᵉʳ grado (x^1 da 1)

$\frac{5}{8}x^2y^3z$ es un término de 6° grado ($2+3+1=6$)

$-17a^4b$ es un término de 5° grado ($4+1=5$)

$\frac{18abc^2}{d}$ es un término de 3ᵉʳ grado ($1+1+2-1=3$)

$-9ab^{-n}$ es un término de $(1-n)$ grado

$\frac{12}{17}$ es un término de 0° grado

$5\sqrt{a}$ es un término de $\frac{1}{2}$ grado (porque $\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$)

$7\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{b}$ es un término de $\frac{5}{6}$ grado (porque $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$)

$\frac{4\sqrt[5]{a}\cdot\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt{c}}$ es un término de $\frac{11}{30}$ grado

(porque $\frac{1}{5}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{11}{30}$)

395. EXPRESIONES ALGEBRAICAS HETEROGENEAS Y HOMOGENEAS

La expresión 1) $8a^2x^6-7a^3bx+9bx^3$, es de 5° grado con respecto a x; de tercer grado respecto a a y de 1ᵉʳ grado respecto a b. Además, el término $8a^2x^6$ es de 7° grado, el $-7a^3bx$ es de 5° grados y el $9bx^3$ es de cuarto grado. Por lo tanto la expresión 1) es *heterogénea*.

$$3a^6-7a^5b+9a^4b^2-6a^3b^3+5a^2b^4+8ab^5-b^6$$

es una *expresión homogénea* porque todos sus términos son del mismo grado.

Son también homogéneas las siguientes:

$$a^2+2ab+b^2$$

$$ab-ac+bc$$

$$x^2y+xy^2+az^2+a^2z$$

$$\frac{a+b+c}{m+m+d}+\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$$

Una expresión en que figuran sólo términos de 1ᵉʳ grado representa un trazo. Por ejemplo:

$$x=a+b-3c$$

$$y=\frac{3}{4}a+\frac{2}{7}b-0{,}05c$$

Una expresión fraccionaria representa un trazo cuando el grado del numerador es mayor en una unidad al grado del denominador. Por ejemplo:

$$x=\frac{a^2}{b};\ y=\frac{a^2-3b^2+5cd}{m+n};\ z=\frac{c^2-d^2}{a}+\frac{uv}{b}$$

Las expresiones $x=\sqrt{ab}$; $y=\sqrt{a^2-b^2}$; $z=\sqrt{a^2-bc+c^2}$ son expresiones homogéneas, irracionales y enteras de primer grado. Por lo tanto x, y, z son trazos.

Análogamente en las expresiones fraccionarias siguientes:

$$x=\sqrt{\frac{a^3+b^3}{a+b}};\quad y=\sqrt{\frac{c^6}{a^3}-2ab+\frac{d^3}{m}}$$

Ninguna expresión heterogénea puede representar un trazo, como tampoco una superficie ni volumen. Ejemplo: $x=ab^2-mn+c$.

Si se trata de un área la expresión tiene que ser homogénea de segundo grado. Ejemplos:

$$x^2=ab-c^2+\frac{ab^3}{d^2}$$

$$xy=\sqrt{a^4+b^4}$$

Análogamente, si se trata de volúmenes debe ser homogénea de tercer grado.

Geométricamente, es decir, con regla y compás sólo se pueden construir expresiones algebraicas homogéneas de 1er grado o que contengan irracionalidades reducibles a otras cuyo índice sea 2. Por ejemplo:

$$x = \sqrt[4]{a^4 + b^4} = \sqrt{\sqrt{a^4 + b^4}},$$

por lo tanto puede construirse.

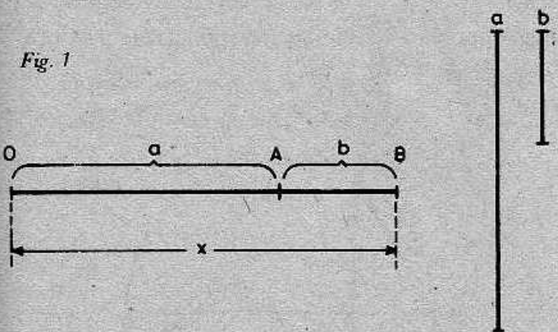
$$y = \sqrt[3]{a^3 + b^3}$$

no puede construirse geométricamente.

396. CONSTRUCCIONES FUNDAMENTALES DE EXPRESIONES DE PRIMER GRADO

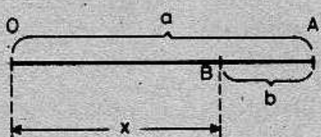
A) Construir $x = a + b$.

Fig. 1



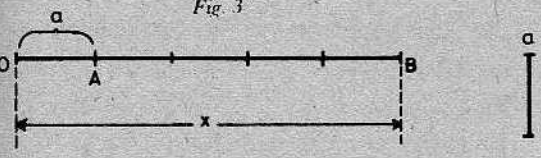
B) Construir $x = a - b$ (debe ser $a > b$ porque geométricamente no existen trazos negativos) (Fig. 2).

Fig. 2



C) Construir $x = n \cdot a$ (siendo $n = N^o$ entero positivo) por ejemplo $x = 5a$ (Fig. 3).

Fig. 3



D) Construir $x = \frac{a}{n}$. Si $n = 2$, basta trazar la simetral de $\underline{a}$. Pero si $n = 3$ la construcción es diferente:

Se forma en A un ∡ cualquiera y se aplica sobre su lado libre 3 veces un mismo trazo $AM = MN = NP$; se unen los extremos B y P trazando por M y N las paralelas a BP. Resulta (Fig. 4).

$$x = \overline{AC} = \frac{a}{3}$$

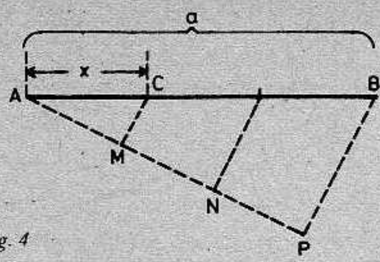


Fig. 4

E) Construir $x = \frac{3a}{5}$; esta expresión se puede escribir $x = \frac{3}{5}a$.

Sobre el lado libre dibujado en A se aplica un trazo 5 veces; se une P con B y por el punto 3 se traza la // a $\overline{PB}$ (Fig. 5).

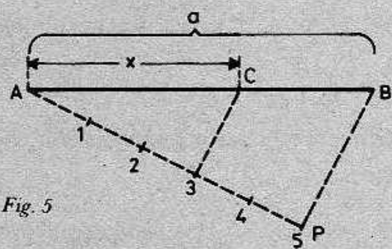


Fig. 5

Resulta: $x = \overline{AC} = \frac{3}{5}a$

F) Construir $x = \frac{ab}{c}$; se puede escribir en forma de proporción:

$\frac{c}{a} = \frac{b}{x}$ es decir, $x = 4^a$, proporcional geométrica.

Se dibuja un ∡ cualquiera y sobre sus lados se aplican los trazos dados de acuerdo con la proporción. Por ejemplo: $OC = c$; $OA = a$; $CB = b$; después se une A con C y por B se traza la // AC; resulta $AD = x$. (Fig. 6).

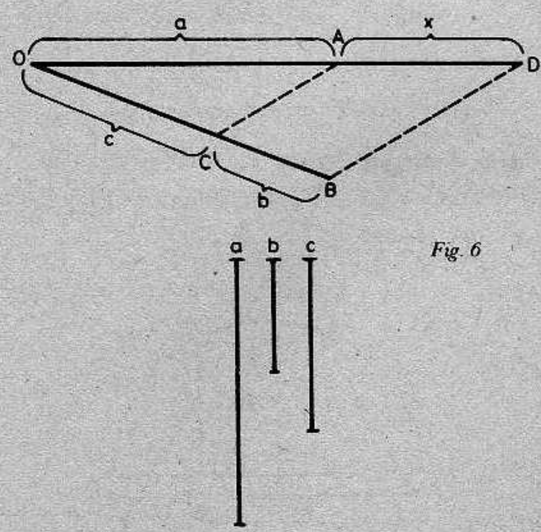


Fig. 6

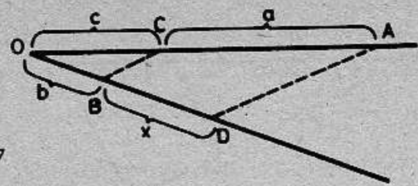


Fig. 7

En Fig. 7: otra construcción.

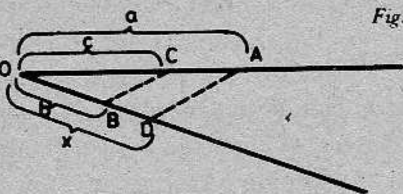


Fig. 8

En Fig. 8: otra construcción para ahorrar espacio.

G) Construir $x = \frac{a^2}{b}$; escribiéndola en forma de proporción:

$\frac{b}{a} = \frac{a}{x}$; es decir x = 3ª proporcional geométrica que es fácil construirla como la 4ª proporcional geométrica (Fig. 9).

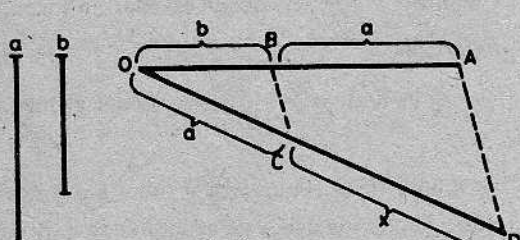
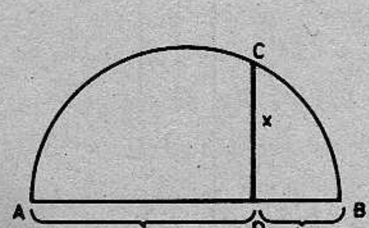


Fig. 9

H) Construir $x = \sqrt{ab}$; que equivale $x^2 = ab$, y a la proporción $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$ en la cual x es $\frac{1}{2}$ proporcional geométrica.

Existen varias construcciones para la $\frac{1}{2}$ proporcional geométrica; así el 1^er^ y 2° Teorema de Euclides (ver N° 316) dan una solución para esta construcción.

Fig. 10



1ª Construcción: basada en el 2° Teorema de Euclides se reduce a construir un △ rectángulo del cual se conocen las 2 proyecciones de los catetos en la hipotenusa; la altura es la $\frac{1}{2}$ proporción geométrica.

1) Se copia a = AD y se le suma b = DB (Fig. 10).

2) Se dibuja la semicircunferencia (AB).

3) La ⊥ en D determina CD = x.

2ª construcción: se basa en el 1^er^. Teorema de Euclides. Se reduce a construir un △ rectángulo del cual se conoce la hipotenusa = AB y la proyección = AD de uno de los catetos. La incógnita x es el cateto correspondiente a la proyección AD.

1) Se copia a = $\overline{AB}$ y se resta b = $\overline{AD}$ (Fig. 11).

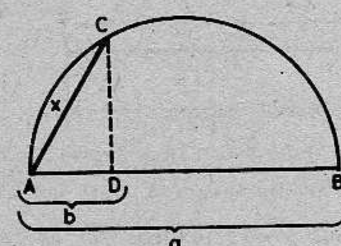


Fig. 11

2) Se dibuja la ⊥ en D y la $\frac{1}{2}$ circunferencia (AB).

3) El cateto $\overline{AC}$ = x es la $\frac{1}{2}$ proporcional geométrica.

I) Construir $x = \sqrt{a^2 + b^2}$; al elevar al cuadrado queda un cuadrado equivalente a la suma de dos cuadrados dados. Es decir: $x^2 = a^2 + b^2$; igualdad que expresa el Teorema de Pitágoras.

Luego a y b son los catetos y x es la hipotenusa.

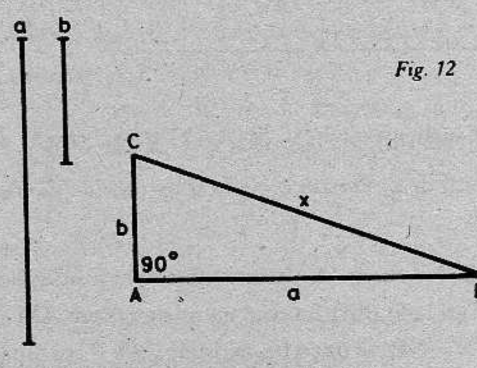


Fig. 12

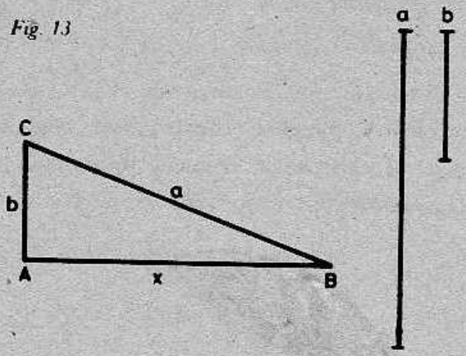
1) Se dibuja un ∢ recto (Fig. 12).

2) Se copia a = AB y b = AC.

3) resulta BC = x

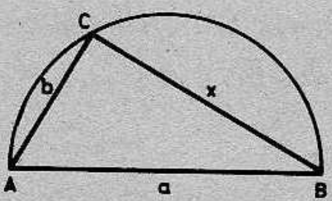
J) Construir $x = \sqrt{a^2 - b^2}$; de donde: $x^2 = a^2 - b^2$; esta igualdad expresa el Corolario del Teorema de Pitágoras. Por lo tanto $\underline{x}$ es un cateto, $\underline{a}$ la hipotenusa y $\underline{b}$ el otro cateto.

Fig. 13



1) Se dibuja un ∡ recto (Fig. 13).
2) Se copia $b = \overline{AC}$ (cateto).
3) Con ⊙ (C, a) se determina B.
4) $\overline{AB} = x$ (cateto pedido).

Fig. 14



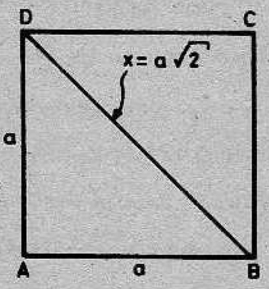
Otra construcción (Fig. 14):
1) Se dibuja $a = \overline{AB}$.
2) Semi ⊙ $(\overline{AB})$.
3) Desde A se corta con $b = \overline{AC}$
4) $\overline{BC} = x$.

K) Construir $x = a\sqrt{2}$.

Esta expresión se puede construir de varios modos. Por ejemplo:

1ʳᵃ construcción: la $\underline{x}$ es la diagonal de un cuadrado de lado $\underline{a}$. Si $\overline{AB} = a$, resulta $\overline{BD} = x = a\sqrt{2}$ (Fig. 15).

Fig. 15

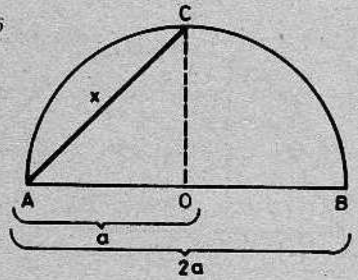


2ª construcción: $\underline{x}$ es la hipotenusa de un △ rectángulo isósceles (△ ABD) de catetos $= a$. Resulta $\overline{BD} = x$ (Fig. 15).

3ª construcción: $\underline{x}$ es el lado l_4 del cuadrado inscrito en una circunferencia de radio $= a$; $l_4 = a\sqrt{2} = x$.

4ª construcción: De $x = a\sqrt{2}$ se obtiene: $x = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2a \cdot a}$; o sea, $x = \frac{1}{2}$ proporc. geométrica: entre 2a y $\underline{a}$ que conviene construirla según el 1ᵉʳ Teorema de Euclides.

Fig. 16



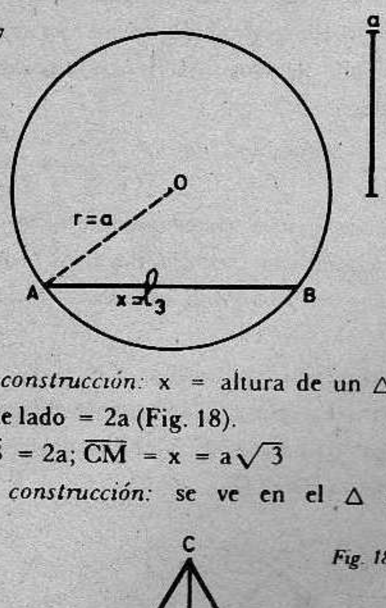
1) $\overline{AO} = a$; $\overline{AB} = 2a$ (Fig. 16);
2) $\frac{1}{2}$ ⊙ (AB) y ⊥ en O.
3) $\overline{AC} = x$.

L) Construir $x = a\sqrt{3}$.

También esta expresión puede construirse de varios modos.

1ʳᵃ construcción: $x = l_3$ en una circunferencia de radio $= a$ (Fig. 17).

Fig. 17

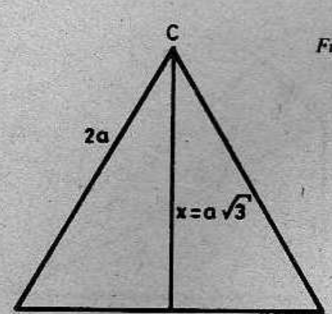


2ª construcción: x = altura de un △ equilátero de lado = 2a (Fig. 18).

$\overline{AB} = 2a$; $\overline{CM} = x = a\sqrt{3}$

3ª construcción: se ve en el △ AMC;

Fig. 18

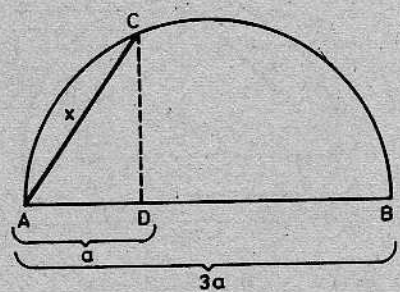


x = cateto de un triángulo rectángulo de hipotenusa $\overline{AC} = 2a$ y el otro cateto $\overline{AM} = a$.

$x^2 = (2a)^2 - a^2 = 3a^2 \therefore x = a\sqrt{3}$ (Fig. 18).

4ª construcción: la expresión $x = a\sqrt{3}$ puede escribirse $x = \sqrt{3a^2} = \sqrt{3a \cdot a}$; por lo tanto x es $\frac{1}{2}$ proporc. geométrica entre $\underline{3a}$ y $\underline{a}$; conviene construirla según el 1er Teorema de Euclides (Fig. 19).

Fig. 19



1) $\overline{AD} = a$; $\overline{AB} = 3a$

2) $\frac{1}{2} \odot (AB)$ y $\perp$ en D.

3) $\overline{AC} = x$.

M) Construir $x = a\sqrt{n}$ (n = un Nº entero).

Por ejemplo: $x = a\sqrt{12} = \sqrt{12a^2}$.

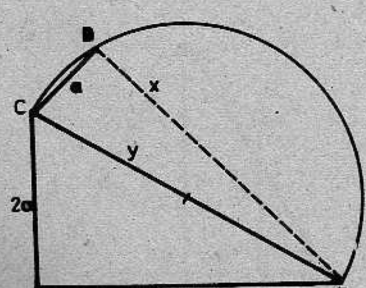
El problema consiste en descomponer $12a^2$ en una suma algebraica de cuadrados *exactos*, o descomponerlo en producto de dos factores convenientemente elegidos. Así tendremos dos construcciones:

1ra construcción: $x = \sqrt{12a^2} = \sqrt{(3a)^2 + (2a)^2 - (a)^2}$.

Se construye primeramente $(3a)^2 + (2a)^2$ que será igual a un cuadrado según el Teorema de Pitágoras; sea »y« el lado de este cuadrado. Luego: $y^2 = (3a)^2 + (2a)^2$.

Encontrado »y« queda: $x = \sqrt{y^2 - a^2}$ que se construye según el Corolario de Pitágoras. Es decir, que para llegar al valor de $\underline{x}$ debemos hacer dos construcciones (Fig. 20):

Fig. 20



1) un $\measuredangle$ recto; $\overline{AB} = 3a$; $\overline{AC} = 2a \therefore \overline{BC} = y$

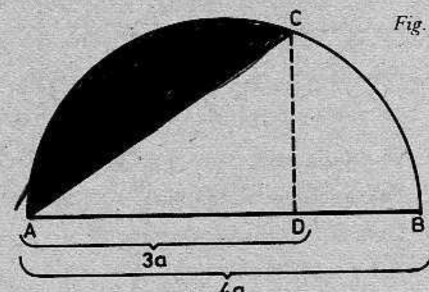
2) $\frac{1}{2} \odot (\overline{BC})$ que se corta desde C con $a = \overline{CD}$, luego: $\overline{BD} = x$.

2ª construcción:

$x = \sqrt{12a^2} = \sqrt{12a \cdot a} = \sqrt{6a \cdot 2a} = \sqrt{4a \cdot 3a}$

De todos los factores de $12a^2$ los más convenientes para su construcción son $4a \cdot 3a$ porque al construirlo como $\frac{1}{2}$ proporción geométrica se necesita menor espacio.

Fig. 21



1) $\overline{AB} = 4a$; $\overline{AD} = 3a$ (Fig. 21).

2) $\frac{1}{2} \odot (\overline{AB})$ y $\perp$ en D.

3) $\overline{AC} = x$.

397. EJERCICIOS RESUELTOS

Las construcciones fundamentales anteriores permitirán resolver los ejercicios siguientes en los cuales será necesario introducir incógnitas auxiliares (u, v, y, z, etc.), que permitirán hacer la construcción »por partes«. Estas »partes« en que se descompone la expresión dada deben ser construcciones conocidas como 4ª proporcional geométrica; $\frac{1}{2}$ proporcional geométrica, etc.

1) Construir $x = \frac{a^3}{bc}$

Esta expresión puede descomponerse en: $x = \frac{a^2}{b} \cdot \frac{a}{c}$; puede construirse $\frac{a^2}{b}$ como 3ª proporcional geométrica, o sea $\frac{a^2}{b} = y$.

Resulta: $x = \frac{y \cdot a}{c}$ que se construye como 4ª proporcional geométrica.

Es decir, deben hacerse dos construcciones: una 3ª proporcional geométrica: $\frac{b}{a} = \frac{a}{y}$ y una 4ª proporcional geométrica: $\frac{c}{y} = \frac{a}{x}$

Pueden hacerse las dos construcciones en una sola figura o en figuras apartes (Fig. 22).

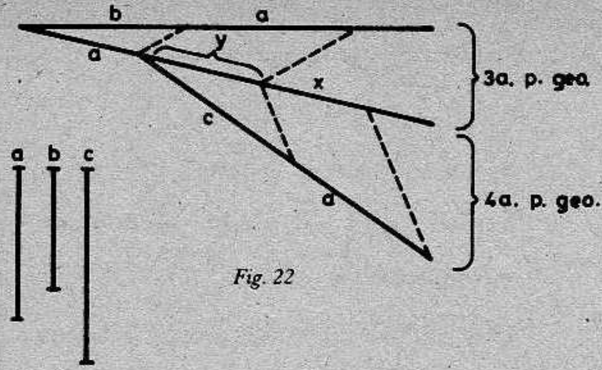


Fig. 22

2) Construir $x = \frac{a^3}{b^2}$

Se descompone en: $x = \frac{a^2}{b} \cdot \frac{a}{b}$

Se construye primeramente $\frac{a^2}{b} = y$ (3ª prop. geom. $\frac{b}{a} = \frac{a}{y}$) y después:

$x = \frac{y \cdot a}{b}$ (4ª prop. geom. $\frac{b}{y} = \frac{a}{x}$).

3) Construir $x = \frac{ab^2}{c^2}$

Se descompone en: $x = \frac{ab}{c} \cdot \frac{b}{c}$

Se construye primero $\frac{ab}{c} = y$ (4ª prop. geom. $\frac{c}{a} = \frac{b}{y}$); y después $x = \frac{y \cdot b}{c}$ (otra 4ª prop. geom. $\frac{c}{y} = \frac{b}{x}$).

4) Construir $x = \frac{ab}{\sqrt{cd}}$

Se construye primero $\sqrt{cd} = y$ ($y = \frac{1}{2}$ prop. geom. entre c y d).

Resulta: $x = \frac{ab}{y}$ (4ª proporc. geométrica $\frac{y}{a} = \frac{b}{x}$).

5) Construir $x = \sqrt{2a^2 - ab}$

Se descompone en: $2a \cdot a = y^2$ ($\frac{1}{2}$ prop. geométrica)

$ab = z^2$ (otra $\frac{1}{2}$ prop. geométrica).

Construidas estas dos $\frac{1}{2}$ proporc. geométricas, resulta:

$x = \sqrt{y^2 - z^2}$ (x = un cateto según Corolario Teorema Pitágoras).

Otra descomposición es factorizando:

$x = \sqrt{a \cdot (2a - b)}$ siendo $2a - b = m$

queda $x = \sqrt{a \cdot m}$ ($x = \frac{1}{2}$ proporc. geométrica entre a y m).

6) Construir $x = \sqrt{a^2 + \frac{bcd}{e} - \frac{f^2 \cdot g}{h}}$

Se puede descomponer en:

$x = \sqrt{a^2 + \frac{bc}{e} \cdot d - \frac{f^2}{h} \cdot g}$ de donde se construye primero:

$\frac{bc}{e} = y$ (4ª proporc. geométrica $\frac{e}{b} = \frac{c}{y}$)

$\frac{f^2}{h} = z$ (3ª proporc. geométrica: $\frac{h}{f} = \frac{f}{z}$)

Resulta: $x = \sqrt{a^2 + y \cdot d - z \cdot g}$; a continuación se construye: $y \cdot d = u^2$ ($u = \frac{1}{2}$ proporc. geométrica).

$z \cdot g = v^2$ ($v = \frac{1}{2}$ proporc. geométrica).

Se obtiene: $x = \sqrt{a^2 + u^2 - v^2}$; en esta expresión se puede construir $a^2 + u^2 = t^2$ (t = hipotenusa según Teorema de Pitágoras).

Finalmente, resulta $x = \sqrt{t^2 - v^2}$ (x = un cateto según el Corolario de Pitágoras).

7) Construir $x = \frac{a}{2} + \frac{3}{4} b$

Solución (Fig. 23):

$$\left.\begin{array}{l} AB = a \\ MB = \frac{a}{2} \\ BC = b \\ BD = \frac{3}{4} b \end{array}\right\} \therefore MD = \frac{a}{2} + \frac{3}{4} b = x$$

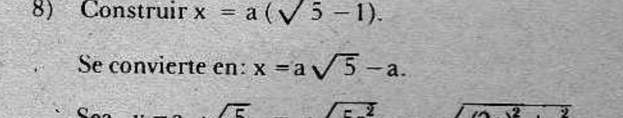


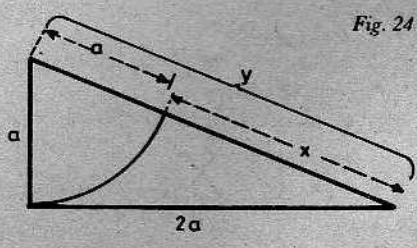
Fig. 23

8) Construir $x = a(\sqrt{5} - 1)$.

Se convierte en: $x = a\sqrt{5} - a$.

Sea $y = a\sqrt{5} = \sqrt{5a^2} = \sqrt{(2a)^2 + a^2}$

Fig. 24



(y = hipotenusa según el Teorema de Pitágoras).

Resulta $x = y - a$.

Observaciones:

I) Se puede también construir $\underline{x}$ como el lado l_{10} en una ⊙ de radio 2a.

II) La expresión $a\sqrt{5}$ se puede construir también como $\frac{1}{2}$ proporc. geométrica entre $\underline{5a}$. y $\underline{a}$.

9) Construir $x = a\sqrt{\frac{2}{3}} - b\sqrt{\frac{1}{2}}$

Solución: Se transforma en:

$x = \sqrt{\frac{2}{3}a^2} - \sqrt{\frac{1}{2}b^2}$

$x = \sqrt{\frac{2}{3}a \cdot a} - \sqrt{\frac{1}{2}b \cdot b}$

Es decir: $\sqrt{\frac{2}{3}a \cdot a} = u$ ($u = \frac{1}{2}$ prop. geométrica entre $\underline{a}$ y $\frac{2}{3}a$)

$\sqrt{\frac{1}{2}b \cdot b} = v$ ($v = \frac{1}{2}$ prop. geométrica entre $\underline{b}$ y $\frac{b}{2}$).

Resulta $x = u - v$.

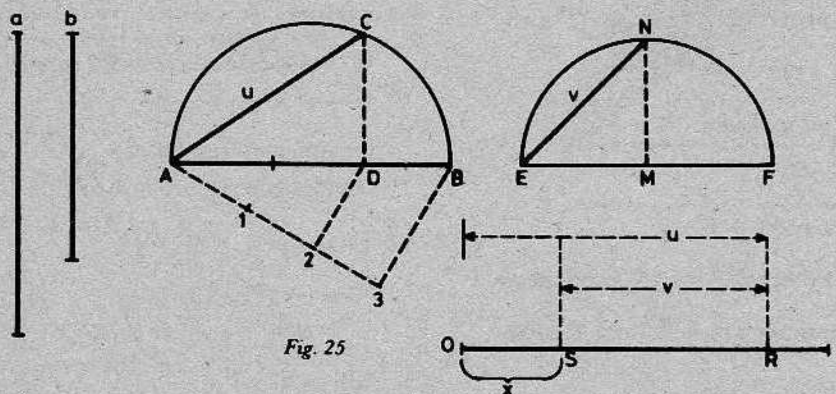


Fig. 25

1) $\overline{AB} = a$; $\overline{AD} = \frac{2}{3}a$; $\overline{AC} = u$ (Fig. 25).

2) $\overline{EF} = b$; $\overline{EM} = \frac{b}{2}$; $\overline{EN} = v$

3) $\overline{OS} = x$.

10) Construir $x = \sqrt{2a^2 + 3b^2}$.

Solución:

Se transforma en $x = \sqrt{2a \cdot a + 3b \cdot b}$

Sea $2a \cdot a = u^2$ ($u = \frac{1}{2}$ proporc. Geom. entre $\underline{2a}$ y $\underline{a}$).

$3b \cdot b = v^2$ ($v = \frac{1}{2}$ prop. geométrica entre $\underline{3b}$ y $\underline{b}$).

Resulta: $x = \sqrt{u^2 + v^2}$ (x = hipotenusa, según el Teorema de Pitágoras).

11) Construir $x = \sqrt[4]{a^4 + b^4}$.

Solución: Se transforma sucesivamente en:

$x = \sqrt{\sqrt{a^4 + b^4}}$; se saca factor común a^2

$x = \sqrt{\sqrt{a^2\left(a^2 + \frac{b^4}{a^2}\right)}}$

$x = \sqrt{\sqrt{a^2 \cdot \left[a^2 + \left(\frac{b^2}{a}\right)^2\right]}}$;

ya se puede construir:

$\frac{b^2}{a} = u$ ($u = 3^a$ p. geométrico $\frac{a}{b} = \frac{b}{u}$).

Resulta: $x = \sqrt{\sqrt{a^2(a^2 + u^2)}}$; pero

$a^2 + u^2 = v^2$ (Teo. Pitágoras)

luego: $x = \sqrt{\sqrt{a^2 \cdot v^2}}$ que da finalmente:

$x = \sqrt{a \cdot v}$ ($x = \frac{1}{2}$ p. geo. entre $\underline{a}$ y $\underline{v}$).

12) Construir $x = \sqrt[4]{a^4 - b^4}$

Solución: Puede hacerse la transformación del ejercicio anterior pero en este caso es preferible la siguiente:

$x = \sqrt[4]{(a^2 + b^2) \cdot (a^2 - b^2)}$

sea: $a^2 + b^2 = u^2$ (u = hipotenusa, según Teorema de Pitágoras).

$a^2 - b^2 = v^2$ (v = un cateto, según Corol. de Pitágoras).

Resulta: $x = \sqrt[4]{u^2 \cdot v^2}$ que da finalmente:

$x = \sqrt{u \cdot v}$ ($\frac{1}{2}$ p. geométrica entre $\underline{u}$ y $\underline{v}$).

13) $x = (abcd)^{0,25}$.

Solución: Se transforma en: $x = (abcd)^{\frac{1}{4}}$ lo que da: $x = \sqrt[4]{abcd}$ pero

$ab = u^2$ ($\frac{1}{2}$ proporc. geométrica entre *a* y *b*)

$cd = v^2$ ($\frac{1}{2}$ proporc. geométrica entre *c* y *d*)

Resulta:

$x = \sqrt[4]{u^2 \cdot v^2} = \sqrt[4]{(uv)^2}$, lo que da:

$x = \sqrt{u \cdot v}$ ($\frac{1}{2}$ proporc. geométrica entre *u* y *v*).

14) Construir x en la expresión: $\frac{a}{b} = \frac{x}{c} - \frac{b}{a}$

Solución: Se multiplica la ecuación por abc, obteniéndose:

$a^2c = abx - b^2c$

$abx = a^2c + b^2c$

$x = \frac{c \cdot (a^2 + b^2)}{ab}$

Se construye primero $a^2 + b^2 = u^2$ (u = hipotenusa, según Teorema de Pitágoras) resulta:

$x = \frac{c \cdot u^2}{ab}$ que se descompone en: $x = \frac{c}{a} \cdot \frac{u^2}{b}$;

se construye la 3ª proporción geométrica $\frac{u^2}{b} = v$.

Resultando finalmente:

$x = \frac{c \cdot v}{a}$ (4ª p. geométrica: $\frac{a}{c} = \frac{v}{x}$).

15) Construir $x = \sqrt{ab + \frac{c^3}{a} - b^2}$.

Solución: Se puede construir:

$ab = u^2$ ($u = \frac{1}{2}$ p. geométrica entre *a* y *b*)

$\frac{c^2}{a} = v$ (v = 3ª p. geométrica $\frac{a}{c} = \frac{c}{v}$).

Resulta: $x = \sqrt{u^2 + c \cdot v - b^2}$

se construye: $c \cdot v = t^2$ ($t = \frac{1}{2}$ p. geométrica entre *c* y *v*)

queda: $x = \sqrt{u^2 + t^2 - b^2}$

se construye: $u^2 + t^2 = y^2$ (y = hipotenusa, según Teorema de Pitágoras).

Por último: $x = \sqrt{y^2 - b^2}$ (x = un cateto según Corolario de Pitágoras).

16) Construir: $x = \frac{(\frac{a}{b})^2 - (\frac{a}{b})^{-2}}{a^{2} + b^{-2}} \cdot c^{-1}$

Solución: Se convierte los exponentes negativos en positivos:

$$x = \frac{(\frac{a}{b})^2 - (\frac{b}{a})^2}{(\frac{1}{a})^2 + (\frac{1}{b})^2} \cdot \frac{1}{c}$$

$$x = \frac{\frac{a^2}{b^2} - \frac{b^2}{a^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} \cdot \frac{1}{c}$$; se amplifica por $a^2 \cdot b^2$,

se obtiene: $x = \frac{a^4 - b^2}{b^2 + a^2} \cdot \frac{1}{c}$

$$x = \frac{(a + b^2)(a^2 - b^2)}{(a^2 + b^2) \cdot c} = \frac{a^2 - b^2}{c}$$

Se construye $a^2 - b^2 = u^2$ (u = un cateto, según Corolario de Pitágoras).

Resulta:

$x = \frac{u^2}{c}$ (x = 3ª proporción geométrica: $\frac{c}{u} = \frac{u}{x}$).

17) Construya x en la expresión:

$x \cdot \left[\frac{ab}{2}(\sqrt{5} - 1)\right]^{0,5} = ab$; se transforma en:

$x \cdot \sqrt{\frac{ab}{2}(\sqrt{5} - 1)} = ab$; se eleva al cuadrado.

$x^2 \cdot \frac{ab}{2}(\sqrt{5} - 1) = (ab)^2$;

se divide por $\frac{ab}{2}$

$x^2 \cdot (\sqrt{5} - 1) = 2ab$

$x^2 = \frac{2ab}{\sqrt{5} - 1}$; se amplifica por $(\sqrt{5} + 1)$

$x^2 = \frac{2ab(\sqrt{5} + 1)}{4} = \frac{ab}{2}(\sqrt{5} + 1)$

Se construye $\frac{ab}{2} = u^2$ ($u = \frac{1}{2}$ p. geométrica entre $\frac{a}{2}$ y b)

Resulta: $x^2 = u^2 \cdot (\sqrt{5} + 1)$

$x^2 = u^2\sqrt{5} + u^2$

se construye: $u^2\sqrt{5} = v^2$

($v = \frac{1}{2}$ p. geométrica entre *u* y $u\sqrt{5}$)

luego: $x^2 = v^2 + u^2$

(x = hipotenusa, según el Teor. de Pitágoras).

18) Construir geométricamente las raíces de la ecuación:

$x^2 - 2ax + b^2 = 0$, siendo $\underline{a}$ y $\underline{b}$ trazos (ver Nº 323-1)

19) Construir geométricamente las raíces x' y x'' de la ecuación:
$x^2 - 2ax - b^2 = 0$ (ver Nº 323-2).

20) Construir la tercera proporc. geométrica $x = \frac{a^2}{b}$ pero aprovechando uno de los Teoremas de Euclides.
Según el 1^er^ Teorema de Euclides (Figura 26):

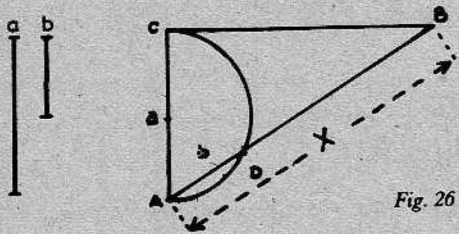


Fig. 26

1) AC = a

2) $\frac{1}{2}$ ⊙ (AC) que se corta desde A con b = AD;

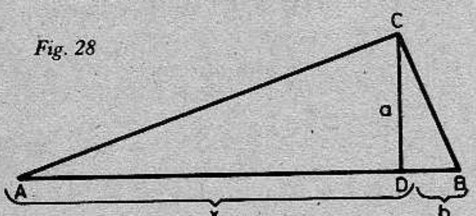
3) ∡ recto en C;

4) AD⟶ D det. B

Resulta: AB = x

¿Cómo se procede si b > a?
Según el 2° Teorema de Euclides se tendría el orden siguiente (Fig. 27):

Fig. 28



1) Se traza una ⊥ CD = a;

2) Se copia b = DB y B (-)C;

3) La ⊥ en C a CB det. A.

Resulta: AD = x.

21) Construir $x = a\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$

Se transforma en $x = \sqrt{a^2 \cdot (4 - 2\sqrt{3})}$

$x = \sqrt{4a^2 - 2a^2\sqrt{3}}$

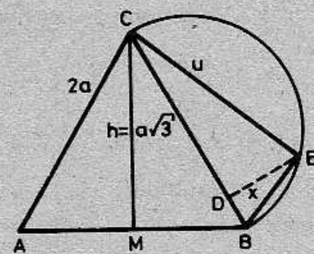
$x = \sqrt{(2a)^2 - 2a \cdot a\sqrt{3}}$

Se construye $2a \cdot a\sqrt{3} = u^2$ ($u = \frac{1}{2}$ proporc. geométrica entre 2a y $a\sqrt{3}$, siendo $a\sqrt{3}$ la altura de un triángulo equilátero de lado 2a).

Resulta: $x = \sqrt{(2a)^2 - u^2}$ (x = un cateto, según Corolario de Pitágoras).

Construcción (Fig. 28):

Fig. 27



1) △ equilátero ABC de lado 2a.

2) altura CM = $a\sqrt{3}$

3) CD = CM = $a\sqrt{3}$

4) $\frac{1}{2}$ ⊙ (BC) de diámetro 2a.

5) ⊥ en D, resulta: CE = u (1^er^ Teorema de Euclides) y BE = x (Corolario de Pitágoras).

398. PROBLEMAS GEOMETRICOS POR PLANTEAR

Para resolver un problema geométrico con ayuda del álgebra es conveniente el siguiente orden:

1°. *Análisis del problema:*

Consiste en hacer una figura de análisis como si ya estuviera el problema resuelto; en esta figura se ubican los datos y las incógnitas. La designación de la o las incógnitas debe hacerse de acuerdo con la pregunta del problema.

2°. *Plantear la ecuación:*

Esto se hace de acuerdo con el enunciado o condiciones del problema. La ecuación o ecuaciones que se plantean deben ser independientes entre sí y deben relacionar los datos con las incógnitas aplicando teoremas o relaciones conocidas, por ejemplo: Teorema de Pitágoras, o de Euclides, o semejanza, o cálculo de áreas, etc.

3ª. *Construcción:*

Deben construirse las expresiones algebraicas que se encuentran al resolver la o las ecuaciones planteadas en el análisis.

4ª. *Discusión:*

Se refiere a indicar el número de soluciones o en qué casos, según los datos, el problema tiene o no solución.

5°. *Demostración:*

Puede suprimirse si se ha hecho un análisis y construcción correctas.

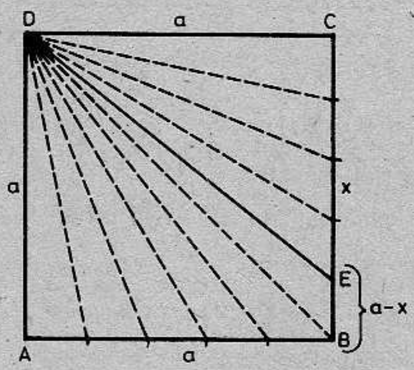
399. PROBLEMAS

1) Desde un vértice de un cuadrado trazar una recta que lo divida en dos partes que sean entre sí como 2:3.

Solución geométrica: Veamos primeramente la solución geométrica.

Se dividen los lados opuestos al vértice D en 5 partes iguales cada uno; al unir estos puntos con D el cuadrado queda dividido en 10 partes iguales; por lo tanto 4 de estas partes serán (Figura 1).

Fig. 1



$\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ del total a^2 y el resto será $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

Por lo tanto: $\triangle$ **ECD** $= \frac{2}{5}a^2$

trapecio DABE $= \frac{3}{5}a^2$

$$\therefore \frac{\triangle \text{ECD}}{\text{trap. DABE}} = \frac{2}{3}$$

Solución algebraica: Sea $CE = x$ y $BE = a - x$

$$\text{área } \triangle \text{ ECD} = \frac{a \cdot x}{2} = \frac{a}{2} \cdot x$$

$$\text{área trap. DABE} = \frac{a + (a - x)}{2} \cdot a = \frac{a}{2} \cdot (2a - x)$$

pero $\frac{\triangle \text{ECD}}{\text{trap. DABE}} = \frac{2}{3}$

luego. $\dfrac{\frac{a}{2} \cdot x}{\frac{a}{2} \cdot (2a - x)} = \frac{2}{3}$

$\frac{x}{2a - x} = \frac{2}{3}$ de donde resulta: $x = \frac{4}{5}a$

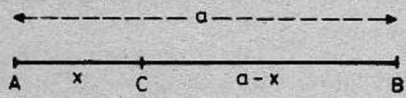
Construcción: Basta dividir $\overline{BC}$ en 5 partes iguales y unir D con el 4° punto, lo que da la recta pedida $\overline{DE}$.

Otra solución algebraica: Si las partes son **entre sí como** $\frac{2}{3}$ significa que el $\triangle$ECD es $\frac{2}{5}$ del área total a^2. Es decir: $\frac{a \cdot x}{2} = \frac{2}{5}$

de donde: $x = \frac{4}{5}a$

2) Dividir un trazo dado *a* en dos segmentos de modo que el rectángulo formado por ellos sea equivalente al cuadrado construido sobre la diferencia de ellos.

Análisis (Fig. 2): Sea $\overline{AC} = x$ y $\overline{CB} = a - x$ los segmentos pedidos.



La condición del problema es que:

$$\overline{AC} \cdot \overline{CB} = (\overline{CB} - \overline{AC})^2, \text{ es decir:}$$

$$x \cdot (a - x) = [(a - x) - x]^2$$

$$ax - x^2 = (a - 2x)^2$$

$$ax - x^2 = a^2 - 4ax + 4x^2;$$

ordenando se obtiene:

$$5x^2 - 5ax + a^2 = 0 / :5$$

$$x^2 - ax + \frac{a^2}{5} = 0$$

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{5}}$$

Ya se puede construir: $\frac{a^2}{5} = u^2$ ($u = \frac{1}{2}$ proporc. **geométrica entre *a* y** $\frac{a}{5}$)

Queda: $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - u^2}$

sea $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - u^2} = v$ (v = **un cateto, según Corolario de Pitágoras)**

Resulta $x = \frac{a}{2} \pm v \begin{cases} x' = \frac{a}{2} + v \\ x'' = \frac{a}{2} - v \end{cases}$

Construcción (Fig. 3):

a) 1. $\overline{AB} = a$; $\overline{AD} = \frac{a}{5}$

2. $\frac{1}{2}$ ⊙ (AB) y ⊥ en D.

3. $\overline{AC} = u$.

b) 1. $\overline{AO} = \frac{a}{2}$

2. $\frac{1}{2}$ ⊙ (AO)

3. Se corta con arco ⊙ (A, u) determina D.

4. Resulta OD = v

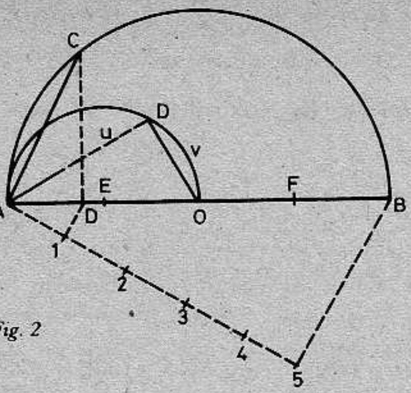


Fig. 2

c) Con centro en O y radio v se determina E y F; resulta:

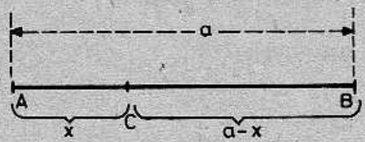
$$\overline{BE} = \overline{BO} + \overline{OE} = \frac{a}{2} + v = x'$$

$$\overline{BF} = \overline{BO} - \overline{OF} = \frac{a}{2} - v = x''.$$

3) **Dividir un trazo dado a en dos segmentos** de modo que los cuadrados construidos sobre ellos sean entre sí como 1 : 2.

Análisis (**Fig.** 3): **Sean los segmentos**

Fig. 3



$\overline{AC} = x$ y $\overline{CB} = a - x$

La condición es que:

$$\overline{AC}^2 : \overline{CB}^2 = 1 : 2$$

$$\frac{x^2}{(a-x)^2} = \frac{1}{2}$$

$$2x^2 = a^2 - 2ax + x^2$$

$$x^2 + 2ax - a^2 = 0$$

$$x = -a \pm \sqrt{a^2 + a^2}$$

Se construye $\sqrt{a^2 + a^2} = u$ (u = hipotenusa $\triangle$ rectángulo isósceles de catetos = a)

Resulta: $x = -a \pm u \begin{cases} x' = u - a \\ x'' = -u - a \\ \text{(no es solución geométrica).} \end{cases}$

Construcción (**Fig.** 4):

1) $\measuredangle$ recto; $\overline{AB} = \overline{AC} = a$

2) $\overline{BC} = u$

3) se hace $\overline{CD} = a$

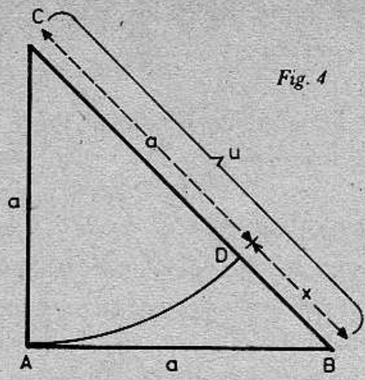
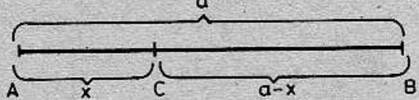


Fig. 4

Resulta: $\overline{BD} = u - a = x$.

4) **Dividir un trazo dado a en dos segmentos** de modo que el rectángulo formado por ellos sea equivalente a la diferencia de los cuadrados construidos sobre los segmentos.

Fig. 5



Análisis (**Fig.** 5): **Sean los segmentos** $\overline{AC} = x$; $\overline{CB} = a - x$.

Condición: $\overline{AC} \cdot \overline{CB} = \overline{AC}^2 - \overline{CB}^2$.

$$x \cdot (a - x) = x^2 - (a - x)^2$$

$$ax - x^2 = x^2 - (a^2 - 2ax + x^2);$$

se reduce y ordena:

$$x^2 + ax - a^2 = 0$$

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}$$

Se construye: $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = u$ (u = hipotenusa, según Teorema de Pitágoras).

Resulta: $x = -\frac{a}{2} \pm u \begin{cases} x' = u - \frac{a}{2} \\ x'' = -u - \frac{a}{2} \end{cases}$

(no es solución geométrica).

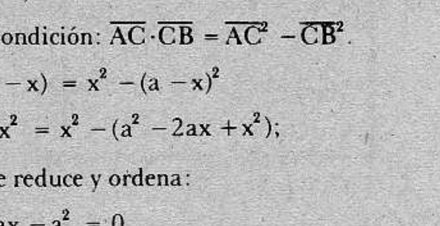


Fig. 6

Construcción (**Fig.** 6):

1) $\measuredangle$ recto; $\overline{AB} = a$; $\overline{AC} = \frac{a}{2}$.

2) $\overline{BC} = u$.

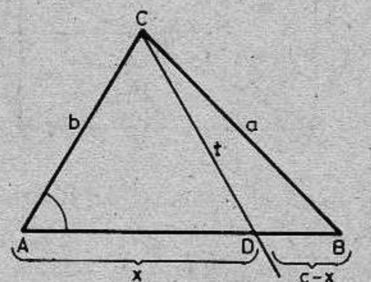
3) Se hace $\overline{CD} = \frac{a}{2}$.

Resulta: $\overline{BD} = u - \frac{a}{2} = x$.

5) Desde uno de los vértices de un △ trazar una transversal de modo que los △ parciales tengan el mismo perímetro.

Análisis (Fig. 7):

Fig. 7



Sea: AD = x; DB = c − x; CD = t

La condición dice que:

$$\overline{AD} + \overline{CD} + \overline{AC} = \overline{DB} + \overline{BC} + \overline{CD}$$

$$x + t + b = c \cdot x + a + t$$

$$2x = a + c - b$$

$$x = \frac{a + c - b}{2}$$

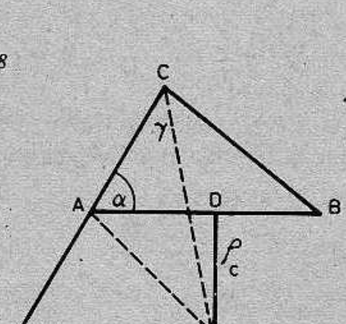
expresión que es muy fácil de construir.

Si se quiere encontrar una construcción »elegante«, se transforma en:

$$x = \frac{a + c + b - b - b}{2} = \frac{2s - 2b}{2} = s - b;$$

basta entonces trazar la bisectriz del ∡ adyacente de α y la bisectriz de γ para determinar O_c; trazando desde O_c la ⊥ a AB se determina **x = AD. (Ver figura 8).**

Fig. 8



6) Construir un △ rectángulo, dado un cateto y la proyección del otro en la hipotenusa.

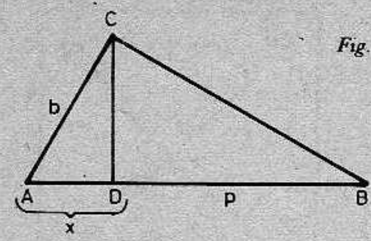


Fig. 9

Análisis (Fig. 9): Sea **AD = x.**

Según el Teorema de Euclides se tiene que:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AD}$$

$$b^2 = (x + p) \cdot x$$

$$b^2 = x^2 + p \cdot x$$

$$x^2 + p \cdot x - b^2 = 0$$

$$x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + b^2}$$

Se construye: $\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + b^2} = u$ (u = hipotenusa, según Teorema de Pitágoras).

Resulta: $x = \frac{p}{2} \pm u \quad \begin{cases} x' = u - \frac{p}{2} \\ x'' = -u - \frac{p}{2} \end{cases}$

(x'' no es solución geométrica).

Construcción (Fig. 10):

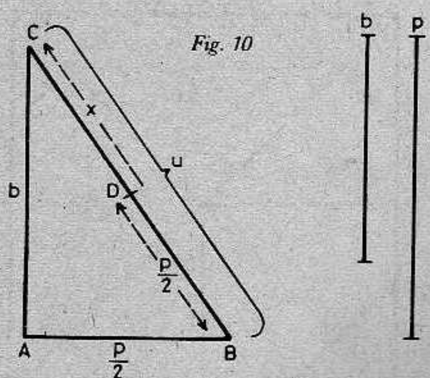


Fig. 10

1) $\overline{AB} = \frac{p}{2}$; $\overline{AC} = b$.

2) $\overline{BC} = u$.

3) se resta $\frac{p}{2} = \overline{BD}$.

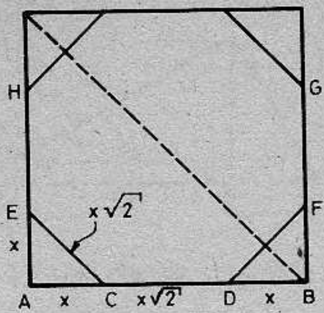
Resulta: $\overline{CD} = u - \frac{p}{2} = x$.

7) Trazar entre los lados contiguos de un cuadrado cuatro rectas, de modo que resulte un octógono regular.

Análisis (Fig. 12):

Sea $\overline{AB} = a$; si $\overline{AC} = x$ resulta $\overline{EC} = x\sqrt{2}$ por lo tanto:

Fig. 11



$\overline{CD} = x\sqrt{2} = \overline{EC} = \overline{DF} =$ etc.

Luego: $\overline{AC} + \overline{CD} + \overline{DB} = \overline{AB}$.

$x + x\sqrt{2} + x = a$

$2x + x\sqrt{2} = a$

$x(2 + \sqrt{2}) = a$

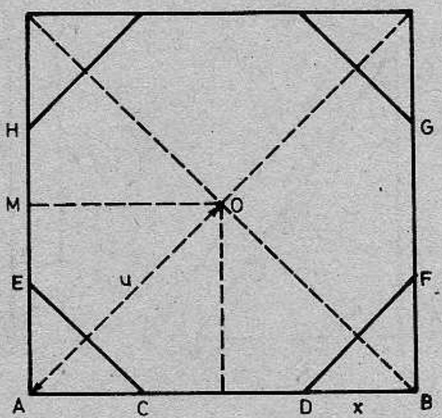
$x = \dfrac{a}{2+\sqrt{2}}$; se amplifica por $(2 - \sqrt{2})$

$x = \dfrac{a(2-\sqrt{2})}{4-2} = \dfrac{2a - a\sqrt{2}}{2} = x = a - \frac{a}{2}\sqrt{2}$

Se construye $\frac{a}{2}\sqrt{2} = u$ (u = diagonal de un cuadrado de lado $\frac{a}{2}$).

Resulta: $x = a - u$.

Fig. 12



Construcción (Fig. 12):

1) $AM = \frac{a}{2}$, luego $\overline{AO} = \frac{a}{2}\sqrt{2} = u$.

2) Se corta con ⊙ (A, u); se determina D y H.

3) Resulta: $\overline{DB} = a - u = x$.

4) Con ⊙ (B, u) se determina C y G, etc.

8) Inscribir en un círculo de radio *r* un rectángulo que tenga un perímetro 2s.

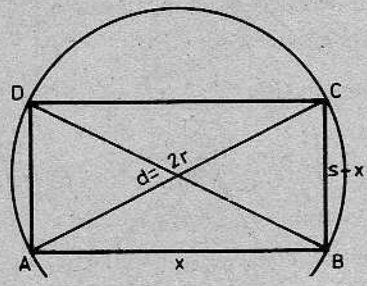
Análisis (Fig. 13):

$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = 2s$

luego $\overline{AB} + \overline{BC} = s$

Si $\overline{AB} = x$ resulta $\overline{BC} = s - x$.

Fig. 13



Se aplica el Teorema de Pitágoras al △ ABC:

$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$

$x^2 + (s-x)^2 = d^2$

$x^2 + s^2 - 2sx + x^2 = d^2$

$2x^2 - 2sx + (s^2 - d^2) = 0$

Se construye $s^2 - d^2 = u^2$ (u = un cateto, según Corolario de Pitágoras).

Se obtiene: $2x^2 - 2sx + u^2 = 0$; se divide por 2.

$x^2 - sx + \frac{u^2}{2} = 0$

$x = \frac{s}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - \frac{u^2}{2}}$

Se construye $\frac{u^2}{2} = v^2$ ($v = \frac{1}{2}$ p. geo. entre *u* y $\frac{u}{2}$).

Resulta: $x = \frac{s}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - v^2}$;

se construye: $\sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - v^2} = z$ (z = un cateto, según Corolario de Pitágoras)

finalmente $x = \frac{s}{2} \pm z \therefore \begin{cases} x' = \frac{s}{2} + z \\ x'' = \frac{s}{2} - z \end{cases}$

Observación: También puede aplicarse directamente la fórmula simplificada para resolver la ecuación a) resultando:

$x = \dfrac{s \pm \sqrt{s^2 - 2 \cdot (s^2 - d^2)}}{2}$

$x = \dfrac{s \pm \sqrt{2d^2 - s^2}}{2}$

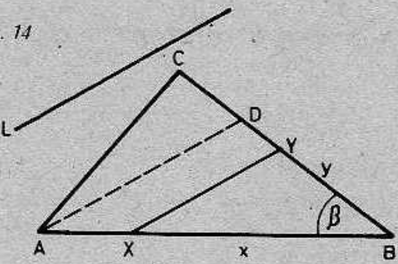
Se construye $2d^2 = u^2$ ($u = \frac{1}{2}$ proporción geométrica entre $2d$ y d o hipotenusa de un △ rectángulo isósceles de catetos = d).

Se obtiene: $x = \frac{s \pm \sqrt{u^2 - s^2}}{2}$, etc.

9) Dividir un $\triangle$ dado en dos partes equivalentes por medio de una recta que tenga una dirección dada L.

Análisis (Fig. 14): Sea L la dirección dada y XY la recta pedida. Trazando por A la // a L el punto D es fijo y por lo tanto se conocen DC y DB = m. Designemos BX = x y BY = y. Luego podemos escribir:

Fig. 14



1) $\frac{x}{y} = \frac{c}{m}$ (pues $\triangle$ DAB $\sim$ $\triangle$ YXB).

Además, según Teorema c, N° 341, el $\triangle$ ABC y el $\triangle$ XBY tienen el $\measuredangle\beta$ común; luego:

2) $\frac{\triangle XBY}{\triangle ABC} = \frac{xy}{a \cdot c} = \frac{1}{2}$

(porque XY dimidia al $\triangle$ ABC).

Multiplicando las igualdades 1) y 2) miembro a miembro resulta:

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{xy}{ac} = \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{m}$$

luego: $x^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{c^2 \cdot a}{m} = \frac{a}{2} \cdot \frac{c^2}{m}$

En esta expresión se construye primero $\frac{c^2}{m} = u$ como tercera proporcional geométrica $\frac{m}{c} = \frac{c}{u}$.

Resulta: $x^2 = \frac{a}{2} \cdot u$ ($x = \frac{1}{2}$ p. geométrica entre $\frac{a}{2}$ y u).

10) Construir un cuadrado dada la suma *s* de su lado y su diagonal.

Análisis **(Fig. 15): Sea AB = x, por lo tanto** $\overline{BD} = x\sqrt{2}$.

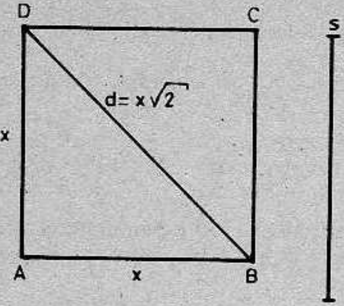
La condición es que: diagonal + lado = s.

O sea: $x\sqrt{2} + x = s$

$x(\sqrt{2} + 1) = s$

$x = \frac{s}{\sqrt{2}+1}$; se racionaliza el denominador amplificando por $(\sqrt{2} - 1)$.

Fig. 15



Queda: $x = s(\sqrt{2} - 1)$.

$x = s\sqrt{2} - s$; se construye $s\sqrt{2} = u$

(u = diagonal de cuadrado de lado *s*)

resulta $x = u - s$.

Construcción (Fig. 16):

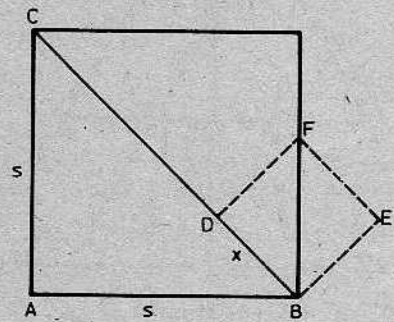


Fig. 16

1) $\overline{AB} = \overline{AC} = s$

2) $\overline{BC} = s\sqrt{2} = u$

3) ⊙ (C, s) determinar D.

resulta: $\overline{BD} = u - s = x$ (lado del cuadrado pedido).

Luego: DBEF es el cuadrado pedido.

11) Construir un $\triangle$ equilátero dada la suma *s* de su lado y su altura.

Análisis **(Fig. 17): Sea el lado = 2x, luego, la altura** $h = x\sqrt{3}$.

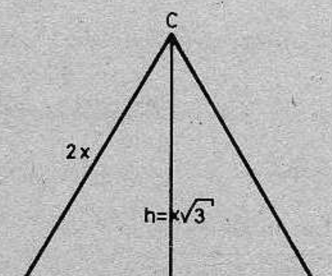


Fig. 17

La condición es que:

lado + altura $= s$

$2x + x\sqrt{3} = s$

$x(2 + \sqrt{3}) = s$

$$x = \frac{s}{2 + \sqrt{3}};$$

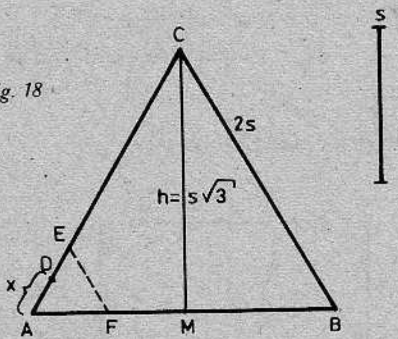
se racionaliza el denominador amplificando por $(2 - \sqrt{3})$.

Resulta: $x = s(2 - \sqrt{3})$

$x = 2s - s\sqrt{3}$; se construye $s\sqrt{3} = h$ (h = altura de un △ equilátero de lado $2s$)

finalmente: $x = 2s - h$.

Fig. 18



Construcción (Fig. 18):

1) $\overline{AB} = 2s = \overline{AC} = \overline{BC}$

2) $\overline{CM} = s\sqrt{3}$

3) ⊙ $(C, \overline{CM})$ determinar D.

Resulta: $\overline{DA} = 2s - h = x$

Luego $\overline{AE} = 2x$ (lado del △ equilátero, AFE pedido).

12) Construir un △ equilátero dada la diferencia $\underline{d}$ de su lado y su altura.

Análisis (Fig. 17): **Es análogo al anterior:** lado $= 2x$; altura $= x\sqrt{3}$.

Luego: $2x - x\sqrt{3} = d$

resulta: $x = d(2 + \sqrt{3})$

$x = 2d + d\sqrt{3}$; etc.

13) Construir un △ equilátero dada su área a^2.

Análisis (Fig. 18): Sea lado $= 2x$; altura $x\sqrt{3}$.

Como el área de △ es $= \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$, resulta:

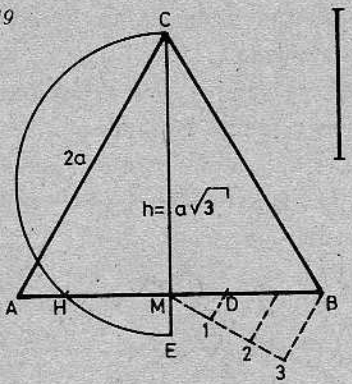
$$\frac{2x \cdot x\sqrt{3}}{2} = a^2$$

$x^2 = \frac{a^2}{\sqrt{3}}$; se amplifica por $\sqrt{3}$

$x^2 = \frac{a}{3} \cdot a\sqrt{3}$ ($x = \frac{1}{2}$ proporcional geométrica entre $\frac{a}{3}$ y $a\sqrt{3}$).

Construcción (Fig. 19):

Fig. 19



1) $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} = 2a$

2) $\overline{CM} = a\sqrt{3}$

3) $\overline{MD} = \frac{a}{3}$

4) Se prolonga $\overline{CM}$ en $\overline{ME} = \frac{a}{3}$

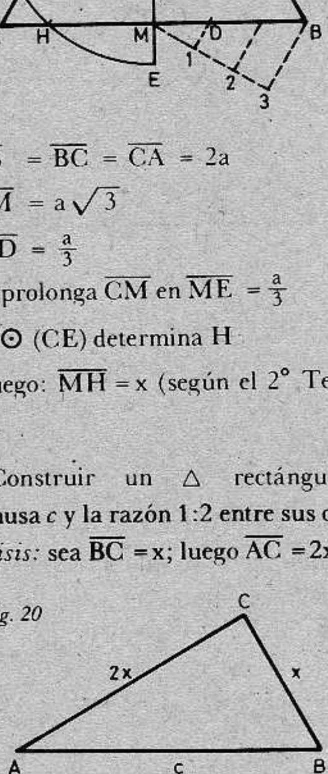
5) $\frac{1}{2}$ ⊙ (CE) determina H

6) Luego: $\overline{MH} = x$ (según el 2° Teorema de Euclides).

14) Construir un △ rectángulo dadas **la hipotenusa *c* y la razón 1:2 entre sus catetos.**

Análisis: sea $\overline{BC} = x$; luego $\overline{AC} = 2x$ (Fig. 20).

Fig. 20



Por Teorema de Pitágoras se tiene:

$(2x)^2 + x^2 = c^2$

resulta: $x^2 = \frac{c^2}{5} = c \cdot \frac{c}{5}$ ($x = \frac{1}{2}$ proporcional geométrica entre c y $\frac{c}{5}$).

Construcción (Fig. 21):

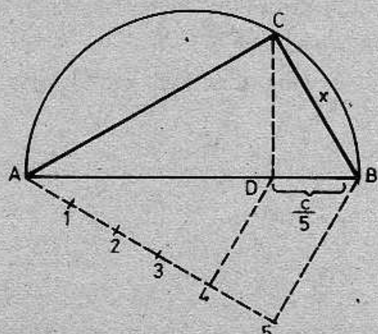


Fig. 21

1) $\overline{AB} = c$; $\overline{BD} = \frac{c}{5}$

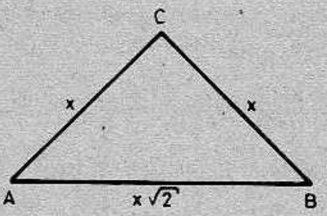
2) $\frac{1}{2}$ ⊙ ($\overline{AB}$) y ⊥ en D determinar C.

3) $\overline{BC} = x$ (según el 1er Teorema de Euclides).

15) Construir un △ rectángulo isósceles dado su perímetro = 2s.

Análisis (Fig. 22):

Fig. 22



Sea catetos = x, luego la hipotenusa = $x\sqrt{2}$. La condición es que:

$$\overline{AC} + \overline{BC} + \overline{AB} = 2s$$

$$2x + x\sqrt{2} = 2s$$

$$x = \frac{2s}{2+\sqrt{2}} \text{ se amplifica por } (2-\sqrt{2})$$

resulta: $x = \frac{\cancel{2}s(2-\sqrt{2})}{\cancel{2}} = 2s - s\sqrt{2}$;

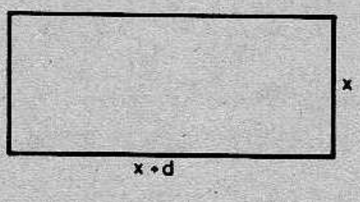
se construye $s\sqrt{2} = u$ como hipotenusa de un △ rectángulo isósceles de catetos = s.

Luego: $x = 2s - u$

16) Transformar un cuadrado dado a^2 en un rectángulo, de modo que la diferencia de sus lados sea = d.

Análisis (Fig. 23):

Fig. 23



Sea x = lado menor; luego el lado mayor es $= x + d$; área del cuadrado $= a^2$

área del rectángulo $= x(x+d)$

$$x \cdot (x+d) = a^2$$

$$x^2 + dx - a^2 = 0$$

$$x = -\frac{d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + a^2}$$

se construye $\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + a^2} = u$ (u = hipotenusa, según Teorema de Pitágoras).

Resulta: $x = -\frac{d}{2} \pm u \begin{cases} x' = u - \frac{d}{2} \\ x'' = -u - \frac{d}{2} \end{cases}$

(no es solución geométrica).

17) Transformar un △ equilátero de lado *a* en un cuadrado.

Análisis:

lado del △ equilátero	$= a$
altura del △ equilátero	$= \frac{a}{2}\sqrt{3}$
área del △ equilátero	$= \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3}$
lado del cuadrado	$= x$
área del cuadrado	$= x^2$

Luego, la equivalencia da: $x^2 = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3}$, lo que indica que *x* es $\frac{1}{2}$ proporción geométrica entre $\frac{a}{2}$ y $\frac{a}{2}\sqrt{3}$.

Construcción (Fig. 24):

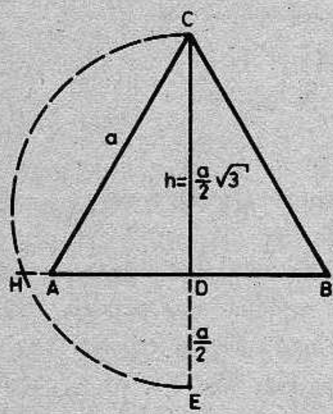


Fig. 24

1) $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} = a$

2) $\overline{CD} = \frac{a}{2}\sqrt{3} = h$

3) $\overline{DE} = \frac{a}{2}$

4) $\frac{1}{2}$ ⊙ ($\overline{CE}$) y $\overline{DA} \rightarrow$ A det. H.

Resulta: $\overline{DH} = x$ (lado del cuadrado pedido).

18) Transformar un △ dado en △ equilátero. (Del △ se dan sólo los 3 lados, *a*, *b*, *c*).

Análisis: Ambos △ deben tener la misma área, o sea:

$$A(\triangle \text{ dado}) = \sqrt{s \cdot (s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$A(\triangle \text{ equilátero}) = \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2}\sqrt{3} = \frac{x^2}{4}\sqrt{3}$$

siendo x = el lado del △ equilátero.

Luego: $\frac{x^2}{4}\sqrt{3} = \sqrt{s \cdot (s-a)(s-b)(s-c)}$

se construye: $s\cdot(s-a) = u^2$ ($\frac{1}{2}$ proporc. geométrica)

$(s-b)(s-c) = v^2$ ($\frac{1}{2}$ proporc. geométrica)

de donde: $\frac{x^2}{4}\sqrt{3} = \sqrt{u^2\cdot v^2}$

$$x^2\sqrt{3} = 4uv$$

$$x^2 = \frac{4uv}{\sqrt{3}} \text{ (se amplifica por } \sqrt{3})$$

$$x^2 = \frac{4}{3}u\cdot v\sqrt{3}$$

se construye $v\sqrt{3} = z$ (z = altura $\triangle$ equilátero de lado $2v$).

Finalmente: $x^2 = \frac{4}{3}u\cdot z$ ($x = \frac{1}{2}$ proporc. geométrica).

Observación: Si se conocen todos los elementos del $\triangle$ dado, su área es $A = \frac{1}{2}c\cdot h_c$

luego: $\frac{x^2}{4}\sqrt{3} = \frac{1}{2}c\cdot h_c$

$$x^2\sqrt{3} = 2c\cdot h_c$$

$$x^2 = \frac{2}{3}c\cdot h_c\sqrt{3}$$

Se construye $h_c\cdot\sqrt{3} = y$ (y = altura de $\triangle$ equilátero de lado $2h_c$).

Luego: $x^2 = \frac{2}{3}c\cdot y$

($x = \frac{1}{2}$ proporcional geométrica).

19) Dividir un trapecio dado en dos partes equivalentes mediante una paralela a las bases. (Se dan sólo los 4 lados del trapecio).

Análisis (Fig. 25): Sea x = paralela FH pedida. Comparando los $\triangle$ semejantes ABE y FHE se obtiene:

$$\frac{\triangle ABE}{\triangle FHE} = \frac{a^2}{x^2} \text{ (se descompone)}$$

$$\frac{\triangle ABE - \triangle FHE}{\triangle FHE} = \frac{a^2 - x^2}{x^2}$$

luego:

$$1)\ \frac{\text{trapecio ABHF}}{\triangle FHE} = \frac{a^2 - x^2}{x^2}$$

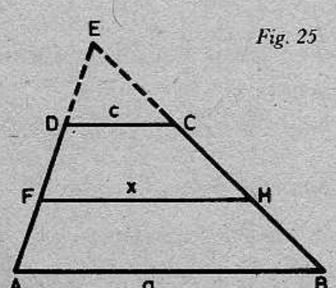


Fig. 25

Comparando los $\triangle$ FHE $\sim$ $\triangle$ DCE, se obtiene:

$$\frac{\triangle FHE}{\triangle DCE} = \frac{x^2}{c^2} \text{ (se descompone)}$$

$$\frac{FHE - \triangle DCE}{\triangle FHE} = \frac{x^2 - c^2}{x^2}$$

luego:

$$2)\ \frac{\text{trapecio FHCD}}{\triangle FHE} = \frac{x^2 - c^2}{x^2}$$

Dividiendo miembro a miembro las igualdades 1) y 2) resulta:

$$\frac{\text{trapecio ABHF}}{\text{trapecio FHCD}} = \frac{a^2 - x^2}{x^2 - c^2}$$

primer miembro = 1, luego $1 = \frac{a^2 - x^2}{x^2 - c^2}$

de la cual se obtiene: $x^2 = \frac{a^2 + c^2}{2}$ que es fácil de construir:

$$a^2 + c^2 = u^2 \text{ (Pitágoras)}$$

$$x^2 = \frac{u^2}{2} \text{ (} \tfrac{1}{2} \text{ proporcional geométrica).}$$

20) Inscribir en un cuadrado dado, otro que tenga por lado c.

Análisis (Fig. 26): Sea *a* el lado del cuadrado dado ABCD y $c = \overline{EF}$ el lado del cuadrado pedido.

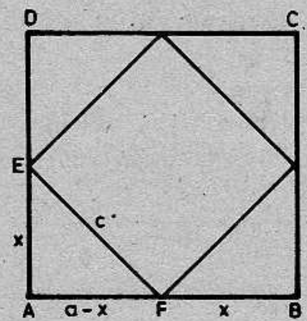


Fig. 26

Entonces: $\overline{FB} = x$; $\overline{AF} = a - x$.

Se aplica el Teorema de Pitágoras $\triangle$ AFE:

$x^2 + (a-x)^2 = c^2$; se obtiene:

$$2x^2 - 2ax + (a^2 - c^2) = 0$$

Resolviendo esta ecuación por la fórmula simplificada, resulta:

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 2(a^2 - c^2)}}{2}$$

$$x = \frac{a \pm \sqrt{2c^2 - a^2}}{2};$$

en esta expresión se construye primero $u^2 = 2c \cdot c$ ($\frac{1}{2}$ p. geométrica); después:

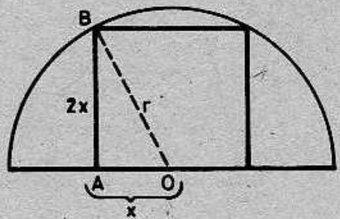
$\sqrt{u^2 - a^2} = v$ (Corolario de Pitágoras)

Finalmente: $\begin{cases} x' = \frac{a+v}{2} \\ x'' = \frac{a-v}{2} \end{cases}$

21) Inscribir un cuadrado en un semicírculo dado.

Sea $2x$ = lado del cuadrado (Fig. 27).

Fig. 27



Luego: $(2x)^2 + x^2 = r^2$

$5x^2 = r^2$

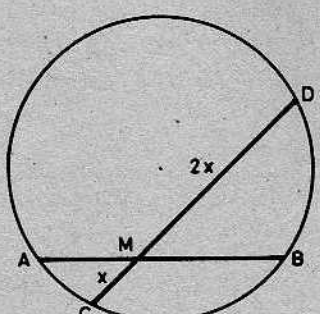
$x^2 = \frac{r}{5} \cdot r$ ($x = \frac{1}{2}$ proporc. geom.).

(Observación: resuélvalo por homotecia).

22) En un círculo dado se ha trazado una cuerda de longitud dada *a*. Trazar por el punto medio de esta cuerda, otra cuerda, de modo que sus segmentos estén en la razón 1 : 2.

Análisis (Fig. 28): Sea $\overline{AB} = a$; $\overline{CM} = x$; $\overline{MD} = 2x$.

Fig. 28



Según el Teorema XCV (N° 313).

$\overline{CM} \cdot \overline{MD} = \overline{AM} \cdot \overline{MB}$

$x \cdot 2x = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}$

$2x^2 = \frac{a^2}{4}$

$x^2 = \frac{a^2}{8}$

$x^2 = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{4}$ ($\frac{1}{2}$ proporc. geométrica).

23) Se ha trazado a un círculo dado una tangente de longitud dada t; trazar desde el extremo de la tangente una secante que queda dimidiada por la circunferencia.

Análisis: Sea $\overline{PA} = t$; $\overline{PM} = \overline{MB} = x$. Según el Teorema de la tangente y la secante, resulta (N° 312):

$\overline{PA}^2 = \overline{PB} \cdot \overline{PM}$ (Fig. 29)

$t^2 = 2x \cdot x$

$x^2 = \frac{t}{2} \cdot t$ ($x = \frac{1}{2}$ p. geométrica).

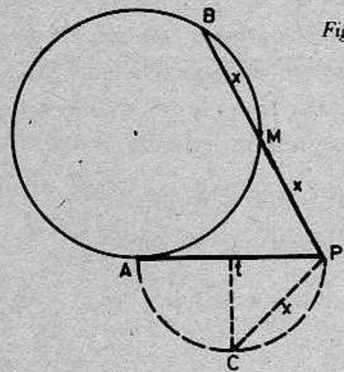


Fig. 29

Construcción:

1) Se dimidia $\overline{AP}$.

2) Semi ⊙ ($\overline{AP}$) y ⊥ en su centro determina C.

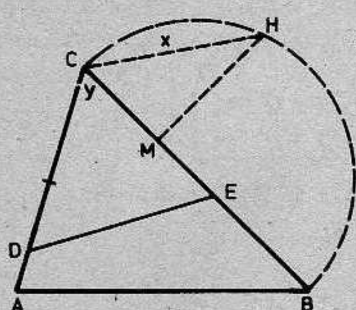
3) $\overline{PC} = x$..

4) ⊙ (P, $\overline{PC}$) determina M.

24) Dimidiar un △ por una recta, de modo que se determine un triángulo isósceles.

Análisis (Fig. 30): Sea $\overline{CD} = \overline{CE} = x$.

Fig. 30



Según Teorema C (N° 341) se tiene al comparar el △ ABC con el △ DEC, que tienen el ∡γ común:

$$\frac{\triangle DEC}{\triangle ABC} = \frac{x \cdot x}{a \cdot b}$$

pero $\frac{\triangle DEC}{\triangle ABC} = \frac{1}{2}$

luego: $\frac{x^2}{ab} = \frac{1}{2}$ de donde

$x^2 = a \cdot \frac{b}{2}$ ($\frac{1}{2}$ p. geométrica).

Construcción:

1) semi ⊙ ($\overline{BC}$)

2) $\overline{CM} = \frac{1}{2}\overline{CA} = \frac{b}{2}$

3) ⊥ en M det. H

4) $\overline{CH} = x$

5) Con ⊙ (C, $\overline{CH}$) se determina E y D.

25) Desde un extremo de un diámetro de un círculo dado, trazar una secante de modo que la parte de ella comprendida entre la ⊙ y la tangente trazada en el otro extremo del diámetro, sea igual a un segmento dado *a*.

Análisis (Fig. 31):

Sea $\overline{AB} = d = 2r$; $\overline{PC} = a$

$\overline{PA} = x$; $\overline{BC} = y$.

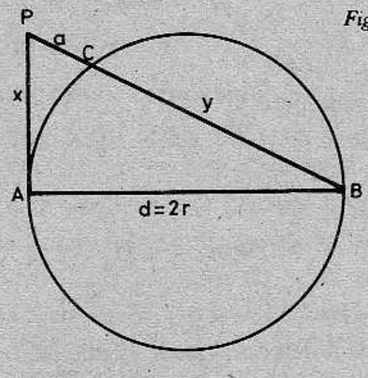


Fig. 31

Según el Teorema de la tangente y secante (N° 312), y después el Teorema de Pitágoras, se obtiene respectivamente:

$$x^2 = (a+y) \cdot a$$
$$x^2 = (a+y)^2 - d^2$$

$$\therefore (a+y)^2 - d^2 = (a+y) \cdot a$$

$$a^2 + 2ay + y^2 - d^2 = a^2 + ay$$

Queda: $y^2 + ay - d^2 = 0$

$y = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{(\frac{a}{2})^2 + d^2}$; se construye

$(\frac{a}{2})^2 + d^2 = u^2$ (Pitágoras)

luego: $y = -\frac{a}{2} \pm u$ de donde: $\begin{cases} y' = u - \frac{a}{2} \\ y'' = -u - \frac{a}{2} \end{cases}$

(no es solución geométrica).

(Observación: haga el desarrollo si $\overline{PB} = y$; $\overline{PA} = x$).

26) Dividir un triángulo en »n« partes equivalentes, por medio de paralelas a uno de los lados.

Análisis (Fig. 32): Sea, por ejemplo, n = 3 partes equivalentes, con lo cual $\overline{CD} = x$; $\overline{CF} = y$; △ DEC = trapecio FHED = trapecio ABHF.

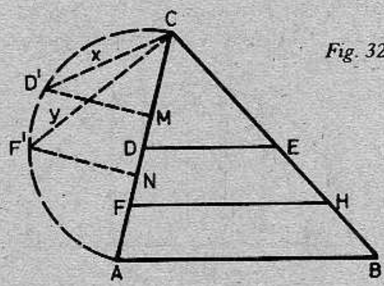


Fig. 32

Como se tiene que:

△ ABC ∼ △ FHC ∼ △ DEC

resulta aplicando el Teorema CI (N° 342).

$$\frac{\triangle DEC}{\triangle ABC} = \frac{\overline{CD}^2}{\overline{CA}^2} = \frac{x^2}{b^2}$$

pero $\frac{\triangle DEC}{\triangle ABC} = \frac{1}{3}$

luego:

1) $x^2 = \frac{1}{3} b^2 = \frac{1}{3} b \cdot b$

($\frac{1}{2}$ proporcional geométrica).

Análogamente: $\frac{\triangle FHC}{\triangle ABC} = \frac{\overline{CF}^2}{\overline{CA}^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{2}{3}$

o sea: $y^2 = \frac{2}{3} b^2 = \frac{2}{3} b \cdot b$ ($\frac{1}{2}$ p. geométrica).

Construcción:

1) Se divide $\overline{AC}$ en 3 partes iguales: $\overline{CM} = \overline{MN} = \overline{NA}$.

2) Se dibuja la semi ⊙ ($\overline{AC}$) y las ⊥ en M y N que determina D' y F'; por lo tanto $\overline{CD'} = x$; $\overline{CF'} = y$.

3) Con ⊙ (C, $\overline{CD'}$) y ⊙ (C, $\overline{CF'}$) se determina D y F.

27) Determinar sobre la prolongación de un diámetro $\overline{AB}$ de un círculo un punto X, de modo que la tangente $\overline{XY}$ trazada desde él, sea igual al duplo de la distancia $\overline{XB}$ del punto a la circunferencia.

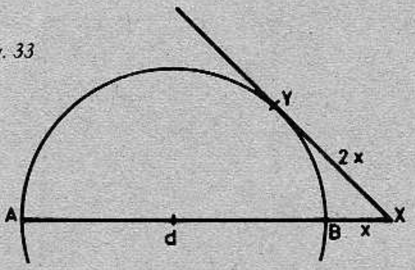
Análisis (Fig. 33):

Sea $\overline{AB} = d$

$\overline{BX} = x$

$\overline{XY} = 2x$

Fig. 33



El Teorema de la tangente y la secante, da:

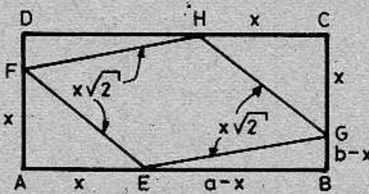
$$(2x)^2 = (x + d) \cdot x$$
$$4x^2 = x^2 + dx$$
$$3x^2 - dx = 0$$
$$x(3x - d) = 0$$
$$x' = 0$$
$$3x - d = O$$
$$x'' = \frac{d}{3}$$

28) Inscribir en un rectángulo dado un rombo, de modo que de los cuatro triángulos determinados dos opuestos sean isósceles.

Análisis (Fig. 34): Sea $\overline{AE} = \overline{AF} = \overline{CG} = \overline{CH} = x$; luego: $\overline{EF} = x\sqrt{2}$.

$\overline{EB} = a - x$; $\overline{BG} = b - x$

Fig. 34



Aplicando el Teorema de Pitágoras al $\triangle$ EBG resulta:

$$(x\sqrt{2})^2 = (a - x)^2 + (b - x)^2$$
$$2x^2 = a^2 - 2ax + x^2 + b^2 - 2bx + x^2$$

de donde se obtiene: $x = \dfrac{a^2 + b^2}{2(a + b)}$

Se construye $a^2 + b^2 = e^2$ (Diagonal $\overline{AC}$ del rectángulo ABCD)

además $2 \cdot (a + b) = z$

de donde $x = \frac{e^2}{z}$ (3ª proporción geométrica).

29) Inscribir en un cuadrado dado un rectángulo cuya área sea igual a p^2.

Análisis (Fig. 35): Sea $\overline{AB} = a$; $\overline{AE} = x$; $\overline{EB} = a - x$.

$\overline{EF} = x\sqrt{2}$; $\overline{EG} = (a - x)\sqrt{2}$

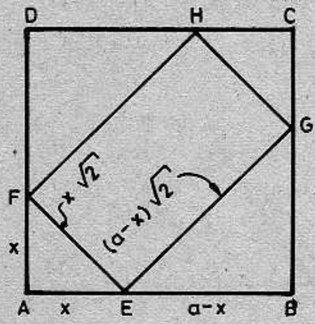


Fig. 35

La condición es que: $\overline{EF} \cdot \overline{EG} = p^2$; o sea:

$$x\sqrt{2} \cdot (a - x)\sqrt{2} = p^2$$
$$2ax - 2x^2 = p^2$$
$$2x^2 - 2ax + p^2 = O /: 2$$
$$x^2 - ax + \frac{p^2}{2} = O$$

$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{(\frac{a}{2})^2 - \frac{p^2}{2}}$; se construye $\frac{p^2}{2} = u^2$

($\frac{1}{2}$ proporción geométrica)

de donde: $x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{(\frac{a}{2})^2 - u^2}$;

pero $(\frac{a}{2})^2 - u^2 = v^2$ (Corolario de Pitágoras)

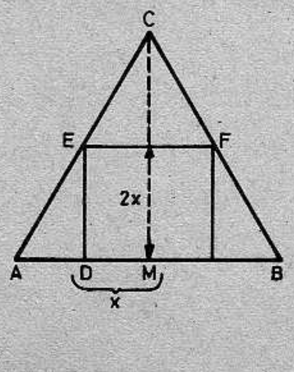
luego: $\begin{cases} x' = \frac{a}{2} + v \\ x'' = \frac{a}{2} - v \end{cases}$

30) Inscribir un cuadrado en un triángulo equilátero.

Análisis (Fig. 36): Sea 2a el lado del $\triangle$ ABC, luego $\overline{CM} = a\sqrt{3}$. Sea 2x el lado del cuadrado pedido.

$$\triangle\ MCA \sim DEA$$
$$\therefore \frac{CM}{DE} = \frac{AM}{AD}$$
$$\frac{a\sqrt{3}}{2x} = \frac{a}{a - x}$$

Fig. 36

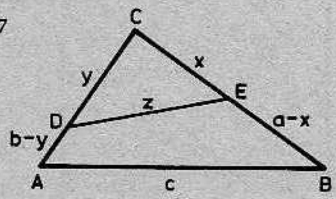


$2x = \sqrt{3}\,(a - x)$ de donde: $x = \frac{a\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$ amplificando por $(2 - \sqrt{3})$. Resulta: $x = 2a\sqrt{3} - 3a$. Sea $2a\sqrt{3} = y$; luego $x = y - 3a$.

31) Cortar un triángulo por una recta de modo que las dos partes resultantes sean iguales en área y en perímetro.

Análisis (Fig. 37): Sea $\overline{CE} = x$; $\overline{CD} = y$; $\overline{DE} = z$.

Fig. 37



Luego:

$x + y + z = z + (a - x) + (b - y) + c$

de donde: $2(x + y) = a + b + c = 2s$

1) $x + y = s$

Además se tiene (N° 341):

$$\frac{\triangle DEC}{\triangle ABC} = \frac{x \cdot y}{ab} = \frac{1}{2}$$

luego:

$$\left.\begin{array}{l} 2)\ \ 2xy = ab \\ 1)\ x + y = s \end{array}\right|$$

Al resolver este sistema se obtiene:

$$\begin{cases} x = \dfrac{s + \sqrt{s^2 - 2ab}}{2} \\ y = \dfrac{s - \sqrt{s^2 - 2ab}}{2} \end{cases}$$

400. DUPLICACION DEL CUBO

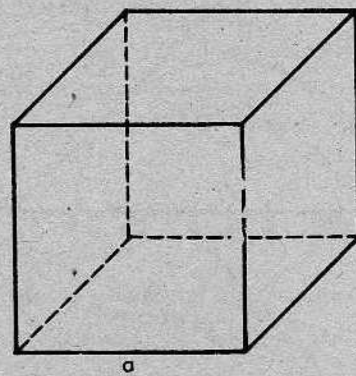
Este es otro de los problemas clásicos de los matemáticos de la Antigua Grecia y que se ha tratado durante siglos resolverlo sólo con »regla y compás«. No se le ha encontrado solución exacta hasta ahora.

A continuación daré una solución muy sencilla y al alcance de los alumnos de secundaria.

Designando por »x« el lado del cubo que tiene un volumen doble que un cubo dado de arista »a«, debe verificarse:

$x^3 = 2 \cdot a^3$

Fig. 38



De aquí obtenemos:

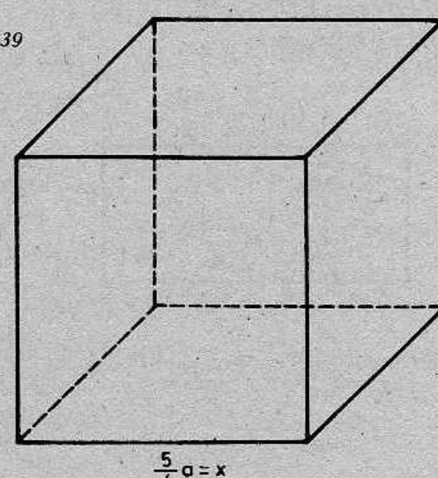
$x = a \cdot \sqrt[3]{2}\ (=)\ 1{,}25 \cdot a$

Es decir: $x\ (=)\ \frac{5}{4} \cdot a$

Por lo tanto, para obtener la arista del nuevo cubo basta sumar la cuarta parte la arista del cubo dado (Fig. 39).

Calcule usted el % de error que se comete con esta solución.

Fig. 39



 Patricio Saavedra

ESTEREOMETRÍA

Arquímedes de Siracusa

Este destacado hombre de ciencias griego debió vivir entre los años 287 a 212 antes de JC. Fue un sobresaliente matemático, físico e ingeniero de la época en que le tocó vivir.

Tanto en la matemática elemental como en la superior su contribución al desarrollo y ampliación de conceptos fue de gran importancia. Así, al estudiar los polígonos regulares, logró demostrar para el de 96 lados, que el valor de π está comprendido entre los límites $3\frac{10}{70}$ y $3\frac{10}{71}$. Por lo tanto, tenía la idea de »límite« tan necesaria en las matemáticas superiores.

Conoció las cónicas. Para la elipse encontró que su área $A = \pi \cdot ab$ en la cual a y b son los semiejes de ella.

Con su »método aproximado« dio los primeros pasos en el concepto de »límite« que servirá para el nacimiento y desarrollo posterior del Cálculo infinitesimal.

Su contribución en la Física es igualmente notable en las máquinas simples, en el tornillo de Arquímedes, etc. Célebre es su frase: »Dadme un punto de apoyo y levantaré el mundo«.

Asimismo, sus conocimientos de hidrostática lo llevaron a enunciar el conocido Principio de Arquímedes: »todo cuerpo sumergido en un líquido disminuye aparentemente de peso en lo mismo que pesa el líquido desalojado por el cuerpo«.

Posición relativa de rectas. Posición relativa de planos. Puntos colineales y coplanarios. Rectas coplanarias. Angulo diedro. Angulo sólido.

401. Etimológicamente, estereometría viene de las voces griegas: stereo = sólido, metron = medida. Corresponde, por lo tanto, a la parte de la Geometría que trata de la medición de sólidos, de los cuerpos, del espacio limitado por superficies.

En los Nºˢ 2 al 5 ya vimos someramente lo relativo a superficies y planos. Resumiendo lo expresado allí podemos decir que la *recta* y el *plano* son conjuntos de puntos y que el *espacio* es el conjunto de todos los puntos. Por lo tanto, las rectas, los planos y las superficies curvas son subconjuntos del espacio pues pertenecen a él. Al unir dos puntos cualesquiera de una superficie plana se determina una recta cuyos puntos pertenecen completamente al plano. Esto no sucede en una superficie curva salvo que se trate de las generatrices.

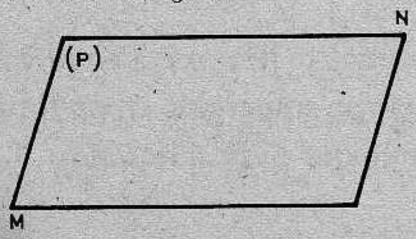
En general, un *plano* es una superficie plana ilimitada que puede quedar determinado:

A) por tres puntos no colineales;
B) por una recta y un punto fuera de ella;
C) por los lados de un ángulo cuyos lados no sean colineales;
D) por dos rectas convergentes;
E) por dos rectas paralelas.

En una hoja de cuaderno o en el pizarrón se puede representar sólo una porción del plano pues éste es ilimitado.

En la práctica vemos corrientemente porciones rectangulares de planos como lo son una pared, una hoja de cuaderno, el pizarrón, la cubierta de un libro o de un pupitre, etc. Por esta razón se elige al rectángulo para representar a un plano, pero que, visto en perspectiva, aparece como un romboide (Fig. 1).

Fig. 1



El plano se designa, generalmente, con las letras M y N colocadas en dos vértices opuestos, o bien, con una letra (P).

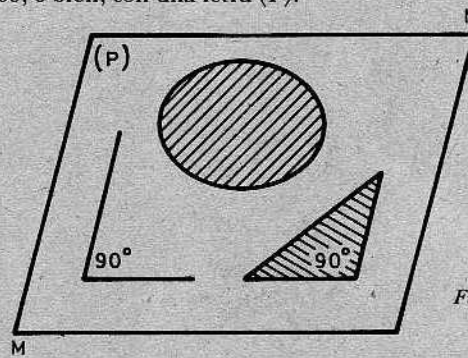


Fig. 2

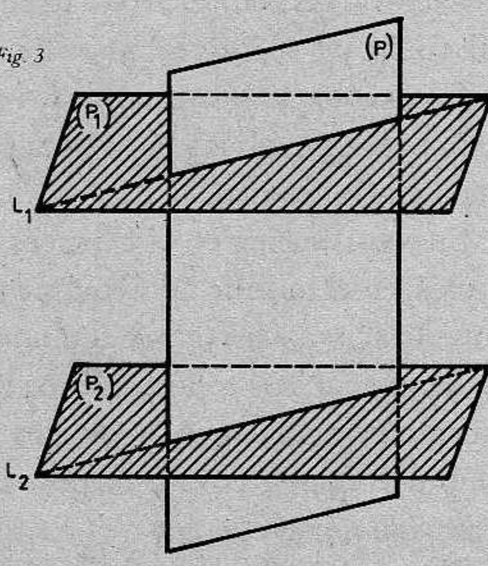
En esta representación gráfica del plano las figuras se ven deformadas. Así, en la figura 2, un ángulo recto se puede ver como agudo u obtuso, un círculo como una elipse, un triángulo rectángulo como acutángulo u obtusángulo, un cuadrado como rombo, etc.

402. POSICION RELATIVA DE DOS RECTAS

a) Pueden ser coincidentes y para ello basta que tengan dos puntos comunes.
b) Pueden ser paralelas en el espacio y para ello tienen que pertenecer a un mismo plano, sin tener puntos comunes:

$L_1 \wedge L_2 \in (P)$ (Fig. 3).

Fig. 3



c) Pueden cortarse y esto sucede cuando tienen sólo un punto común.

d) Pueden cruzarse y esto sucede cuando pertenecen a planos distintos sin tener puntos comunes. ¿Pueden tener puntos comunes?

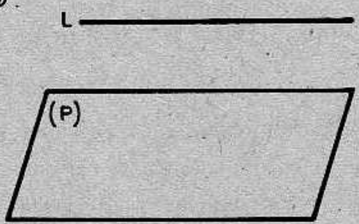
Si se dibuja una recta en el suelo de la sala y otra en el techo, ¿cómo pueden ser estas dos rectas?

403. POSICION RELATIVA DE UNA RECTA Y UN PLANO

I) En la figura 4 la recta L es paralela al plano (P). Por lo tanto, la intersección de esta recta con el plano es el conjunto vacío:

$L \cap (P) = \phi$.

Fig. 4

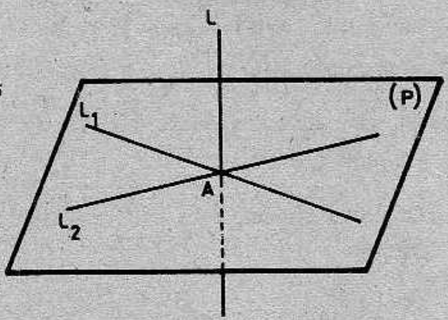


(Como L es paralela a una recta del plano, es preferible dibujar L paralela a un lado horizontal de la representación del plano).

II) En la figura 5 la recta L es perpendicular al plano (P) siendo A el pie de la perpendicular. Esta recta es también perpendicular a cualquier recta que pase por su pie.

Si $L \perp (P) \Rightarrow L \perp L_1 \wedge L_2$

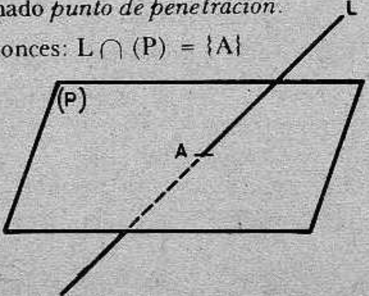
Fig. 5



III) En la figura 6, la recta L es oblicua al plano (P) y, por lo tanto, lo cortan en un punto A llamado *punto de penetración*.

Entonces: $L \cap (P) = \{A\}$

Fig. 6



404. PUNTOS COLINEALES. PUNTOS COPLANARIOS. RECTAS COPLANARIAS.

Los *puntos colineales* son los que están en una misma recta; es decir, existe una única recta que los contiene a todos.

Puntos coplanarios o coplanares son los que se encuentran en un mismo plano; es decir, existe un único plano que los contiene a todos.

Rectas coplanarias son las que pertenecen a un mismo plano.

405. EJERCICIOS

En los ejercicios siguientes coloque una "V" si lo que se afirma es verdadero o una »F« si es falso.

1) (. . .) Si se tienen cuatro puntos coplanarios y no colineales, el máximo de rectas que pueden trazarse por ellos es 6.

2) (. . .) Si se tienen cinco puntos coplanarios y no colineales, el máximo de rectas que pueden trazarse por ellos es 10.

3) (. . .) Si se tienen »n« puntos coplanarios y no colineales, el máximo de rectas que pueden trazarse por ellos es:

$$n + \frac{n}{2}(n - 3) = \frac{n}{2}(n - 1)$$

4) (. . .) El mínimo de puntos coplanarios y no colineales que puede contener un plano es 3.

5) (. . .) El mínimo de puntos no coplanarios que puede contener el espacio es 4.

Las preguntas 6 a 21 se refieren a la figura 7:

6) (. . .) Los puntos A, B, C y D son coplanarios pero no colineales.

7) (. . .) Los puntos A, E e I son colineales.

8) (. . .) Los puntos A, B, E, F e I son coplanarios.

9) (. . .) Las rectas $\overleftrightarrow{DA}$ y $\overleftrightarrow{EH}$ son coplanarias.

10) (. . .) Los puntos B y D son colineales.

11) (. . .) Los puntos A, B, F, I y E son colineales.

12) (. . .) Los puntos D, A, E, H e I son coplanarios.

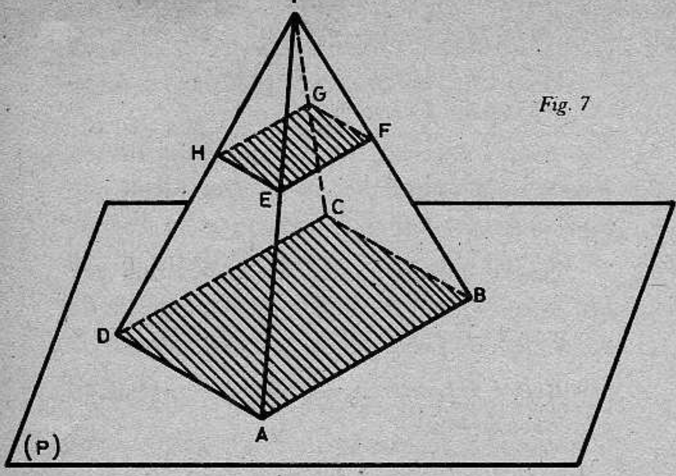


Fig. 7

13) (...) Las rectas $\overleftrightarrow{AI}$ y $\overleftrightarrow{BI}$ son coplanarias.

14) (...) Los puntos H, E y F son coplanares.

15) (...) (P) $\cap$ plano (EFI) = $\overleftrightarrow{AB}$

16) (...) Plano (ABFE) $\cap$ plano (HEI) = $\overleftrightarrow{AI}$

17) (...) plano (ABFE) $\cap$ plano (ADEH) $\cap$ plano (BCFGF) $\cap$ plano (DCGH) = ϕ.

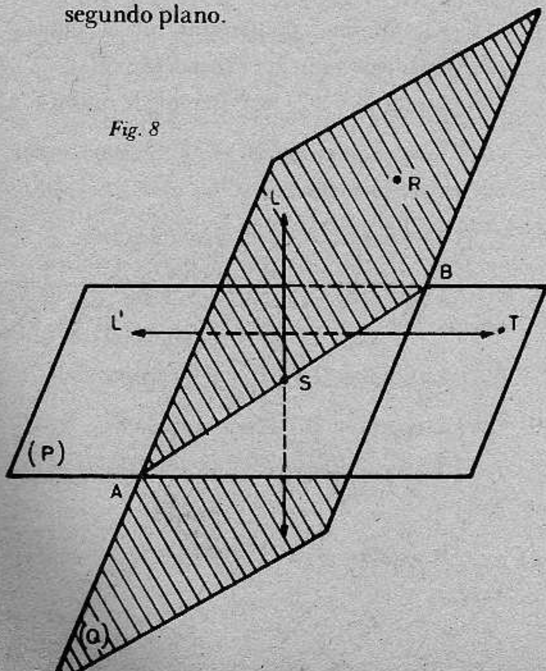
18) (...) Siempre dos rectas paralelas son coplanarias.

19) (...) Siempre dos rectas perpendiculares son coplanarias.

20) (...) Si el plano (ABCD) // plano (EFGH) $\Longrightarrow$ la intersección de ellos es el conjunto vacío.

21) (...) Si el plano (ABCD) // plano (EFGH) entonces cualquier recta que pertenezca al primer plano es paralela a toda recta del segundo plano.

Fig. 8



Las preguntas 22 a 30 corresponden a la figura 8.

22) (...) (P) $\cap$ (Q) = $\overleftrightarrow{AB}$

23) (...) S$\in\overleftrightarrow{AB}$ $\Rightarrow$ S$\in$(P) $\wedge$ (Q)

24) (...) $\overleftrightarrow{AB}$ $\in$ (P) $\wedge$ (Q)

25) (...) R$\in$(Q) $\wedge\notin$ (P)

26) (...) T$\in$(P) $\wedge\notin$(Q)

27) (...) L$\in$(Q) $\wedge$ L$\notin$(P)

28) (...) L $\cap$ (P) = {S}

29) (...) L $\cap$ $\overleftrightarrow{AB}$ = {S}

30) (...) L$\cap$ $\overleftrightarrow{AB}\notin$(P)

31) (...) L $\wedge$ L' se cruzan.

Resp.: Todas son verdaderas salvo las N° 11 - 17 - 21 - 30.

32) Se tienen en el espacio cuatro puntos no todos colineales ni todos coplanarios. Al distribuirlos y ubicarlos convenientemente, se puede determinar un máximo de:

A) 3 rectas y un plano;
B) 4 rectas y un plano;
C) 5 rectas y 3 planos;
D) 6 rectas y 4 planos;
E) 4 rectas y 6 planos.

33) Designando por L_1 y L_2 dos rectas, por P_1 y P_2 dos planos, se afirma que:

I) Si $P_1 \cap P_2 = \phi$, entonces $P_1 // P_2$

II) Si $P_1 \cap L_1 = L_1$, entonces $L_1 \in P_1$

III) Si $L_1 \wedge L_2 \in P_1$, $L_1 \cap L_2 = \phi$, entonces $L_1 // L_2$

De estas afirmaciones son verdaderas solamente:

A) I y II
B) I y III
C) II y III
D) las tres
E) ninguna.

34) Si L_1 y L_2 son dos rectas y A un punto, del plano o del espacio, se afirma que:

I) Si $L_1 \cap L_2 = \phi$ obligadamente debe ser $L_1 // L_2$

II) Si $L_1 \cap L_2 = \phi$ puede ser que $L_1 \wedge L_2$ se crucen.

III) Si $L_2 \cap L_2 = \{A\}$ significa que L_1 y L_2 se cortan.

De estas afirmaciones son verdaderas solamente:

A) I y II; B) I y III;
C) II y III; D) las tres;
E) ninguna.

35) Tres rectas no coincidentes de un plano al ubicarlos convenientemente en él, lo dividen en cierto número de regiones correspondientes a una de las siguientes alternativas:

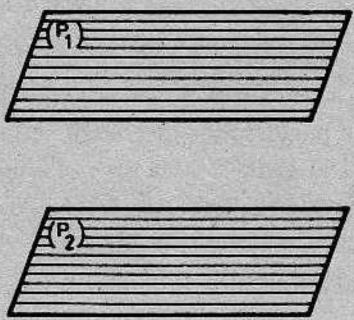
A) mínimo 3 regiones y máximo 6;
B) mínimo 2 regiones y máximo 7;
C) mínimo 6 regiones y máximo 6;
D) mínimo 4 regiones y máximo 7;
E) mínimo 4 regiones y máximo 6;

Resp.: 32 = D; 33 = D; 34 = C; 35 = D.

406. POSICION RELATIVA DE DOS PLANOS

I) En la figura 9 se han dibujado dos planos paralelos $(P_1) \parallel (P_2)$. Se representan por dos paralelogramos que tienen sus lados paralelos.

Fig. 9



II) En la figura 10 se repesentan dos planos secantes perpendiculares, es decir, se cortan formando los planos un ángulo recto:

$(P_1) \perp (P_2)$.

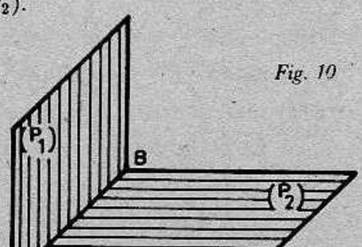
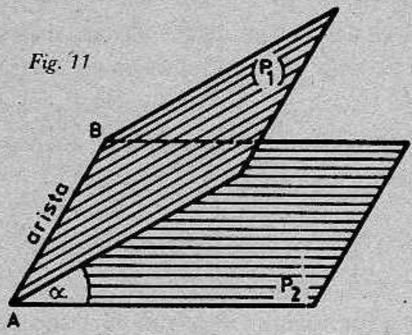


Fig. 10

III) La figura 11 representa, también, dos planos secantes pero oblícuos.

Fig. 11



IV) Los dos planos pueden ser coincidentes. Por lo tanto, todos los puntos que pertenecen a uno de los planos pertenecen al otro y vice versa.

Los casos correspondientes a las figuras 10 y 11, hacen ver que al cortarse dos planos lo hacen según una recta.

*407. ANGULO DIEDRO**

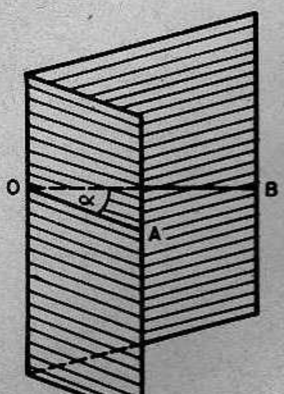
Es el ángulo que forman dos planos al cortarse. La recta que determinan los planos al cortarse es la *arista* del ángulo. Estos ángulos se designan con las letras de su arista. Así en las figuras 10 y 11 se lee "ángulo diedro $\overline{AB}$". También puede leerse: ángulo diedro $P_1\overline{AB}P_2$.

Las *caras* del diedro son los planos (P_1) y (P_2) que lo forman.

Se puede decir, también, que cuando un plano gira en torno a una recta del plano se engendra un ángulo diedro (Figs. 10, 11 y 12).

Se llama »*ángulo rectilíneo* correspondiente al diedro« al ángulo α formado por

Fig. 12



*Del griego: dis = dos, edra = plano.

dos perpendiculares trazadas en un punto O de la arista quedando cada perpendicular en un plano cada una. Este ángulo rectilíneo es la medida del ángulo diedro al cual pertenece. De esta manera, un ángulo diedro será recto cuando lo sea su ángulo rectilíneo y dos ángulos diedros serán congruentes cuando lo sean sus ángulos rectilíneos.

408. ANGULO POLIEDRO O ANGULO SOLIDO

Se da este nombre al ángulo formado por varios ángulos planos que tienen el mismo vértice y que, de dos en dos, tienen una arista común (Fig. 13).

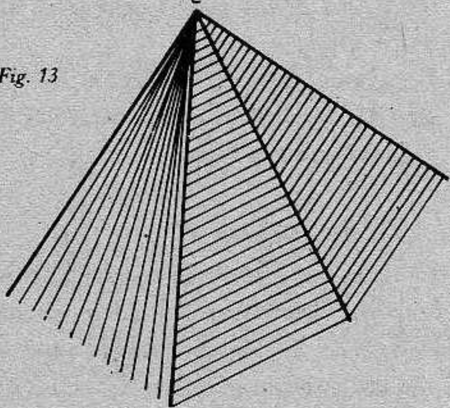


Fig. 13

El ángulo sólido más común es el *triedro* (Fig. 14), es decir, el formado por tres planos que forman sus tres caras. En cada rincón de una sala de clases tenemos un triedro (el ángulo está formado por dos paredes vecinas y el techo; etc.).

¿Cuántos diedros y aristas hay en un triedro?

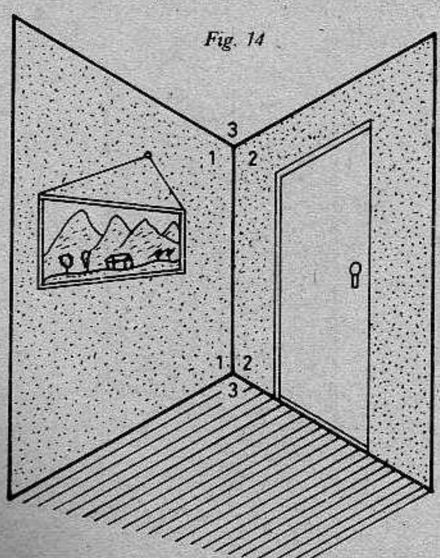


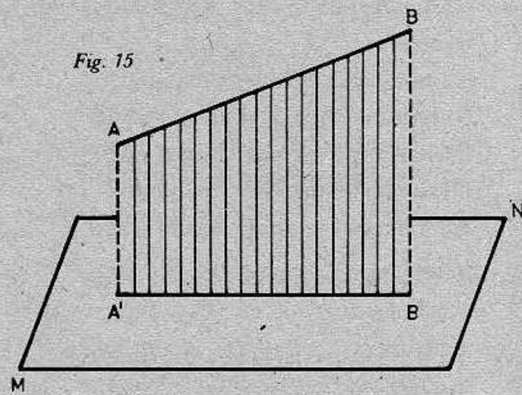
Fig. 14

409. PROYECCION DE PUNTOS Y RECTAS EN UN PLANO

La proyección de un punto sobre un plano es el pie de la perpendicular trazada del punto al plano.

La proyección de una recta sobre un plano es el conjunto de las proyecciones de todos los puntos de ella en el plano. Así, la proyección del trazo $\overline{AB}$ sobre el plano (MN) es el trazo $\overline{A'B'}$ siendo el *plano proyectante* (AB) perpendicular al *plano de proyección* (MN) (Fig. 15).

Fig. 15



¿Cuánto vale la proyección de un trazo que es paralelo al plano de proyección? ¿Y si es perpendicular a este plano?

410. EJERCICIOS

1) Dos puntos A y A' son simétricos con relación a un punto P del espacio cuando P es el punto medio del trazo $\overline{AA'}$. Por lo tanto, el punto P pasa a ser el centro de simetría. Haga usted un dibujo de una esfera y verifíquelo para los puntos de la superficie esférica.

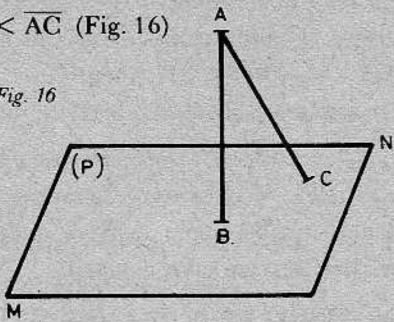
2) Dos puntos A y A' son simétricos respecto a una recta L del espacio cuando L es una de las infinitas simetrales del trazo $\overline{AA'}$. La recta L pasa a ser el eje de simetría. Represente gráficamente este caso.

3) Dos puntos A y A' son simétricos respecto a un plano (P) cuando este plano es perpendicular al trazo $\overline{AA'}$ en el punto medio de él. El plano pasa a ser el plano de simetría y cualquier punto de este plano equidista de A y A'. Represente este caso gráficamente y enúncielo como un L.G.

4) Si $\overline{AB}$ es perpendicular al plano (MN) y $\overline{AC}$ cualquier recta que pasa por A y corta al plano (P), demostrar que:

$\overline{AB} < \overline{AC}$ (Fig. 16)

Fig. 16



o dicho de otro modo: demostrar que la perpendicular de un punto a un plano es la menor distancia del punto al plano.

5) ¿Dónde se encuentran los puntos equidistantes del suelo y del »cielo« de una sala de clases?

6) ¿Dónde se encuentran los puntos equidistantes de dos paredes vecinas de una sala?

7) ¿Dónde se encuentran los puntos equidistantes de dos paredes paralelas de una sala?

8) Determinar los puntos que equidistan de una pared de la sala y de las dos paredes adyacentes a ella.

9) Determinar los puntos equidistantes del suelo y del techo de la sala y, al mismo tiempo, equidistantes de dos paredes vecinas.

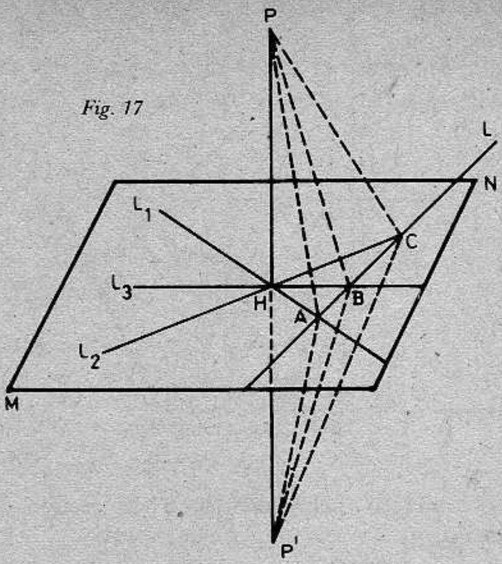
10) Determinar los puntos que equidistan del suelo y una pared de la sala y, al mismo tiempo, del suelo y del techo de ella.

11) ¿Cuál es el L.G. de todos los puntos del espacio que equidistan de dos puntos dados A y B? Grafique.

12) ¿Cuál es el L.G. de todos los puntos del espacio que están a una distancia dada »a« de una recta dada L? Grafique.

13) *Teorema C III.* Toda recta perpendicular a otras dos rectas que pasan por su pie en el plano, es perpendicular a cualquier recta que pasa por su pie (Fig. 17).

Fig. 17



H) $\overline{PH}$ es perpendicular a L_1 y L_2 que pertenecen a (MN);
L_3 es cualquier recta que pasa por el pie H; $L_3 \in$ (MN)

T.) $\overline{PH} \perp L_3$

D.) Se traza una recta L que corta a las tres anteriores en los puntos A, B y C. Se prolonga $\overline{PH}$ de modo que $\overline{HP'} = \overline{PH}$ y se une P' con A, B y C.

Se obtiene $\overline{CP} = \overline{CP'}$ por ser C un punto de la simetral de $\overline{PP'}$. Por igual razón se tiene $\overline{AP} = \overline{AP'}$. Con esto el $\triangle$ ACP $\cong$ $\triangle$ ACP' por tener sus tres lados respectivamente iguales.

De aquí se obtiene:

$$\measuredangle PAB = \measuredangle P'AB.$$

Con esto llegamos a que el

$$\triangle PAB \cong \triangle P'AB$$

por tener iguales dos lados y el ángulo comprendido por ellos.

Por lo tanto: $\overline{BP} = \overline{BP'}$; es decir, el punto B pertenece a la simetral de $\overline{PP'}$. Luego, $\overline{HB}$ es simetral de $\overline{PP'}$ porque tanto H como B equidistan de sus extremos. De aquí que $L_3 \perp \overline{PH}$.

14) *Teorema C IV:* Si una recta $\overleftrightarrow{RH}$ es perpendicular a un plano (MN) y desde el pie H se traza otra perpendicular $\overline{HB}$ a cualquier recta L del plano (P), la recta $\overleftrightarrow{RB}$

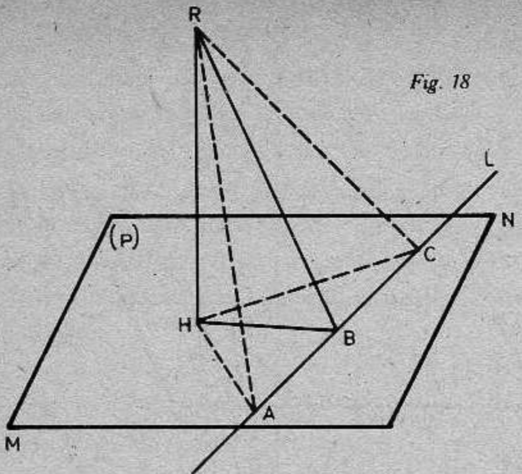


Fig. 18

es también perpendicular a la recta L. (Fig. 18).

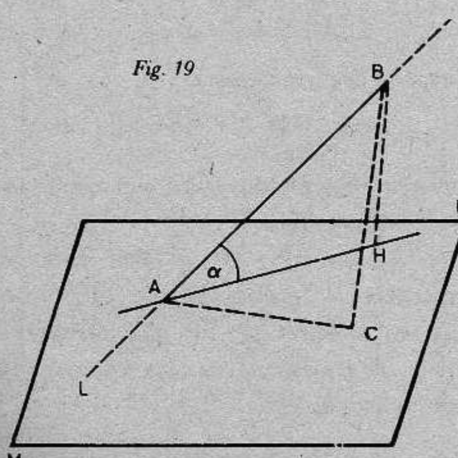
H.) $\overline{RH} \perp (P)$; $\overline{HB} \perp L$

T.) $\overline{RB} \perp L$

D.) Se hace $\overline{BA} = \overline{BC}$; como $\overline{HA} = \overline{HC}$ (por ser H un punto de la simetral $\overline{HB}$ de $\overline{AC}$), resulta: $\triangle RHA \cong \triangle RHC$
De aquí se obtiene: $\overline{RA} = \overline{RC}$
Luego: R equidista de los extremos del trazo $\overline{AC}$ y, por lo tanto, pertenece a la simetral de $\overline{AC}$, o sea: $\overline{RB} \perp \overline{AC}$

15) Si $\overleftrightarrow{AB}$ es una recta oblícua que corta al plano (MN) en un punto A, demostrar que el ángulo α que esta recta forma con su proyección en el plano (MN) es el menor ángulo que forma con cualquier otra recta del plano que pasa por A. (Fig. 19).

Fig. 19



D.) Siendo $\overline{BC}$ la perpendicular desde B al plano (MN), el trazo $\overline{AC}$ es la proyección de $\overline{AB}$ sobre el plano. Se traza por A una recta L y se hace $\overline{AH} = \overline{AC}$ uniéndose H con B.
En los triángulos ACB y AHB se sabe que tienen el lado común $\overline{AB}$ y, además, que $\overline{AH} = \overline{AC}$ y $\overline{BC} < \overline{BH}$, pues $\overline{BC} \perp (MN)$.
Por lo tanto: $\measuredangle BAC < \measuredangle BAH$

16) Un trazo $\overline{AB} = 26$ cm se proyecta sobre un plano (P). Si el extremo A está a 15 cm y B a 25 cm del plano, ¿cuánto mide la proyección del trazo sobre el plano?

17) Un ángulo diedro está formado por los planos (P) y (Q). Los puntos A y B de su arista están a 40 cm entre sí y a 25 cm del punto C $\in$ (Q). La distancia desde C al plano (P) mide 10 cm. Calcular la distancia del pie H al punto medio M de $\overline{AB}$.

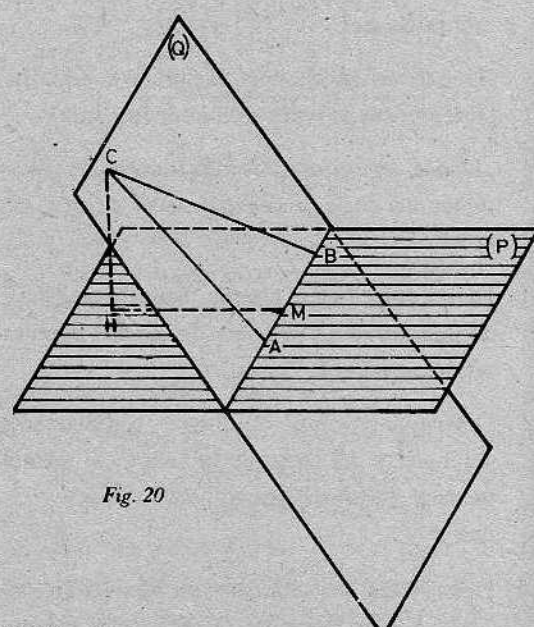


Fig. 20

18) Se afirma que:

I) Dos planos paralelos a un tercero son paralelos entre sí.

II) Dos planos perpendiculares a un tercero son perpendiculares entre sí.

III) Dos planos paralelos a una misma recta son paralelos entre sí.

De estas afirmaciones son verdaderas:

A) sólo I; B) sólo II;
C) sólo III; D) sólo I y III;
E) las tres.

Resp.: 16) 24 cm; 17) $5\sqrt{5}$ cm; 18) A.

37ª UNIDAD

Cálculo del área de la superficie y del volumen de un cuerpo. Poliedros. Principio de Cavalieri. Prismas. Pirámides. Cilindros. Conos. Esfera. Teorema de Eudoxio. Desarrollo de cuerpos geométricos.

---

411. Los cuerpos geométricos se clasifican en:

I) *Cuerpos poliédricos* que son limitados sólo por caras planas y

II) *Cuerpos redondos.* Limitados a lo menos por una superficie curva.

Poliedros regulares: son los que tienen todas sus caras y ángulos iguales. Son sólo cinco: el tetraedro, el exaedro, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro.

A su vez, en los poliedros se distingue el *tipo prisma* y el *tipo pirámide.*

Para calcular la superficie de un poliedro cualquiera basta sumar el área de cada una de sus caras.

Si el poliedro es regular basta multiplicar el número de caras por la superficie de una de ellas.

Entre los cuerpos redondos estudiaremos el cilindro, el cono y la esfera.

Abreviaciones para la medida de:

S_l	= superficie lateral
S_b o B	= superficie basal
S_t	= superficie total
l	= arista lateral
a	= arista basal
2s	= perímetro basal
s	= semiperímetro basal
h	= altura del cuerpo
ρ	= apotema lateral
r	= radio de la ⊙ circunscrita a la base.

412. PRINCIPIO DE CAVALIERI

a) Dos o más cuerpos que tienen secciones equivalentes en alturas iguales sobre un mismo plano tienen sus volúmenes iguales.

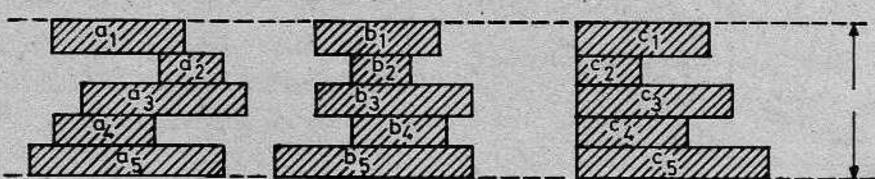


Fig. 1

Se tiene:

$$\text{A)}\left\{\begin{array}{l} a_1 = b_1 = c_1 \\ a_2 = b_2 = c_2 \\ a_3 = b_3 = c_3 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_n = b_n = c_n \end{array}\right.$$

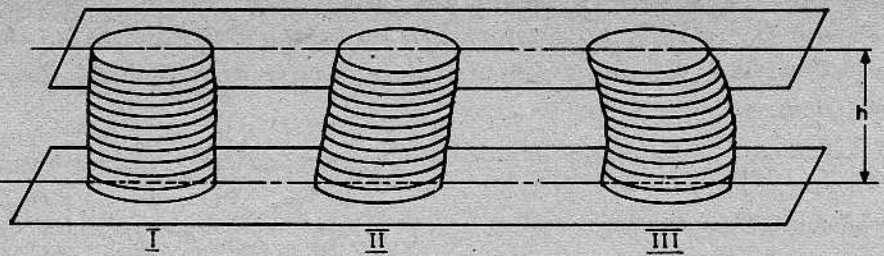
Además:

$$\begin{aligned} V_1 &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots\dots\dots + a_n \\ V_2 &= b_1 + b_2 + b_3 + \dots\dots\dots + b_n \\ V_3 &= c_1 + c_2 + c_3 + \dots\dots\dots + c_n \end{aligned}$$

luego: $V_1 = V_2 = V_3$ (siempre que se cumpla con A y la altura sea la misma para todos los cuerpos).

La relación anterior subsiste aunque las secciones equivalentes (a, b, c) tengan un espesor infinitamente pequeño.

Fig. 2



El cilindro recto I, el cilindro oblicuo II y el cuerpo irregular III se componen del mismo número de monedas colocadas una sobre otra entre dos planos // para que la altura de los tres cuerpos sea la misma. Tienen los tres cuerpos el mismo volumen (Fig. 2).

b) Sean las pirámides de la misma altura h_1 y de bases equivalentes $B_1 = B_2$; si se cortan por un plano cualquiera (CD) // a las bases se determinan dos secciones b_1 y b_2 semejantes a las bases respectivas. Demostraremos que $b_1 = b_2$. (Fig. 3).

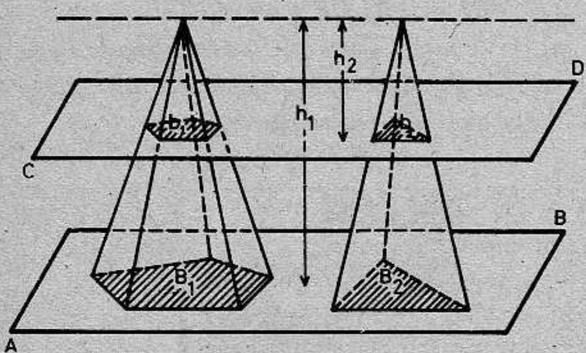


Fig. 3

En efecto:

$$\left.\begin{aligned} \frac{B_1}{b_1} &= \frac{(h_1)^2}{(h_2)^2} \\ \frac{B_2}{b_2} &= \frac{(h_1)^2}{(h_2)^2} \end{aligned}\right\} \therefore \quad \frac{B_1}{b_1} = \frac{B_2}{b_2}$$

pero como $B_1 = B_2$ resulta que las secciones b_1 y b_2 son también equivalentes, lo que está de acuerdo con el principio de Cavalieri. De aquí resulta: »Dos pirámides de bases equivalentes y de igual altura tienen el mismo volumen«.

413. PRISMAS

Son cuerpos limitados por tres o más planos que se cortan según rectas paralelas y por dos planos **paralelos que cortan a los planos anteriores** (Fig. 4).

1) De este modo los tres o más planos que se cortan según rectas paralelas (AA' // BB' // CC', etc.) forman las caras laterales y los dos planos poligonales paralelos entre sí al cortar los anteriores determinan las bases del prisma.

2) Las caras laterales son paralelogramos y las bases son polígonos congruentes.

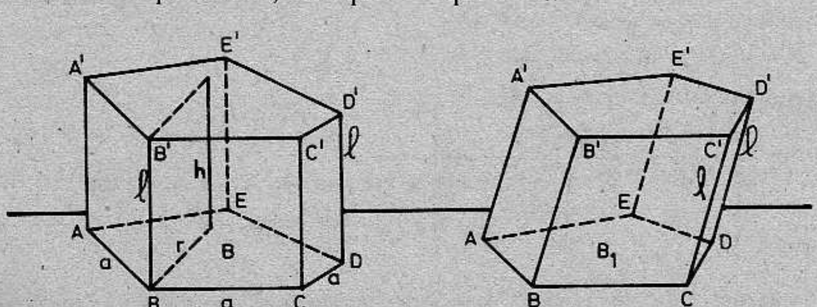
3) *Prisma recto-regular* es aquél que tiene sus caras laterales perpendiculares a las bases y las bases son polígonos regulares.

4) *Paralelepípedo* es el prisma en el cual las bases son paralelogramos.

5) Las caras laterales al cortarse entre sí determinan las aristas laterales $= l$ y al cortarse con las bases determinan las aristas basales = a.

6) h = altura del prisma, es la distancia entre las bases. Sólo en el prisma recto se cumple que $h = l$.

Fig. 4



I *Prisma recto*

II *Prisma oblicuo*

414. SUPERFICIE DE UN PRISMA RECTO-REGULAR (Fig. 4-I).

Sus caras laterales son rectángulos, por lo tanto:

Superficie una cara lateral $= a \cdot l$

Superficie 5 caras laterales $= 5a \cdot l$

Superficie n caras laterales $= na \cdot l$

Es decir:

$S_t = na \cdot l$ pero $n \cdot a = 2s$ (perímetro basal)

Resulta:

a) $\boxed{S_t = 2s \cdot l}$

Luego: "La superficie lateral de un prisma recto es igual al perímetro de la base por la arista lateral".

Para calcular la superficie total basta sumar la superficie de las dos bases que son $\cong$. Es decir:

b) $S_t = S_l + 2 \cdot B$

415. VOLUMEN DEL PRISMA

Para su cálculo se puede aprovechar el Principio de Cavalieri. Supongamos que el prisma recto y el oblicuo de la figura 4 están entre dos planos // para que ambos tengan la misma altura; además que las bases B y B_1 sean equivalentes. Al cortar estos prismas por planos // a las bases resultarán secciones $\cong$ a B en el prisma recto y a B_1 en el oblicuo. Pero como $B = B_1$ el volumen del prisma recto y del oblicuo es el mismo, siempre que sus bases sean equivalentes y tengan la misma altura. Luego: »El volumen de un prisma cualquiera es igual al producto de su base por su altura«.

Es decir: c) $\boxed{V = B \cdot h}$

416. Calcular la superficie total y el volumen de un prisma recto-regular exagonal cuya base está inscrita en una ⊙ de 20 cm de radio siendo la altura 80 cm.

Como la base es un exágono regular se verifica que $a = l_6 = r = 20$ cm. Además siendo recto $h = l = 80$ cm. Luego (Fig. 5).

$$S_l = 2s \cdot l \left\{ \begin{array}{l} 2s = 6 \cdot 20 = 120 \text{ cm.} \\ l = 80 \text{ cm} \end{array} \right.$$

$S_l = 120 \cdot 80 = 9600 \text{ cm}^2$

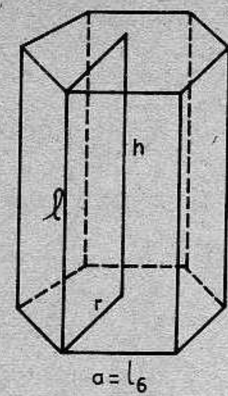


Fig. 5

La base es un exágono, o sea:

$B = a_6 = \frac{3}{2} \cdot r^2 \sqrt{3}$ (ver Nº 355-C).

$B = \frac{3}{2} \cdot (20)^2 \cdot \sqrt{3} = 600\sqrt{3} \text{ cm}^2$

Por lo tanto:

$S_t = S_l + 2 \cdot B = 9600 + 1200\sqrt{3}$

$= 9600 + 1200 \cdot 1{,}73 =$

$S_t = 11676 \text{ (cm}^2\text{)}$

$V = B \cdot h = 600\sqrt{3} \cdot 80 = 48000\sqrt{3} \text{ (cm}^3\text{)}$

417. Demostrar que el cuadrado de la diagonal de un paralelepípedo recto de base rectangular (ortoedro) es igual a la suma de los cuadrados de las tres aristas que concurren a un vértice.

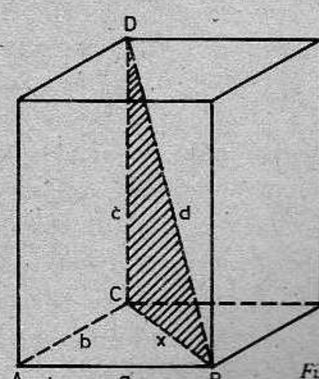


Fig. 6

T.) $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$

D.) El $\triangle$ ABC es rectángulo ($\measuredangle A = 90°$) luego, por el Teorema de Pitágoras resulta (Fig. 6):

1) $x^2 = a^2 + b^2$

El $\triangle$ DBC también es rectángulo ($\measuredangle C = 90°$) luego, por el mismo teorema se verifica:

2) $d^2 = x^2 + c^2$; finalmente reemplazando 1) en 2) resulta:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 \text{ (q.e.d.).}$$

418. Calcular el volumen de un cubo del cual se da su diagonal = d.

Sea la arista = x.

Solución: Según N° 417 se tiene que:

$$d^2 = x^2 + x^2 + x^2 = 3x^2$$

luego:

$$x^2 = \frac{d^2}{3}$$

$$x = \sqrt{\frac{d^2}{3}} = \frac{d}{\sqrt{3}};$$

nacionalizando resulta:

$$x = \frac{d}{3}\sqrt{3}$$

Por lo tanto el volumen es:

$$V = x^3 = \left(\frac{d}{3}\sqrt{3}\right)^3 = \frac{d^3}{27}(\sqrt{3})^3 = \frac{d^3}{9}\sqrt{3}$$

419. Las aristas de un paralelepípedo recto de base rectangular son entre sí como 1 : 2 : 3. Si su diagonal mide $4\sqrt{14}$ cm. ¿Cuánto mide su superficie total y el volumen?

Solución:

$$a : b : c = 1 : 2 : 3$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = (4\sqrt{14})^2 = 224$$

sea: $a = K$, $b = 2K$, $c = 3K$

$$K^2 + 4K^2 + 9K^2 = 224$$
$$14K^2 = 224$$
$$K^2 = 16$$
$$K = \pm 4 \quad \text{luego: } \begin{cases} a = 4 \\ b = 8 \\ c = 12 \end{cases}$$

$$S_l = 2s \cdot l \begin{cases} 2s = 2 \cdot (4 + 8) = 14 \\ l = c = 12 \end{cases}$$

$$S_l = 24 \cdot 12 = 288 \text{ cm}^2$$
$$B = a \cdot b = 32 \text{ cm}^2$$
$$S_t = 288 + 2 \cdot 32 = 352 \text{ cm}^2$$
$$V = B \cdot h = 32 \cdot 12 = 384 \text{ cm}^3$$

420. Las aristas basales de un paralelepípedo recto de base rectangular miden a cm y b cm. ¿Qué altura debe tener para que su superficie total y su volumen queden expresados por el mismo número?

Solución:

Sea $l = h = x$

$$S_t = 2s \cdot x + 2ab = 2(a + b) \cdot x + 2ab$$
$$V = ab \cdot x$$

luego:

$$2 \cdot (a + b) \cdot x + 2ab = ab \cdot x$$

$$x \cdot [ab - 2(a + b)] = 2ab$$

$$x = \frac{2ab}{ab - 2(a + b)}$$

Si a = 8 cm, b = 4 cm resulta:

$$x = \frac{64}{32 - 24}$$

$$x = 8 \text{ cm}$$

421. Determinar el volumen de un cubo dada su superficie total S.

Solución: Sea x = arista.

Entonces: la superficie de una cara $= x^2$ de donde:

$$6x^2 = S$$

$$x = \sqrt{\frac{S}{6}}$$

$$V = x^3 = \left(\sqrt{\frac{S}{6}}\right)^3 = \left(\sqrt{\frac{S}{6}}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{S}{6}}$$

resulta: $V = \frac{S}{6}\sqrt{\frac{S}{6}} = \frac{S}{36}\sqrt{6S}$

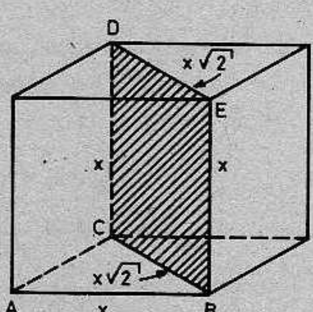
Ej.: si $S = 54 \text{ cm}^2$ se obtiene $V = 27 \text{ cm}^3$

422. Calcular el volumen y la superficie de un cubo del cual se da el perímetro $\underline{2s}$ de un plano diagonal.

Solución: Sea x = arista (Fig. 7).

Si la arista = x la diagonal $\overline{BC} = x\sqrt{2}$

Fig. 7



Luego el perímetro del plano BEDC es:

$$2x\sqrt{2} + 2x = 2s \quad :2$$

$$x\sqrt{2} + x = s$$

$$x(\sqrt{2} + 1) = s$$

$$x = \frac{s}{\sqrt{2}+1}$$

se racionaliza el denominador amplificando por $(\sqrt{2} - 1)$.

resulta: $x = s(\sqrt{2} - 1)$

Luego:

$$V = x^3 = s^3(\sqrt{2} - 1)^3$$

$$V = s^3(2\sqrt{2} - 6 + 3\sqrt{2} - 1)$$

$$V = s^3 \cdot (5\sqrt{2} - 7)$$

$$S_t = 6x^2$$

$$S_t = 6 \cdot s^2(\sqrt{2} - 1)^2$$

$$S_t = 6s^2 \cdot (3 - 2\sqrt{2})$$

423. Calcular el volumen y la superficie de un cubo dada el área a^2 de su plano diagonal.

Solución: Sea x = arista, luego $\overline{BC} = x\sqrt{2}$; el área del plano diagonal será $= \overline{BC} \cdot \overline{BE}$ (Fig. 7).

$$\left.\begin{array}{l} x \cdot x\sqrt{2} = a^2 \\ S = 6x^2 \end{array}\right|$$

Al multiplicar miembro a miembro resulta:

$$S \cdot x^2\sqrt{2} = 6a^2x^2$$

de donde: $S = \frac{6a^2}{\sqrt{2}}$

Amplificando por $\sqrt{2}$ se obtiene $S = 3a^2\sqrt{2}$

Además siendo $x = \frac{a}{\sqrt[4]{2}}$ resulta:

$$V = x^3 = \frac{a^3}{8} \cdot \sqrt[4]{8^3} = \frac{a^3}{8} \cdot \sqrt[4]{2^9} = \frac{a^3}{2} \cdot \sqrt[4]{2}$$

424. SUPERFICIE CILINDRICA

Es la superficie que se engendra por el movimiento de una recta que se traslada paralela a si misma, apoyándose sobre una curva cualquiera C.

La recta L que engendra la superficie curva se llama *generatriz* y la curva C sobre la cual se apoya en su traslado se llama *directriz* (Fig. 8).

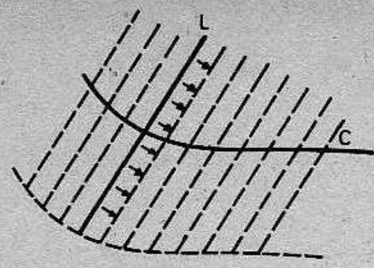


Fig. 8

Cilindro es, en general, el cuerpo limitado por una superficie cilíndrica cerrada y dos planos paralelos que la cortan (Fig. 9).

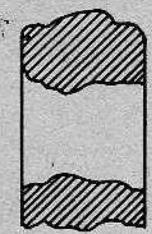


Fig. 9

El cilindro más conocido es el cilindro circular u ordinario en el cual las bases son círculos, es decir la directriz es una circunferencia. De ahora en adelante nos referiremos a éste, cuando hablemos de cilindro.

425. EL CILINDRO (Fig. 10)

1) es un *cuerpo de revolución* que se engendra al girar un rectángulo en 360° en torno a uno de sus lados que sirve de eje; o bien, al girar un rectángulo en 180° en torno a la simetral de un lado.

2) El lado que gira y que, por lo tanto, engendra la superficie o *manto del cilindro,* se llama *generatriz* = g y es paralela al eje 00'.

3) *El cilindro es recto* cuando todas las generatrices son perpendiculares a las bases **que son círculos $\cong$; luego g = h.**

4) El cilindro se puede considerar como un prisma regular de infinitas caras laterales infinitamente pequeñas. Luego, para el cilindro son válidas las mismas fórmulas del prisma. Es decir:

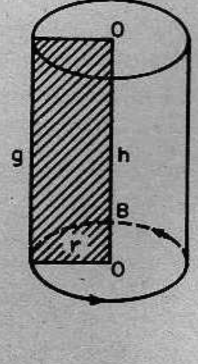


Fig. 10

$$S_l = 2s = l \begin{cases} 2s = \odot = 2\pi r \\ l = g \end{cases}$$

luego la superficie del manto del cilindro es:

a) $\boxed{S_l = 2\pi r \cdot g}$

La base es un $\odot$, luego:

b) $\boxed{B = \pi r^2}$

c) $S_t = 2\pi rg + 2 \cdot \pi \cdot r^2 = 2\pi r \cdot (g + r)$

El volumen del cilindro es:

d) $\boxed{V = B \cdot h = \pi r^2 \cdot h}$

426. ¿Cuánto mide el radio de un cilindro si su superficie lateral es equivalente a la suma de la superficie lateral (manto) de otros dos cilindros de radios r_1 y r_2 respectivamente y si los tres cilindros tienen la misma altura? ¿El nuevo cilindro tiene un volumen mayor o menor que la suma de los volúmenes de los otros dos?

Solución: Sea x = radio del cilindro de superficie S_x equivalente a $S_1 + S_2$.

Luego: $S_x = S_1 + S_2 \begin{cases} S_1 = 2\pi r_1 \cdot g \\ S_2 = 2\pi r_2 \cdot g \\ S_x = 2\pi x \cdot g \end{cases}$

$$2\pi x \cdot g = 2\pi r_1 \cdot g + 2\pi r_2 \cdot g \; /: 2\pi g$$

resulta:

1) $x = r_1 + r_2$

Compararemos los volúmenes:

$$V_1 = \pi r_1^2 \cdot h$$

$$V_2 = \pi r_2^2 \cdot h$$

$\therefore$ 2) $V_1 + V_2 = \pi h (r_1^2 + r_2^2)$

Pero:

3) $\mathbf{V_x = \pi x^2 \cdot h = \pi \cdot h(r_1 + r_2)^2}$

Al comparar 2) con 3) se desprende que: $V_x > V_1 + V_2$ porque $(r_1 + r_2)^2 > (r_1^2 + r_2^2)$

427. Tres cilindros tienen la misma altura; si los radios basales de los dos primeros son r_1 y r_2. ¿Cuánto mide el radio del tercero si su volumen es igual a la suma del volumen de los otros dos? ¿Cómo es la superficie del manto del tercer cilindro, comparada con la suma de la superficie de los otros dos?

Solución:

$$V_1 = \pi r_1^2 \cdot h$$

$$V_2 = \pi r_2^2 \cdot h$$

$$V_x = \pi x^2 \cdot h$$

Pero:

$$V_x = V_1 + V_2$$

De donde:

$$\pi x^2 h = \pi r_1^2 h + \pi r_2^2 \cdot h,$$

resulta $\quad x^2 = r_1^2 + r_2^2$

es decir:

a) $x = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$

Calculemos la superficie del manto de cada uno:

$\left.\begin{matrix} S_1 = 2\pi r_1 \cdot g \\ S_2 = 2\pi r_2 \cdot g \end{matrix}\right\}$ b) $S_1 + S_2 = 2\pi g (r_1 + r_2)$

$$\mathbf{S_x = 2\pi x \cdot g = 2\pi g \cdot \sqrt{r_1^2 + r_2^2}}$$

pero:

$$\sqrt{r_1^2 + r_2^2} < (r_1 + r_2)$$

en efecto; elevando al cuadrado:

$$r_1^2 + r_2^2 < r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 \cdot r_2$$

Luego: $S_x < S_1 + S_2$

428. LA PIRAMIDE

1) Es un cuerpo limitado por tres o más planos que se cortan en un punto común llamado *cúspide* y por otro plano que corta a todos los anteriores sin pasar por la cúspide. Los primeros forman las *caras laterales* que son triangulares, y el **último es la *base* que es un plano poligonal (Fig. 11).**

2) *Altura* = h de la pirámide es la perpendicular trazada desde la cúspide C a la base.

3) ρ = *apotema lateral* es la perpendicular trazada desde la cúspide a la arista basal = a.

4) *La pirámide es recta-regular* cuando su base es un polígono regular y su altura cae en el centro O del polígono. En este caso las caras laterales son $\triangle$ isósceles.

Superficie lateral de la pirámide recta-regular
Basta calcular la superficie de una cara y multiplicarla por el número de ellas. En efecto (Fig. 11):

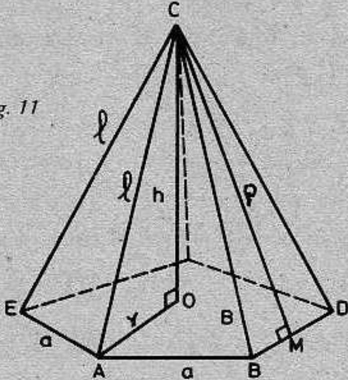


Fig. 11

Superficie 1 cara lateral $= \triangle BDC = \frac{a \cdot \rho}{2}$

Superficie n caras laterales $= \frac{n \cdot a \cdot \rho}{2}$

pero $n \cdot a = 2s$, **luego** $S_\ell = \frac{2s \cdot \rho}{2}$ de donde:

a) $\boxed{S_\ell = s \cdot \rho}$

Es decir:

"La superficie lateral de la pirámide recta-regular es igual al producto del semiperímetro basal por el apotema lateral".

b) La superficie total será: $S_t = S_\ell + B$

429. TEOREMA DE EUDOXIO (año-370):
"Todo prisma triangular se puede descomponer en tres pirámides que tienen el mismo volumen". (Figs. 12 a 14).

Demostración: (Se basa en el Nº 412-b). Al cortar al prisma triangular ABCDEF por un plano que pase por la arista DF y el vértice B se obtiene la pirámide triangular DEFB (base DEF

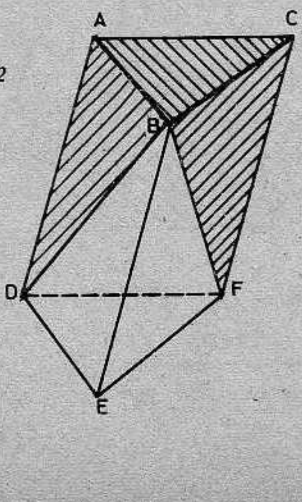


Fig. 12

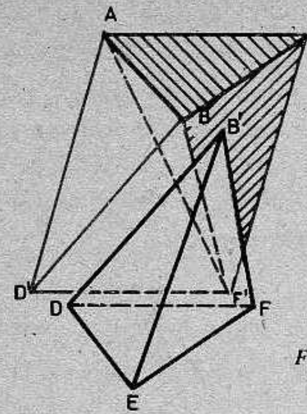


Fig. 13

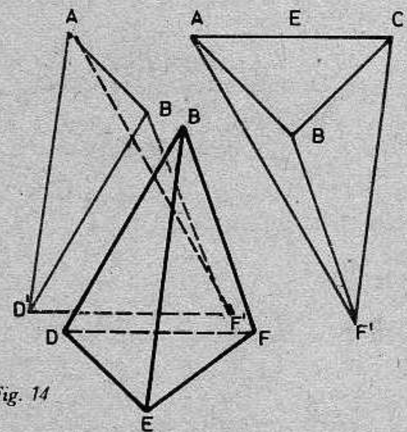


Fig. 14

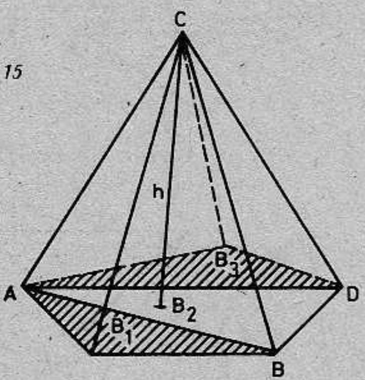
y cúspide B). Sacada esta pirámide queda otra **pirámide de base cuadrangular ACFD y cúspide B**, tal como se indica en la figura 13. Al cortar esta pirámide por un plano que pase por la diagonal AF y la cúspide B se obtienen dos pirámides triangulares que tienen la misma cúspide B y sus bases equivalentes AF'D' y AF'C, como se indica en la figura 14. Luego, estas dos pirámides AFD'B y AF'CB son equivalentes por tener bases equivalentes y la misma altura.

Pero la pirámide AF'CB (considerando como base el triángulo ABC y cúspide F') es equivalente a la pirámide DEFB (de base el $\triangle$ DEF y cúspide B) porque sus bases ABC y DEF son triángulos congruentes.

Luego, las tres pirámides formadas son equivalentes y el volumen de cada una de ellas será la tercera parte del volumen del prisma. Se obtiene que: »el volumen de una pirámide triangular es igual a la tercera parte de la superficie basal por su altura«.

Si se trata de una pirámide cualquiera se divide en pirámides triangulares trazando planos que pasan por la cúspide C y las diagonales AB, AD, etc. trazadas desde un vértice A de la base. Al sumar los volúmenes de estas pirámides triangulares se obtiene el volumen total de la pirámide (Fig. 15).

Fig. 15



$$V = \frac{1}{3} B_1 \cdot h + \frac{1}{3} B_2 \cdot h + \frac{1}{3} B_3 \cdot h + \ldots + \frac{1}{3} B_n \cdot h$$

lo que da:

$$V = \frac{1}{3} h (B_1 + B_2 + B_3 + \ldots\ldots\ldots + B_n)$$

Es decir:

c) $\boxed{V = \frac{1}{3} B \cdot h}$

"El volumen de una pirámide cualquiera es igual a tercera parte de la superficie basal por la altura".

430. ¿Cuál es la superficie total y el volumen de una pirámide recta-regular exagonal si su arista lateral mide 25 cm y su altura 15 cm?

Solución: En el $\triangle$ AOC se calcula AO = r por medio del Corolario de Pitágoras (Fig. 16).

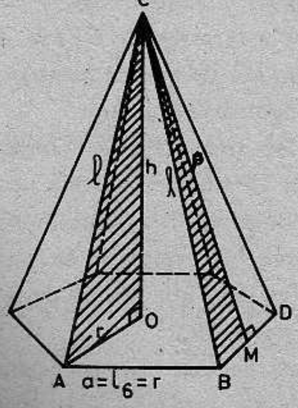


Fig. 16

$$r^2 = l^2 - h^2 = 25^2 - 15^2 = 625 - 225;$$

$\therefore$ r = 20 cm, pero l_6 = r, luego la arista basal mide a = 20 cm.

En el $\triangle$ BMC por el mismo corolario se calcula $\overline{CM} = \rho$

$$\rho^2 = l^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\rho^2 = 25^2 - 10^2$$

$$\rho = \sqrt{525} = 5\sqrt{21} \text{ cm}$$

luego:

$$S_l = s \cdot \rho = 3 \cdot 20 \cdot 5\sqrt{21} = 300\sqrt{21} \text{ cm}^2$$

La base de un exágono, luego $B = \frac{3}{2} r^2 \sqrt{3}$ (ver N° 355-C).

$$B = \frac{3}{2} \cdot (20)^2 \cdot \sqrt{3} = 600\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

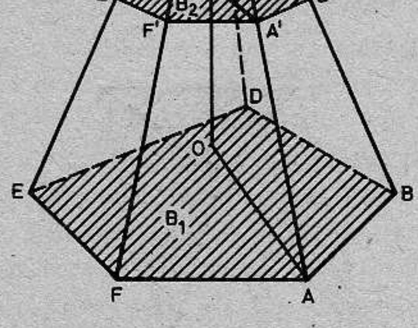
$$S_t = S_l + B = 300\sqrt{21} + 600\sqrt{3}$$

$$S_t = 300\sqrt{3}\,(\sqrt{7} + 2) \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{1}{3} B \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 600\sqrt{3} \cdot 15 = 3000\sqrt{3} \text{ cm}^3$$

431. Demostrar que los lados homólogos de secciones planas paralelas a la base de una pirámide son entre sí como las distancias de las secciones a la cúspide (Fig. 17).

Fig. 17



T.) $\overline{AB} : \overline{A'B'} = \overline{OC} : \overline{O'C}$

D.) COA $\sim \triangle$ CO'A'

$\therefore$ 1) $\overline{OA} : \overline{O'A} = \overline{OC} : \overline{O'C}$

pero polígono **ABDEF $\sim$ polígono A'B'D'E'F'**.

2) $\overline{OA} : \overline{O'A'} = \overline{AB} : \overline{A'B'}$

De 1) y 2) resulta:

$\overline{AB} : \overline{A'B'} = \overline{OC} : \overline{O'C}$

432. Las áreas de secciones planas paralelas a la base de una pirámide son proporcionales a los cuadrados de sus distancias a la cúspide.

T.) $B_1 : B_2 = \overline{CO}^2 : \overline{CO'}^2$

D.) Según N° 343 las áreas de 2 polígonos semejantes son proporcionales a los cuadrados de dos lados homólogos; o sea (Fig. 17):

$$B_1 : B_2 = \overline{AB}^2 : \overline{A'B'}^2$$

pero según N° 431 se tiene que:

$$\overline{AB}^2 : \overline{A'B'}^2 = \overline{OC}^2 : \overline{O'C}^2$$

luego: $B_1 : B_2 = \overline{OC}^2 : \overline{O'C}^2$

433. **En un cubo de arista a se unen en cada cara** los puntos medios de las aristas. ¿Cuál es el volumen del cuerpo que resulta? (Fig. 18).

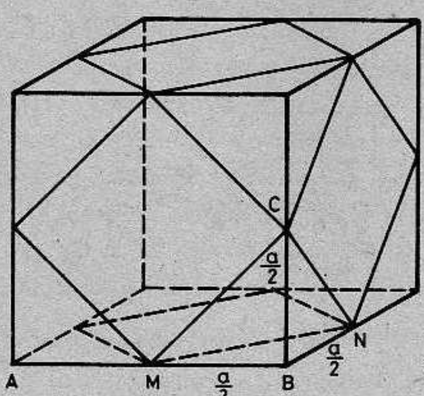


Fig. 18

Solución: Basta restar al volumen total a^3 del cubo, 8 veces el volumen de la pirámide de base triangular (tetraedro) tal como la MBNC cuya base es un $\triangle$ rectángulo de catetos $\frac{a}{2}$ y su altura es también $\overline{BC} = \frac{a}{2}$

Luego:

V (pirámide MNBC) $= \frac{1}{3} B \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{8} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3}{48}$

Vol. de 8 pirámides $= \frac{a^3}{6}$

luego: volumen del cuerpo formado

$$= a^3 - \frac{a^3}{6} = \frac{5}{6} a^3$$

434. Calcular la superficie y el volumen de un tetraedro regular de arista $\underline{a}$

La superficie es igual a 4 veces el área de una cara que es $\triangle$ equilátero (Fig. 19).

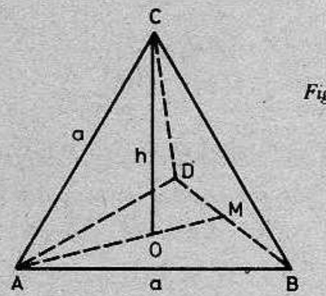


Fig. 19

Luego:

$$S = 4 \cdot \triangle ABD = 4 \cdot \frac{\overline{BD} \cdot \overline{AM}}{2}$$

$$S = 4 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \sqrt{3} = a^2 \sqrt{3}$$

Su volumen es el de una pirámide de base triangular ABD $= \frac{a^2}{4} \sqrt{3}$ y de altura h.

Se calcula $\underline{h}$ en el $\triangle$ AOC en el cual

$AO = \frac{2}{3}$ de $AM = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} \sqrt{3} = \frac{a}{3} \sqrt{3}$ y $AC = a$

Entonces:

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{3}\sqrt{3}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2a^2}{3} \;\therefore\; a\sqrt{\frac{2}{3}} = h$$

Luego: $V = \frac{1}{3} \triangle (ABD) \cdot \overline{CO}$.

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{4} \sqrt{3} \cdot a \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a^3}{12} \sqrt{2}$$

435. Calcular la superficie y el volumen del octaedro regular si su arista es $\underline{a}$ (Fig. 20).

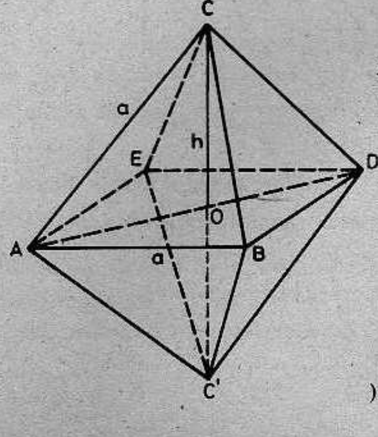


Fig. 20

Solución: La superficie es igual a 8 $\triangle$ ABC; luego:

$$S = 8 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \sqrt{3} = 2a^2 \sqrt{3}$$

Su volumen es el doble de la pirámide cuadrangular ABDEC, en la cual se tiene:

$\overline{AD} = a\sqrt{2}$ (diagonal de un cuadrado)

$\overline{AO} = \frac{a}{2}\sqrt{2}$; por lo tanto:

$$h^2 = \overline{CA}^2 - \overline{AO}^2$$

$$h^2 = a^2 - (\frac{a}{2}\sqrt{2})^2$$

$$h^2 = \frac{a^2}{2} \quad \therefore h = \frac{a}{2}\sqrt{2}$$

(se obtiene lo mismo más rápidamente observando que por ser regular el octaedro se verifica que: $\overline{AD} = CC' = BE = a\sqrt{2}$;

luego: $h = \frac{1}{2} CC' = \frac{a}{2}\sqrt{2}$)

Entonces, el volumen del octaedro regular es:

$$V = 2 \cdot \text{pirámide (ABDEC)} =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{3} a^2 \cdot \frac{a}{2} \sqrt{2} = \frac{a^3}{3}\sqrt{2}$$

436. SUPERFICIE CONICA

Es la superficie engendrada por el movimiento de una recta que pasa por un punto fijo y que durante su movimiento se apoya sobre una curva cualquiera (Fig. 21).

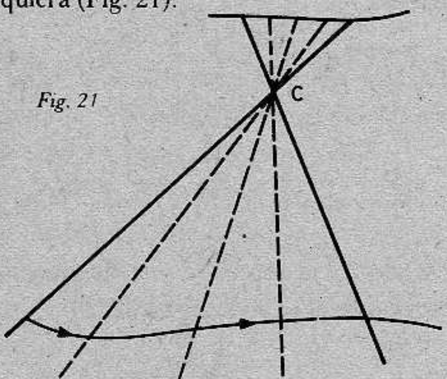


Fig. 21

Cono es el cuerpo limitado por una superficie cónica cerrada y por un plano que no pasa por la cúspide.

Cono circular es el cuerpo limitado por una superficie cónica circular y un plano que no pasa por la cúspide.

El cono más conocido es el *cono de revolución* y a él nos dedicaremos especialmente.

437. EL CONO (Fig. 22)

1) Es un cuerpo de revolución que se obtiene en 360° un $\triangle$ rectángulo en torno a un cateto. El cateto $\overline{CO}$ que permanece fijo es el *eje del cono* y la hipotenusa $\overline{CA}$ que engendra la superficie curva o *manto del cono* es la *generatriz* = g.

2) También se puede engendrar girando un $\triangle$ isósceles ADC en 180° en torno a su altura $\overline{CO}$.

3) Asimismo, un cono se puede considerar como una pirámide angular de infinitas caras laterales infinitamente pequeñas. Por lo tanto las mismas fórmulas de la pirámide valen para el cono.

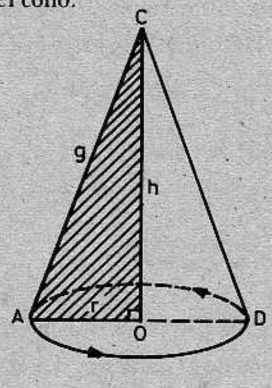


Fig. 22

En efecto:

$S_l = s \cdot \rho$; ahora $b = \frac{2\pi r}{2} = \pi r$; $\rho = g$;

luego:

a) $\boxed{S_l = \pi r \cdot g}$

La base es un círculo, luego:

b) $\boxed{B = \pi r^2}$

La superficie total:

c) $S_t = \pi rg + \pi r^2 = \pi r \cdot (g + r)$

El volumen es:

d) $\boxed{V = \frac{1}{3} B \cdot h = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h}$

438. ¿Cuál es la superficie total y el volumen de un cono recto si su radio basal mide 5 cm y su altura 12 cm?

Solución: Aplicando el Teorema de Pitágoras al $\triangle$ AOC se calcula la generatriz:

$$g^2 = h^2 + r^2$$
$$g^2 = 12^2 + 5^2 = 169$$
$$\therefore g = 13 \text{ cm}$$

Luego:

a) $S_l = \pi rg = \pi \cdot 5 \cdot 13 = 65\pi \ (cm^2)$

b) $B = \pi r^2 = \pi \cdot 5^2 = 25\pi \ (cm^2)$

c) $S_t = 65\pi + 25\pi = 90\pi \ (cm^2)$

d) $V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot 25 \cdot 12 = 100\pi \ (cm^2)$

439. TRONCO DE PIRAMIDE

1) Es la parte de una pirámide comprendida entre la base y una sección paralela a ella que recibe el nombre de base superior de la pirámide truncada (Fig. 23).

2) Sus caras laterales son trapecios y sus bases son polígonos semejantes.

3) Si es recto-regular las caras laterales son trapecios isósceles y sus bases polígonos regulares semejantes.

4) $h = \overline{OO'}$ es la altura que es la distancia entre las bases.

5) ρ = apotema lateral es la $\perp$ entre las aristas basales de una cara lateral; en la figura 23, la distancia ($\perp$) entre las aristas AD y A'D' es la $\perp$ MN $= A'E = \rho$

Para calcular la superficie lateral en el tronco de pirámide recta-regular basta calcular la superficie de una cara según la fórmula del trapecio (N° 257) y multiplicarla por el número de caras. En efecto:

$$\text{Superficie 1 cara lateral} = \frac{a' + a''}{2} \cdot \rho$$

$$\text{Superficie n caras laterales} = \frac{n(a' + a'')}{2} \cdot \rho$$

o bien: $S_l = \frac{n \cdot a' + n \cdot a''}{2} \cdot \rho$;

pero: $\begin{cases} n \cdot a' = 2s' \text{ (perímetro base inferior)} \\ n \cdot a'' = 2s'' \text{ (perímetro base superior)} \end{cases}$

Luego:

$$S_l = \frac{2s' + 2s''}{2} \cdot \rho$$

finalmente: $\boxed{S = (s' + s'') \cdot \rho}$

Es decir: "La superficie lateral de una pirámide truncada recta regular es igual a la suma de los semiperímetros de las bases por la apotema lateral".

La superficie total será:

b) $S_t = S_l + B_1 + B_2$

»El volumen de un tronco de pirámide cualquiera es igual a la tercera parte de su altura por la suma de las superficies de las dos bases y más el medio geométrico de ellas«.

Es decir:

c) $\boxed{V = \frac{h}{3}(B_1 + B_2 + \sqrt{B_1 \cdot B_2})}$

(La demostración de esta fórmula está en seguida).

440. VOLUMEN DEL TRONCO DE PIRAMIDE:

Sea $h_1 = \overline{CO}$ la altura de la pirámide total de **superficie basal B_1; $\overline{CO'} = h_2$ la altura de la pirámide complementaria de base B_2; $\overline{OO'} = h$ la altura del tronco de pirámide (Fig. 23).**

El volumen del tronco es igual a la diferencia entre los volúmenes de las dos pirámides de altura $\overline{CO}$ y $\overline{CO'}$. Luego:

$$V = \frac{1}{3} B_1 \cdot h_1 - \frac{1}{3} B_2 \cdot h_2$$

pero $h_1 = h + h_2$

$$V = \frac{1}{3} B_1 (h + h_2) - \frac{1}{3} B_2 \cdot h_2$$

$$V = \frac{1}{3} B_1 h + \frac{1}{3} B_1 h_2 - \frac{1}{3} B_2 \cdot h_2$$

a) $V = \frac{1}{3} B_1 \cdot h + \frac{1}{3} h_2 (B_1 - B_2)$;

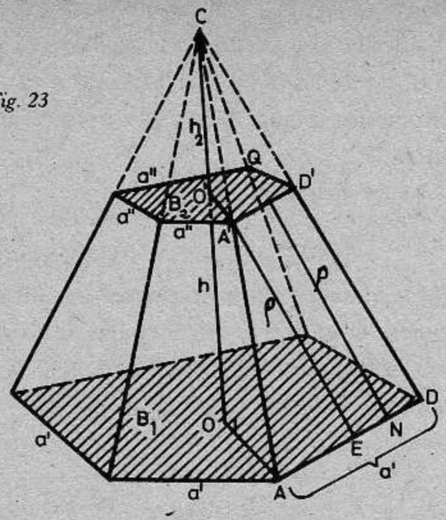
calcularemos h_2 que no pertenece al tronco.

Como según el N° 432 las áreas de las bases son proporcionales a los cuadrados de sus distancias a la cúspide, podremos escribir que:

$\frac{B_1}{B_2} = \frac{h_1^2}{h_2^2}$; se extrae raíz, resultando:

$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\sqrt{B_1}}{\sqrt{B_2}}$; se descompone: $\frac{h_1 - h_2}{h_2} = \frac{\sqrt{B_1} - \sqrt{B_2}}{\sqrt{B_2}}$;

pero $h_1 - h_2 = h$; luego $h_2 = \frac{h \cdot \sqrt{B_2}}{\sqrt{B_1} - \sqrt{B_2}}$; se **racionaliza el denominador amplificando por $(\sqrt{B_1} + \sqrt{B_2})$.**



Se obtiene $h_2 = \frac{h\sqrt{B_2}\,(\sqrt{B_1}+\sqrt{B_2})}{B_1 - B_2}$, se reemplaza este valor en a):

$$V = \frac{1}{3}B_1\cdot h + \frac{1}{3}\cdot\frac{h\sqrt{B_2}\,(\sqrt{B_1}+\sqrt{B_2})}{\cancel{B_1 - B_2}}\cdot(\cancel{B_1 - B_2})$$

Se efectúa el producto:

$$V = \frac{1}{3}B_1\cdot h + \frac{1}{3}h\sqrt{B_1\cdot B_2} + \frac{1}{3}h\cdot B_2$$

finalmente: c) $\boxed{V = \frac{h}{3}\cdot(B_1 + B_2 + \sqrt{B_1\cdot B_2})}$

Luego: el volumen de un tronco de pirámide es igual al producto de la tercera parte de su **altura por la suma de sus dos bases más el medio** geométrico de ellas.

441. Determinar el volumen de un tronco de pirámide de bases **B** y b, siendo h la altura de la pirámide complementaria.

Solución: Sea la altura del tronco $\overline{OO'} = x$; $\overline{CO'} = h$ (Fig. 23).

Como las superficies de las bases son proporcionales a los cuadrados de sus distancias a la cúspide, resulta:

$\frac{B}{b} = \frac{(x+h)^2}{h^2}$; se extrae raíz a ambos miembros:

$$\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{b}} = \frac{x+h}{h}$$

$x = \frac{h(\sqrt{B}-\sqrt{b})}{\sqrt{b}}$; amplificando por $\sqrt{b}$, se obtiene:

$$x = \frac{h(\sqrt{B\cdot b} - b)}{b}$$

que es la altura del tronco, sustituyendo este valor en la fórmula c) se obtiene:

$$V = \frac{h(\sqrt{B\cdot b} - b)}{3b}\cdot(B + b + \sqrt{B\cdot b})$$

Multiplicando y reduciendo se obtiene finalmente:

$$V = \frac{h}{3b}\cdot(B\sqrt{B\cdot b} - b^2)$$

442. En un tronco de pirámide recta-regular exagonal las aristas basales miden 30 y 10 cm respectivamente; la arista lateral mide 25 cm.

Calcular la superficie total y el volumen (Fig. 24).

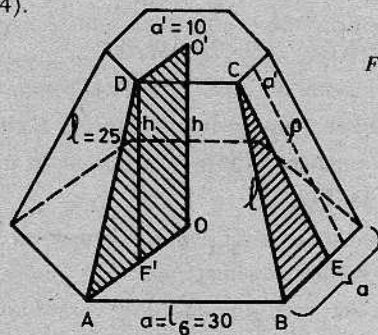


Fig. 24

Solución: Se calcula ρ en el $\triangle$ BEC ($\measuredangle$ recto en E): en el cual

$$\overline{CB} = 25;\ \overline{BE} = \frac{30}{2}\cdot\frac{10}{2} = 10\text{ cm};$$

luego:

$$\rho^2 = \overline{BC}^2 - \overline{BE}^2$$

$$\rho^2 = 25^2 - 10^2 = 525;$$

$$\rho = 5\sqrt{21}\text{ cm.}$$

a) $S_l = (s' + s'')\cdot\rho = \left(\frac{180}{2} + \frac{60}{2}\right)\cdot 5\sqrt{21} =$

$$= S_l = 600\sqrt{21}\text{ cm}^2$$

Como las bases son exágonos regulares, se obtiene:

$$\overline{OA} = \overline{AB} = 30\text{ cm y } \overline{O'D} = \overline{DC} = 10\text{ cm.}$$

Luego, la base inferior mide:

$B_1 = \frac{3}{2}r^2\sqrt{3}$ (Ver N° 355-C).

$$B_1 = \frac{3}{2}\cdot(30)^2\sqrt{3} = 1350\sqrt{3}\text{ cm}^2$$

Análogamente, la base superior mide:

$$B_2 = \frac{3}{2}\cdot r_1^2\sqrt{3}$$

$$B_2 = \frac{3}{2}\cdot(10)^2\cdot\sqrt{3} = 150\sqrt{3}\text{ cm}^2$$

Por lo tanto, la superficie total es:

$$S_t = 600\sqrt{21} + 1350\sqrt{3} + 150\sqrt{3} =$$

$$= 300\,(2\sqrt{21} + 5\sqrt{3})\ cm^2$$

Para calcular el volumen debemos calcular primero la altura $h = \overline{OO'}$ que es igual a la $\perp$ $\overline{DF}$.

Se calcula h en el $\triangle$ AFD, en el cual $\overline{AF} = 30 - 10 = 20$ cm.

$$\overline{FD}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{AF}^2$$

$$h^2 = 25^2 - 20^2$$

$$h^2 = 225$$

$$h = 15\ cm$$

Luego:

$$V = \frac{h}{3}(B_1 + B_2 + \sqrt{B_1 \cdot B_2})$$

sustituyendo queda

$$V = \frac{15}{3}\cdot(1350\sqrt{3} + 150\sqrt{3} + \sqrt{1350\cdot\sqrt{3}\cdot 150\sqrt{3}})$$

$$V = 5\cdot(1500\sqrt{3} + \sqrt{1350\cdot 150\cdot 3})$$

$$V = 5\cdot(1500\sqrt{3} + \sqrt{9\cdot 150\cdot 150\cdot 3})$$

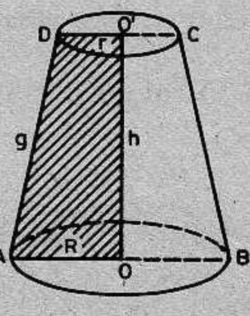
$$V = 5\cdot(1500\sqrt{3} + 450\sqrt{3})$$

$$V = 9750\sqrt{3}\ (cm^3)$$

443. TRONCO DE CONO O CONO TRUNCADO

1) Se obtiene al cortar un cono por un plano // a la base (Fig. 25).

Fig. 25



2) Es un cuerpo de revolución que se engendra al girar en 360° un trapecio rectángulo AOO'D en torno a su lado $\overline{OO'} \perp$ a las bases. Este lado $\overline{OO'}$ es el eje del cono truncado y el lado $\overline{AD}$ que engendra el manto es la generatriz.

3) O bien, se engendra por la rotación de un trapecio isósceles ABCD en 180° en torno a la simetral $\overline{OO'}$ de sus bases.

4) También se le puede considerar como una pirámide truncada regular de infinitas caras laterales infinitamente pequeñas. Luego, son válidas las mismas fórmulas de la pirámide truncada. Es decir:

$S_l = (s + s')\cdot\rho$ Para el cono truncado se tiene:

$$s = \frac{2\pi R}{2};\ s' = \pi r;\ \rho = g$$

Resulta:

a) $\boxed{S_l = \pi g\,(R + r)}$

Las superficies basales son:

$$B_1 = \pi R^2;\ B_2 = \pi r^2$$

La superficie total:

b) $S_t = S_l + B_1 + B_2$

Su volumen: $V = \frac{h}{3}(B_1 + B_2 + \sqrt{B_1\cdot B_2}$, reemplazando el valor de $S_1 = \pi R^2$ y el $B_2 = \pi r^2$, resulta:

c) $\boxed{V = \frac{\pi h}{3}\cdot(R^2 + r^2 + R\cdot r)}$

444. Calcular la superficie total y el volumen de un cono truncado cuyos radios basales miden 20 y 12 cm, y su generatriz 17 cm.

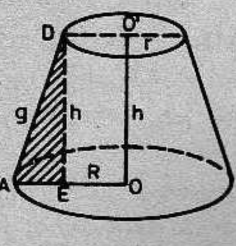


Fig. 26

Solución: (Fig. 26).

a) $S_l = \pi g\cdot(R + r)$

$$S_l = \pi\cdot 17(20 + 12) = 544\pi\ (cm)$$

b) $B_1 = \pi R^2 = 400\pi\ (cm^2)$

$$B_2 = \pi r^2 = 144\pi\ (cm^2)$$

luego:

$$S_t = 544\pi + 400\pi + 144\pi = 1088\pi\ (cm^2)$$

c) $V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + R \cdot r)$; previamente se debe calcular h en el $\triangle$ AED, según el Corolario de Pitágoras, en el cual

$\overline{AD} = 17$; $\overline{AE} = R - r = 20 - 12 = 8$ cm.

Luego:

$$h^2 = g^2 - \overline{AE}^2 = 17^2 - 8^2 = 225$$

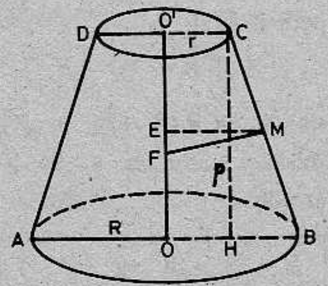
$\therefore$ $h = 15$ cm.

Resulta:

$$V = \frac{15\pi}{3}(400 + 144 + 240) = 3940\,\pi\ (\text{cm}^3)$$

445. Demostrar que la superficie lateral de un tronco de cono recto es igual a su altura por la longitud de la ⊙ de radio igual a la ⊥ trazada en el punto medio de la generatriz y comprendida entre ésta y el eje (Fig. 27).

Fig. 27



H.) eje $\overline{OO'} \perp$ bases $(\overline{AB})$ y $(\overline{DC})$

$\overline{BM} = \overline{MC}$;

$\overline{MF} \perp \overline{BC}$; $\overline{MF} = \rho$; $OO' = h$.

T.) $S = 2\pi\rho \cdot h$

D.) Se traza $\overline{ME} \parallel \overline{OB}$ y $\overline{CH} \perp \overline{OB}$ resultando $\triangle$ CHB $\sim$ $\triangle$ MEF; luego:

1) $\frac{ME}{MF} = \frac{CH}{CB}$

Como $\overline{ME}$ es la mediana del trapecio OBCO', se tiene que

$$\overline{ME} = \frac{R + r}{2} = \frac{1}{2} \cdot (R + r)$$

Reemplazando los valores correspondientes en 1), se obtiene:

$$\frac{\frac{1}{2}(R + r)}{\rho} = \frac{h}{g}$$

$$2\rho \cdot h = g \cdot (R + r);$$

multiplicando por π resulta:

$$2\pi\rho \cdot h = \pi g \cdot (R + r)$$

pero según N° 443-a: $S_l = \pi g \cdot (R + r)$

luego: a) $\boxed{S_l = 2\pi\rho \cdot h}$

Esta fórmula será de gran utilidad en la esfera.

446. ESFERA

Es el lugar Geométrico de todos los puntos del espacio que equidistan de un punto dado. Este punto se llama »centro de la esfera« y la distancia constante es el radio de ella.

También es un cuerpo de revolución y se engendra por la rotación en 360° de un semicírculo (por ej. AB) en torno a su diámetro AB; o bien, de un círculo en 180° en torno a su diámetro (Fig. 28).

1) *Círculos máximos:* son aquéllos que se determinan al cortar la esfera por un plano que pasa por el centro. Por ej. ⊙ (AB) o ⊙ (CD) (Fig. 28).

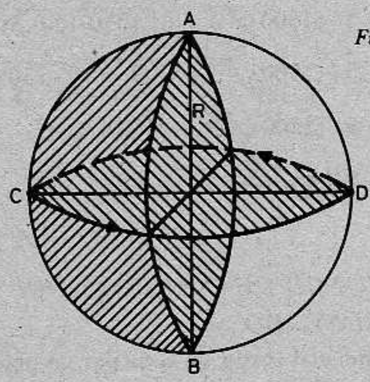


Fig. 28

2) *Segmento esférico* es la parte de la esfera comprendida entre dos planos // que cortan la esfera. Los planos (PQ) y (RS) determinan el segmento esférico (RSQP) (Fig. 29).

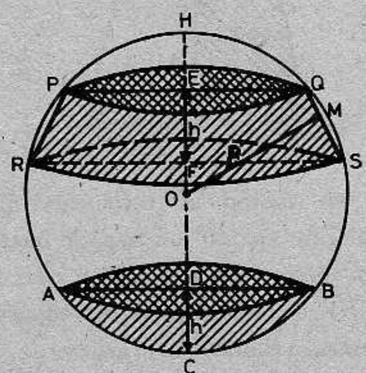


Fig. 29

3) *Zona esférica* es la superficie curva del segmento esférico.

4) Al cortar una esfera sólo por un plano (AB) se determina un *casquete esférico* (ABC): (Fig. 29). se puede considerar como un segmento esférico cuando uno de los planos es tangente a la esfera, o sea cuando uno de los círculos se reduce al punto de tangencia que pasa a ser el vértice C del casquete.

5) *Huso esférico* es una parte de la superficie de la esfera limitada por dos semicircunferencias máximas de diámetro común $\overline{PQ}$ (Fig. 30).

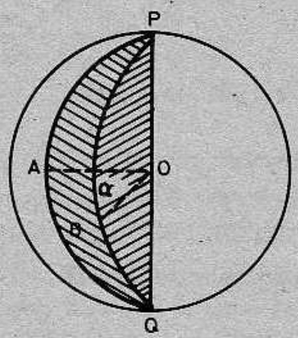


Fig. 30

6) *Cuña o inglete esférico* es una parte de la esfera comprendida entre dos semicírculos de diámetro común. El $\measuredangle$ diedro α que forman estos dos semicírculos se llama amplitud del huso o abertura de la cuña (Fig. 30).

7) *Sector esférico* es la parte de la esfera que se engendra al girar un sector circular (OB'PB) en torno a un diámetro PQ. Sobre la superficie de la esfera limita una zona esférica o un casquete esférico. En este último caso el sector esférico es la parte de la esfera que está limitada por un cono cuya cúspide está en el centro de la esfera y por el casquete esférico correspondiente (Fig. 31).

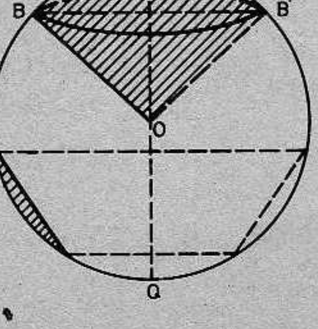


Fig. 31

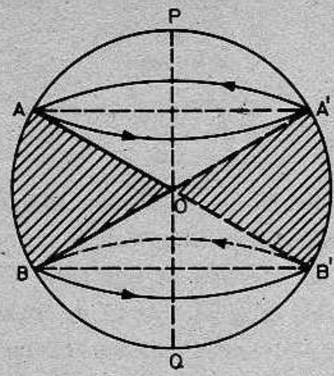


Fig. 32

8) *Anillo esférico* es la parte de la esfera engendrada por un sector circular al girar en torno a un diámetro (Fig. 32).

9) *Superficie de la zona y casquete esférico.* Los infinitos $\odot$ máxima que tienen por diámetro $\overline{CH}$ determinan en la zona esférica arcos iguales tales como (Fig. 29) $\widehat{PR} = \widehat{QS} = \ldots\ldots$ Trazando las cuerdas $\overline{PR}$, $\overline{QS}$, ... de estos arcos se forma un tronco de cono de generatriz $\overline{QS}$. Luego la superficie lateral de este tronco de cono será de acuerdo al Teorema del N° 445, igual a la $\odot$ de radio $\overline{MO}$ multiplicada por la altura $\overline{EF}$ = h del tronco de cono RSQP. Es decir:

a) $S = 2\pi\, \overline{MO} \cdot h$

Pero si la altura h es infinitamente pequeña la cuerda $\overline{QS}$ se hace igual al arco $\widehat{QS}$, y en consecuencia la $\perp \overline{MO}$ coincide con el radio R de la esfera.

Para calcular la superficie de la zona (RSQP) habría que dividir la altura $\overline{EF}$ = h en partes infinitamente pequeñas (a_1, $a_2 \ldots a_n$) trazar por estas partes planos paralelos a las anteriores que determinarán infinitas zonas cuyas superficies se determinarán por la fórmula anterior a). Sumando las superficies parciales S_1, $S_2 \ldots S_n$, de todas ellas se tendrá la superficie de la zona (RSQP) de altura EF = h. De este modo se obtiene (Fig. 29):

$$
+\left\{
\begin{array}{l}
S_1 = 2\pi R \cdot a_1 \\
S_2 = 2\pi R \cdot a_2 \\
\vdots \qquad\quad \vdots \\
S_n = 2\pi R \cdot a_n
\end{array}
\right.
$$

$$\overline{\quad S = 2\pi R \cdot (a_1 + a_2 \ldots + a_n). \quad}$$

pero:

$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = h$ luego:

b) $\boxed{S = 2\pi R \cdot h}$

Igual raciocinio se sigue para el casquete esférico llegándose a igual resultado.

Luego: "la superficie de una zona o de un casquete esférico es igual a la ⊙ de un círculo máximo por la altura de la zona o del casquete".

Si la esfera se corta sólo por un círculo máximo se forman dos semiesferas (o hemisferios) que son casquetes de altura igual al radio R de la esfera. Por lo tanto, la superficie de una semiesfera es, según b):

$$S = 2\pi R \cdot R = 2\pi R^2$$

y la superficie total de la esfera será el doble. Luego:

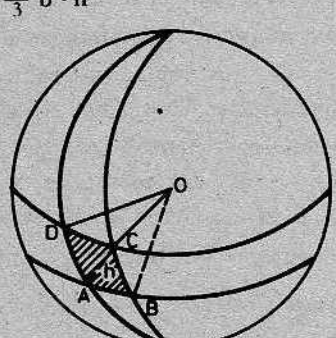
c) $\boxed{S = 4 \cdot \pi R^2}$

Es decir: »La superficie de una esfera es el cuádruplo de la superficie de uno de sus círculos máximos«.

10) *Volumen de la esfera:* Si se divide la superficie de la esfera en partes iguales (como la ABCD que se obtiene al cortarse dos meridianos con dos paralelos) y se unen su perímetro con el centro O de la esfera se obtiene una serie de pirámides de altura R y base ABCD = b. El volumen de una de estas pirámides es (Fig. 33):

$$V_1 = \frac{1}{3} b \cdot h$$

Fig. 33



Si estas pirámides son de base infinitamente pequeña, la suma de las bases de las infinitas pirámides que se forman dará la superficie de la esfera, y la altura de todas ellas será el radio R. de la esfera. Luego resulta:

$$+\left\{\begin{array}{l} V_1 = \frac{1}{3} b_1 \cdot R \\ V_2 = \frac{1}{3} b_2 \cdot R \\ \vdots \qquad \vdots \\ V_n = \frac{1}{3} b_n \cdot R \end{array}\right.$$

Sumando, se obtiene:

$$V = \frac{1}{3} R (b_1 + b_2 + \ldots + b_n);$$

pero

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n = 4\pi R^2;$$

luego:

$$V = \frac{1}{3} R \cdot 4\pi R^2; \text{ lo que da:}$$

d) $\boxed{V = \frac{4}{3} \pi R^3}$

O en función del diámetro $D = 2R$.

se obtiene:

e) $\boxed{V = \frac{\pi}{6} D^3}$

447. ¿Cuál es el volumen y la superficie de una esfera cuyo volumen es igual a la suma del volumen de dos esferas que tienen por superficie S_1 y S_2?

Solución: Se calculan los radios R_1 y R_2 de las esferas S_1 y S_2

$$S_1 = 4\pi R_1^2 \therefore R_1 = \sqrt{\frac{S_1}{4\pi}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S_1}{\pi}}$$

$$S_2 = 4\pi R_2^2 \therefore R_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S_2}{\pi}}$$

Como $V_x = V_1 + V_2$, resulta:

$$V_x = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{S_1}{\pi}}\right)^3 + \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{S_2}{\pi}}\right)^3$$

$$V_x = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{S_1}{\pi}\sqrt{\frac{S_1}{\pi}} + \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{S_2}{\pi}\sqrt{\frac{S_2}{\pi}}$$

$$V_x = \frac{S_1}{6}\sqrt{\frac{S_1}{\pi}} + \frac{S_2}{6}\sqrt{\frac{S_2}{\pi}}$$

Calcularemos el radio x de esta esfera:

$$\frac{4}{3}\pi x^3 = \frac{S_1}{6}\sqrt{\frac{S_1}{\pi}} + \frac{S_2}{6}\sqrt{\frac{S_2}{\pi}}$$

de donde:

$$x = \sqrt[3]{\frac{S_1}{8\pi}\sqrt{\frac{S_1^2}{\pi}} + \frac{S_2}{8\pi}\cdot\sqrt{\frac{S_2}{\pi}}}$$

luego:

$$S = 4\pi x^2 = 4\pi\sqrt[3]{\left(\frac{S_1}{8\pi}\sqrt{\frac{S_1}{\pi}} + \frac{S_2}{8\pi}\sqrt{\frac{S_2}{\pi}}\right)^2}$$

finalmente:

$$S = \sqrt[3]{S_1^3 + S_2^3 + 2S_1S_2\sqrt{S_1S_2}}$$

$$S = \sqrt[3]{(S_1\sqrt{S_1} + S_2\sqrt{S_2})^2}$$

448. A un cilindro se le inscribe una esfera y un cono. ¿En qué razón están los volúmenes de estos tres cuerpos? (Este problema fue resuelto por Arquímedes).

Solución: Siendo R el radio de la esfera, la altura del cilindro y la del cono es $h = 2R$; luego (Fig. 34):

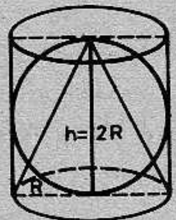


Fig. 34

$$V_1\,(\text{cono}) = \frac{1}{3}\pi R^2\cdot h = \frac{2}{3}\pi R^3$$

$$V_2\,(\text{esfera}) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$V_3\,(\text{cilindro}) = \pi R^2\cdot h = 2\pi R^3$$

$$V_1 : V_2 : V_2 = \frac{2}{3}\pi R^3 : \frac{4}{3}\pi R^2 : 2\pi R^3$$

$$V_1 : V_2 : V_3 = \frac{2}{3} : \frac{4}{3} : 2$$

$$V_1 : V_2 : V_3 = 2 : 4 : 6$$

$$V_1 : V_2 : V_3 = 1 : 2 : 3$$

Además resulta:

$$V_{cil} = C_{cono} + V_{esf}$$

449. Determinar la arista de un octaedro regular que tiene 1 m^3 de volumen (ver N° 435).

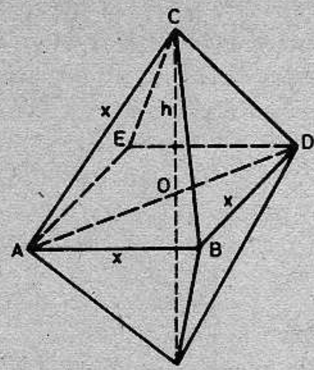


Fig. 35

Solución (Fig. 35): Sea la arista

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{BD} = \ldots = x$$

Luego:

$$\overline{AD} = x\sqrt{2} \text{ y además:}$$

$$\overline{AO} = \frac{x}{2}\sqrt{2}$$

$$h^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AO}^2 \text{ (Corolario Pitág.)}$$

$$h^2 = x^2 - \frac{2x^2}{4} = \frac{2x^2}{4}$$

$\therefore\ h = \frac{x}{2}\sqrt{2}$ **El volumen del octaedro es el doble de la pirámide ABDEC.**

Es decir:

$$V\,(\text{octaedro}) = 2\cdot\frac{1}{3}(ABDE)\cdot\overline{CO} =$$

$$= \frac{2}{3}x^2\cdot\frac{x}{2}\sqrt{2} = \frac{x^3}{3}\sqrt{2}$$

pero $V = 1\ m^3$

$$\therefore\ \frac{x^3}{3}\sqrt{2} = 1$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{3}{\sqrt{2}}} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}\sqrt{2}}\,[m] = \frac{1}{2}\cdot\sqrt[6]{288}\,[m]$$

450. **En una esfera se inscribe un rectángulo ABCD cuya diagonal mide 1,2 cm y la distancia entre el centro de la esfera y el punto de intersección de las diagonales mide 0,8 cm.**

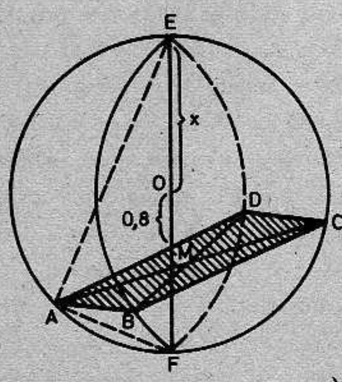


Fig. 36

Calcular: 1) el radio de la esfera. 2) la razón entre la superficie de los casquetes esféricos determinados por el rectángulo.

Solución (Fig. 36):

$\overline{AC} = 1{,}2$ cm $\therefore$ $\overline{AM} = 0{,}6$ cm;

$\overline{OM} = 0{,}8$ cm.

Sea $R = x$; $\overline{MF} = x - 0{,}8$;
como el $\triangle$ FEA es rectángulo, según el 2° Teorema de Euclides resulta:

$$\overline{AM}^2 = \overline{MF} \cdot \overline{ME}$$

$$0{,}36 = (x - 0{,}8) \cdot (x + 0{,}8)$$

$$0{,}36 = x^2 - 0{,}64$$

$$x^2 = 1 \therefore R = 1 \text{ cm}$$

$$\therefore \begin{cases} S_1 = 2\pi R \cdot h_1 = 2\pi R \cdot (1 - 0{,}8) = 0{,}2 \cdot 2\pi R \\ S_2 = 2\pi R \cdot h_2 = 2\pi R (1 + 0{,}8) = 1{,}8 \cdot 2\pi R \end{cases}$$

$$\therefore \frac{S_1}{S_2} = \frac{0{,}2}{1{,}8} = \frac{1}{9}$$

451. CONSTRUCCION DE MODELOS DE CUERPOS

A continuación se indica el desarrollo de los cinco poliedros regulares y de algunos otros cuerpos geométricos.

Su construcción puede darse de »tarea« para que los alumnos distingan concretamente y no sólo en un dibujo, lo que es la apotema lateral y la apotema basal, las caras laterales y las basales, aristas basales y laterales, etc.

Para esto pueden construirse modelos chicos en cartulina de modo que puedan pegarse convenientemente (sólo una cara o la base) en el cuaderno y poder, de esta manera, armarlos cuando sea necesario. O bien, construir modelos más grandes en cartón o en plástico transparente que pueden servir para exposiciones de material didáctico de los alumnos. Con el material plástico se pueden agregar, en su interior, las diagonales hechas con hilos de colores, las alturas, los planos diagonales, etc.

En los desarrollos de los cuerpos que se indican se han agregado franjas »achuradas« que, al ser engomadas, servirán de unión con las caras vecinas y poder, de esta manera, dejar el cuerpo formado en forma definitiva.

A) Cubo o hexaedro regular. El desarrollo de su superficie se compone de seis cuadrados congruentes.

B) Tetraedro regular. El desarrollo de su superficie se compone de cuatro triángulos equiláteros congruentes.

C) Octaedro regular. El desarrollo de su superficie se compone de ocho triángulos equiláteros congruentes.

D) Dodecaedro regular. Se compone de doce pentágonos regulares congruentes.

E) Icosaedro regular. Se compone de 20 triángulos equiláteros congruentes.

F) Paralelepípedo rectangular. Se compone de seis rectángulos congruentes de dos en dos.

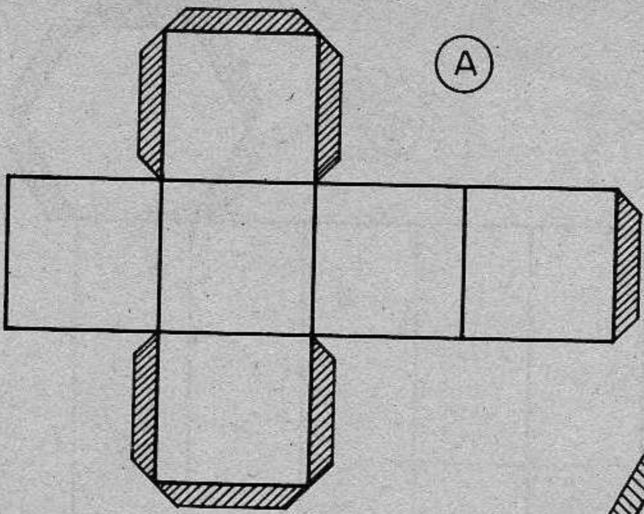
G) Prisma recto hexagonal. Su superficie lateral se desarrolla en seis rectángulos congruentes y su superficie basal, en dos hexágonos regulares congruentes.

H) Cilindro recto. El desarrollo de la superficie curva (manto del cilindro) es un rectángulo que tiene por lados la altura del cilindro y la longitud de la circunferencia basal.

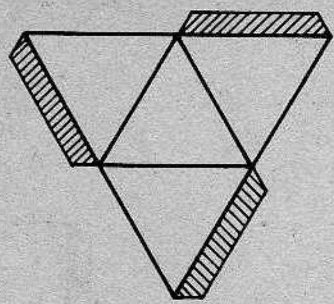
I) Cono recto. El desarrollo de la superficie curva (manto del cono) es un sector circular que tiene por radio a la generatriz del cono y por arco la longitud de la circunferencia basal.

J) Tronco de pirámide irregular. El desarrollo de la superficie lateral del caso presentado se compone de trapecios no congruentes. Además, las bases corresponden a dos polígonos semejantes.

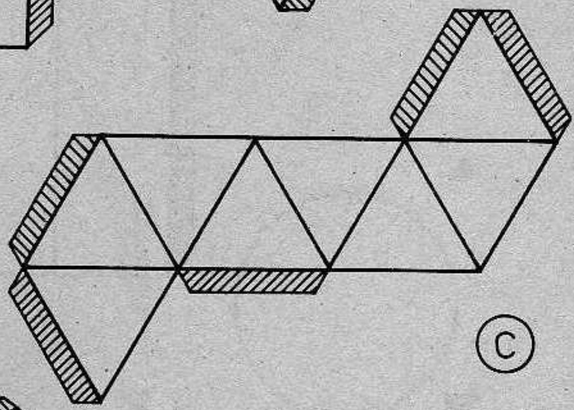
Observación: Para la construcción del cilindro y del cono consultar las soluciones de la »rectificación de la circunferencia« dadas en el N° 390.



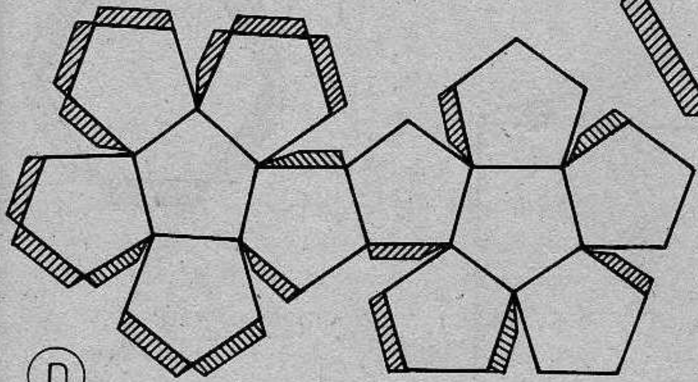
A



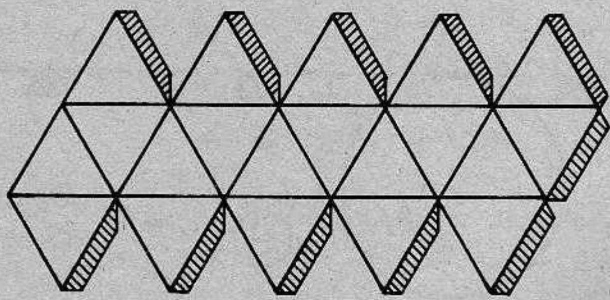
B



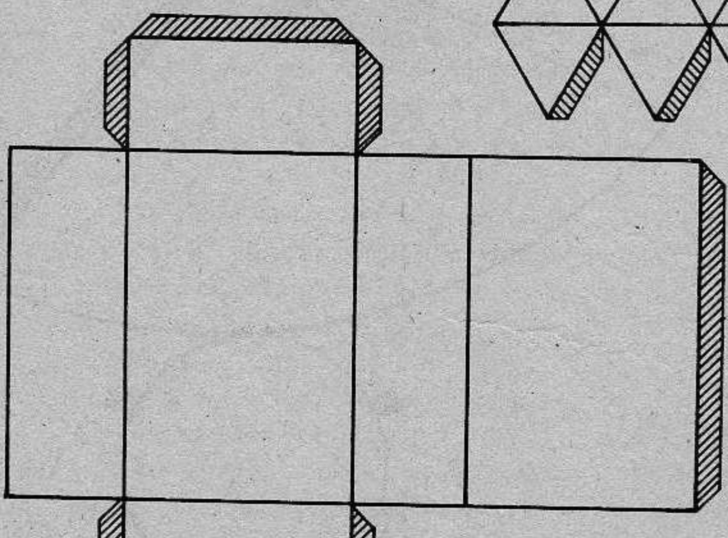
C



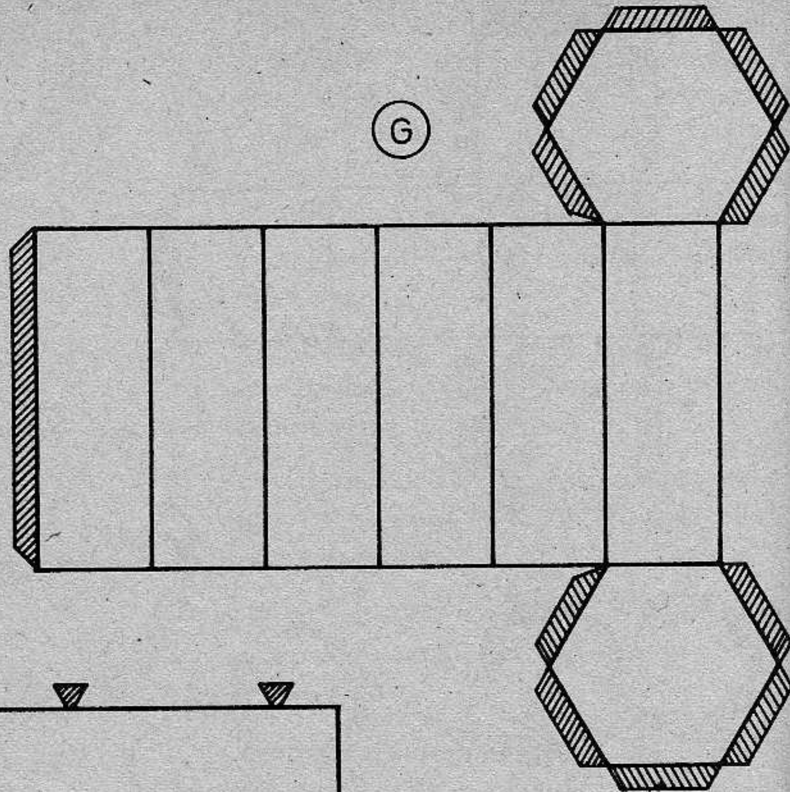
D



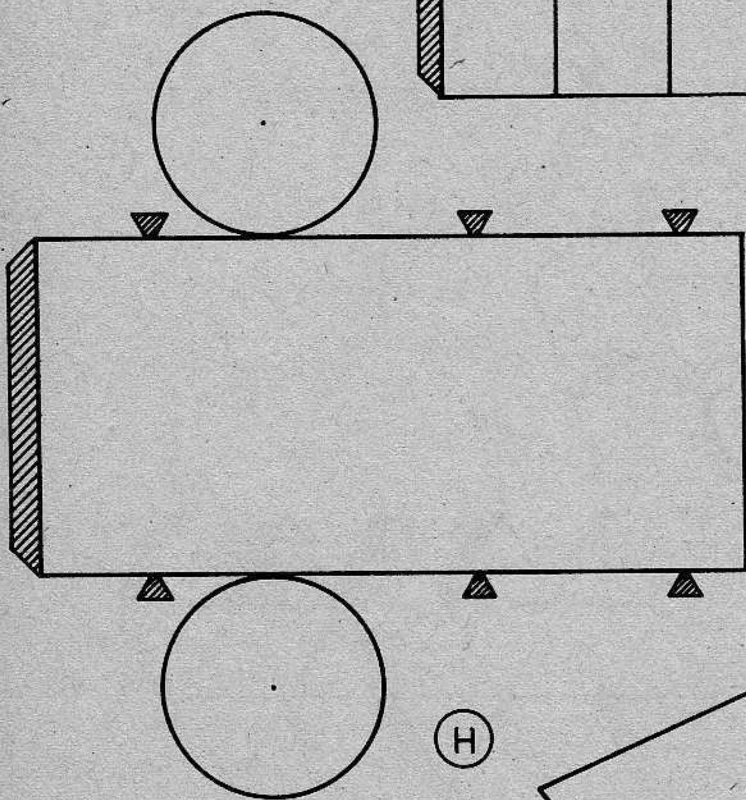
E



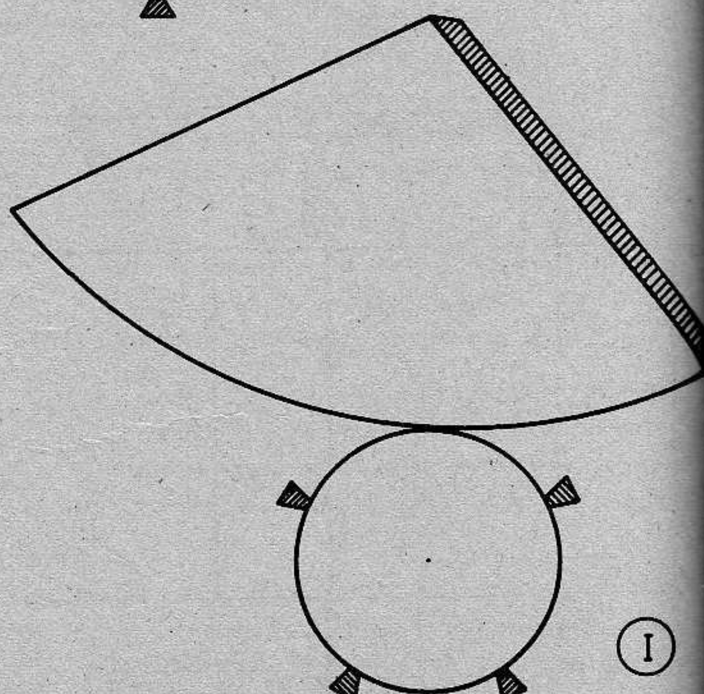
F



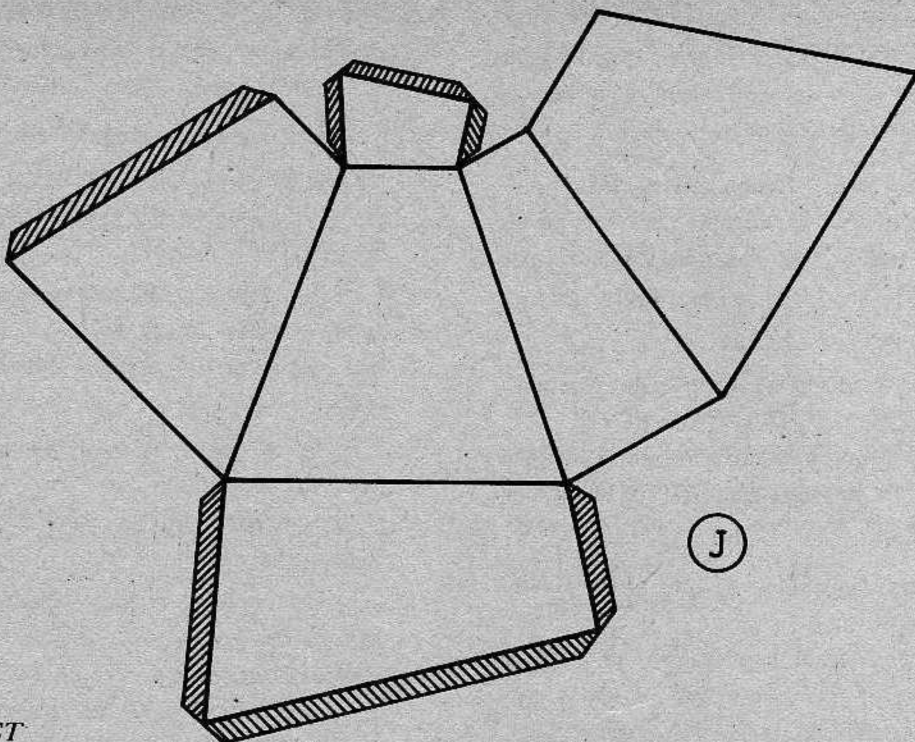
G



H



I



452. TEST

Coloque dentro del paréntesis una »V« si lo que se afirma es verdadero o una »F« si es falso.

1) (...) La generatriz de un cono recto mide el doble del radio basal. Se afirma que la razón entre el área basal y el área del manto es 1:2.

2) (...) La generatriz de un cono recto es el doble del radio basal. Se afirma que el volumen de la esfera circunscrita al cono en función del radio basal es:

$V = \frac{32}{27} \pi r^3 \cdot \sqrt{3}$

3) (...) En un cilindro recto su altura y su radio basal son entre sí como 8:3. Se afirma que la razón entre el volumen de este cilindro y el de la esfera circunscrita a él es 54:125.

4) (...) En un cono recto la generatriz es igual al diámetro basal. Se circunscribe una esfera a este cono, y, en seguida, a esta esfera se le circunscribe un cilindro recto.
Se afirma que la razón entre los volúmenes de estos tres cuerpos es 9:32:48.

5) (...) Por el punto medio de una arista lateral de una pirámide recta-regular octogonal se traza un plano paralelo a la base.
Se afirma que la nueva pirámide es 1/8 del volumen de la pirámide primitiva.

6) (...) Si en el problema anterior la base es un hexágono regular el volumen de la nueva pirámide es 1/16 del volumen de la pirámide primitiva.

7) (...) Si en el problema anterior la pirámide es oblicua en vez de recta, la razón entre la nueva pirámide y la primitiva es 1/8 cualquiera que sea el polígono basal.

8) (...) En una pirámide de base octogonal se traza un plano paralelo a la base por el punto que divide a la altura en la razón 3:5 a partir del vértice.
Se afirma que la razón entre los volúmenes de los cuerpos resultantes es 9:55.

9) (...) Los catetos de un triángulo rectángulo miden 6 y 8 cm. Se afirma que al girar en 360° en torno a la hipotenusa se engendra un cuerpo cuyo volumen es $76{,}8\,\pi$ cm^3.

10) (...) El lado de un triángulo equilátero mide 2a. Se afirma que al hacerlo girar en torno a su altura se engendra un cuerpo cuya superficie total mide $3\pi a^2$.

11) (...) El lado de un triángulo equilátero mide 2a. Se afirma que al hacerlo girar en torno a un lado se engendra un cuerpo cuya superficie total mide $4\pi a^2 \sqrt{3}$.

12) (...) El lado de un triángulo equilátero mide 2a. Se afirma que el volumen del cuerpo que se engendra al girar este triángulo en torno a su altura es $\frac{1}{3}\pi\ a^3 \cdot \sqrt{3}$.

13) (...) El lado de un triángulo equilátero mide 2a.
Se afirma que al girar en torno a su lado en 360° se genera un cuerpo cuyo volumen es $2\pi a^3$.

14) (...) Las diagonales de un rombo miden 10 cm y 24 cm.
Se afirma que al hacerlo girar en 360° en torno a un lado se engendra un cuerpo cuya superficie total mide 480π cm^2.

15) (...) Las diagonales de un rombo miden 10 cm y 24 cm. Se afirma que el volumen del cuerpo que se engendra al hacerlo girar en 360° en torno a un lado es 120π cm^3.

16) (...) Un triángulo está determinado por los puntos A(3;2), B (5;10), C (3;5). Al girar el △ ABC en torno al eje de las abscisas en 360° y considerando $\pi = 3{,}14$ y las raíces que aparezcan con dos decimales, se obtiene un cuerpo cuya superficie total mide 630,29.

17) (...) Un triángulo está determinado por los puntos A(3;2), B(5;10), C(3;5). Se afirma que al hacer girar el △ ABC en 360° en torno al eje de las ordenadas se engendra un cuerpo cuya superficie total mide 398,91.

18) (...) El mismo triángulo del problema anterior al girar en 360° en torno al eje de las X engendra un cuerpo cuyo volumen es $34 \cdot \pi$.

19) (...) El mismo triángulo anterior al girar en torno al eje de las Y, se afirma que engendra un cuerpo cuyo volumen es 22π.

20) (...) Se afirma que para que la superficie del manto de un cono recto sea el cruádruplo de la superficie basal, su altura debe medir $r \cdot \sqrt{15}$.

21) (...) Un trazo está determinado por los puntos A(10; −4), B(2;2). Se afirma que al girar este trazo en 360° en torno al eje de las ordenadas se obtiene una superficie curva que mide 120π.

22) (...) Un trapecio está determinado por los puntos A (O; −4), B (10; −4), C (2, 2), D(O;2). Se afirma que el volumen del cuerpo que se engendra al girar 360° en torno a las Y mide 248π.

23) (...) En una circunferencia de 10 cm de radio se inscribe un trapecio isósceles de 16 cm y 12 cm de bases. Al girar sólo el trapecio en torno a la simetral de las bases se afirma que se engendra un cuerpo cuya superficie total mide 240π cm^2.

24) (...) Se afirma que el mismo trapecio anterior engendra un cuerpo cuyo volumen mide $690\frac{2}{3}\pi$ cm^3.

 Patricio Saavedra

Cuerpos y superficies de revolución. Teoremas de Guldin. La cuña o inglete esférico. Huso esférico. Volumen del "toro".

---

453. Los principales cuerpos de revolución que hemos ya estudiado son el cilindro, el cono, el tronco de cono y la esfera. Ahora, resolveremos algunos problemas sobre ellos:

1) Un △ equilátero gira primero en torno a su altura y después en torno a un lado. ¿En qué razón se encuentran los volúmenes de los cuerpos engendrados?

Solución:

Sea su lado $= 2a$; luego su altura $h = a\sqrt{3}$.

1°. Se engendra un cono de altura

$\overline{CM} = a\sqrt{3}$,

de generatriz $\overline{AC} = 2a$ y radio $\overline{AM} = a$ (Fig. 1).

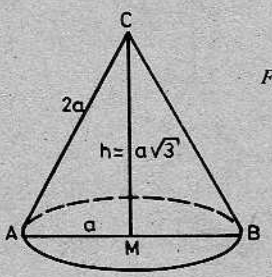


Fig. 1

Luego:

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi \cdot a^2 \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^3}{3}\pi\sqrt{3}$$

2°. Se engendran dos conos de base común $\overline{CD}$, altura $\overline{AM} = \overline{MB} = a$ y generatriz $\overline{AC} = \overline{AD} = 2a$. (Fig. 2).

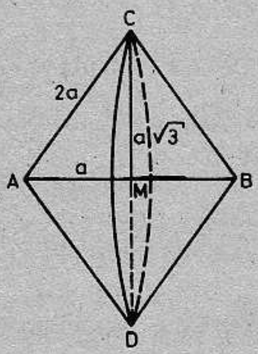


Fig. 2

Luego:

$$V_2 = 2 \cdot \frac{\pi r^2}{3} h = \frac{2\pi \cdot (a\sqrt{3})^2}{3} \cdot a = 2\pi a^3$$

La razón pedida es:

$$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{\pi a^3}{3}\sqrt{3}}{2\pi a^3} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

2) A una ⊙ de radio 10 cm se le inscribe un trapecio isósceles de perímetro 100 cm; el conjunto gira en torno a la simetral de las bases. ¿Cuánto mide el volumen del cuerpo comprendido entre el volumen del cuerpo engendrado por el trapecio y el volumen del cuerpo engendrado por la ⊙?

***Solución* (Fig. 3):**

Sea $\rho = 10$ cm; $2s = 100$ cm.

Como es un cuadrilátero circunscriptible se tiene que:

$a + c = b + d = s = 50$ cm

Además, por ser trapecio isósceles

$b = d = 25$ cm.

Como $h = 20$ cm, resulta aplicando el Corolario de Pitágoras al △ EBC:

$p^2 = b^2 - h^2 = 25^2 - 20^2 = 225$

luego $p = 15$ cm; o sea:

$\overline{\mathbf{AE'}} = \overline{\mathbf{EB}} = p = 15$ cm.

Como $a + c = 50$ cm y siendo $a = 2p + c$ resulta:

$2 \cdot 15 + c + c = 50$ de donde:

$c = 10$ cm; $a = 40$ cm.

Los cuerpos engendrados son (Fig. 3):

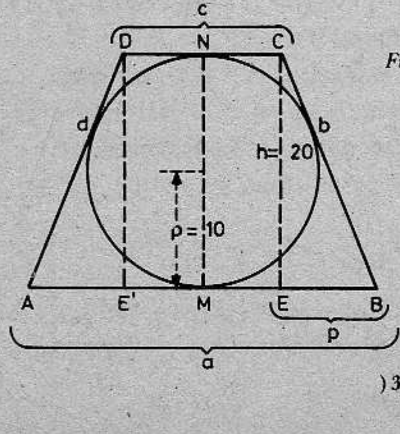


Fig. 3

1°. un tronco de cono de radios basales $\overline{AM} = 20$ cm y $\overline{DN} = 5$ cm, de altura $\overline{MN} = 20$ cm y generatriz $\overline{AD} = 25$ cm.

2°. una esfera de radio $\rho = 10$ cm.

1°. V_1 (tronco cono) $= \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + R \cdot r)$

$$V_1 = \frac{\pi \cdot 20}{3}(20^2 + 5^2 + 20 \cdot 5) =$$

$$= \frac{10500\pi}{3} = 3500\pi \text{ (cm}^3)$$

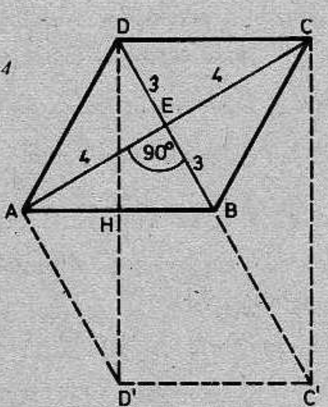
2°. $V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 10^3 = \frac{4000}{3}\pi \text{ (cm}^3)$

a) $V_1 : V_2 = \frac{10500\pi}{3} : \frac{4000\pi}{3} = 21:8$

b) $V_1 - V_2 = \frac{6500}{3}\pi \text{ cm}^3$

3) Las diagonales de un rombo miden 8 y 6 cm. Calcular el volumen del cuerpo engendrado al girar el rombo en torno a un lado.

Fig. 4



Solución: Como las diagonales del rombo son perpendiculares, el lado (Fig. 4)

$$\overline{AB} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ cm.}$$

Se engendra el cono (D'DA) más cilindro (C'CD'D) y menos cono C'CB. Pero como $\triangle$ D'DA $\cong$ C'CB, queda sólo un volumen equivalente al del cilindro (C'CDD') de radio basal: DH.

El problema es, por lo tanto, calcular $\overline{DH}$. Pero como el área del rombo es igual al semiproducto de sus diagonales, o bien, a su base por su altura, resulta:

$$\text{Area} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24 \text{ cm}^2$$

$$\text{Area} = \overline{AB} \cdot \overline{DH} = 5 \cdot \overline{DH}$$

luego:

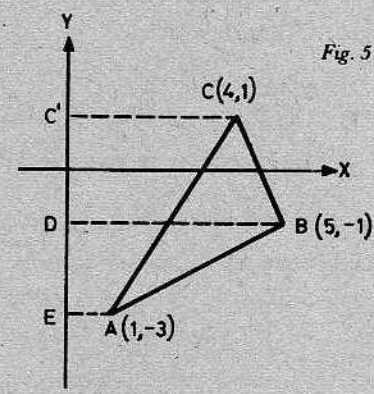
$$\overline{DH} = \frac{24}{5} = 4{,}8 \text{ cm} = \text{radio del cilindro.}$$

Por lo tanto:

$$V = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot (4,8)^2 \cdot 5 = 115{,}2\pi \text{ cm}^3$$

4) En un sistema cartesiano se unen los puntos A (1, −3); B (5, −1) y C (4, 1). El $\triangle$ que determinan gira en torno al eje de las ordenadas. Calcular el volumen del cuerpo engendrado por el triángulo.

Fig. 5



Solución:

Se engendra (Fig. 5):

1°. tronco de cono de radios basales:

$\overline{BD} = 5$ y $\overline{CC'} = 4$; altura $\overline{C'D} = 2$.

2°. tronco de cono de radios basales $\overline{DB} = 5$ y $\overline{EA} = 1$; altura $\overline{DE} = 2$.

3°. A la suma de los dos anteriores se debe restar el tronco de cono de radios basales $\overline{CC'} = 4$ y $\overline{EA} = 1$; altura $\overline{C'E} = 4$.

Luego:

$$V_1 = \frac{\pi \cdot 2}{3}(5^2 + 4^2 + 5 \cdot 4) = \frac{122\pi}{3}$$

$$V_2 = \frac{\pi \cdot 2}{3}(5^2 + 1^2 + 5 \cdot 1) = \frac{62\pi}{3}$$

$$V_1 + V_2 = \frac{122\pi}{3} + \frac{62\pi}{3} = \frac{184\pi}{3}$$

$$V_3 = \frac{\pi \cdot 4}{3}(4^2 + 1^2 + 4 \cdot 1) = \frac{84\pi}{3}$$

Luego el volumen pedido $= \frac{100}{3}\pi = 33\frac{1}{3}\pi$.

6) Las bases de un trapecio isósceles miden 24 cm y 8 cm respectivamente y su lado 10 cm. ¿En qué razón se encuentran los volúmenes de los cuerpos engendrados cuando gira: a) en torno a la simetral de las bases, b) en

torno a la base mayor y c) en torno a la base menor?

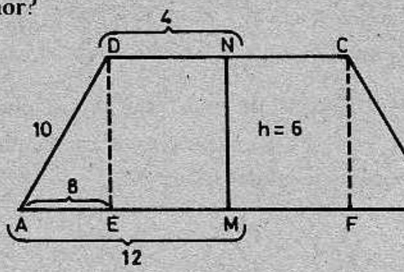


Fig. 6

Solución:

a) Se engendra un tronco de cono de $R_1 = 12$; $r_2 = 4$ y $h^2 = 10^2 - 8^2$; o sea $h = 6$ cm. Luego (Fig. 6):

$$V_1 = \frac{\pi}{3}(R^2 + r^2 + R \cdot r) = \frac{\pi \cdot 6}{3}(144 + 16 + 48) =$$

$$V_1 = 416\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

b) Se engendra un cilindro (EFCD) de radio $\overline{CF} = 6$ cm, altura $\overline{EF} = 8$ cm, más dos conos congruentes (EDA) y (CFB) de radio $\overline{CF} = \overline{DE} = 6$ cm y altura $\overline{AE} = \overline{FB} = 8$. Luego: (Fig. 6).

$$V_2 = \pi \cdot 6^2 \cdot 8 + \frac{2}{3}\pi \cdot 6^2 \cdot 8 = 480\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

c) Se engendra el cilindro ABB'A' menos dos conos A'AD (que es congruente con el cono BB'C). Luego: (Fig. 7).

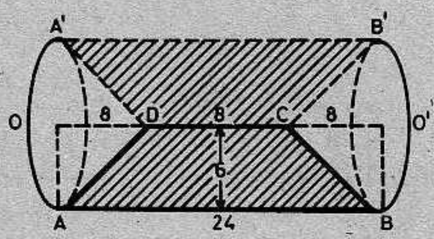


Fig. 7

$$V_3 = \pi \cdot 6^2 \cdot 24 - \frac{2}{3} \cdot 6^2 \cdot 8 = 672\pi \text{ cm}^3$$

Por lo tanto, la razón entre los volúmenes engendrados es:

$$V_1 : V_2 : V_3 = 416\pi : 480\pi : 672\pi;$$

simplificando por 32π resulta:

$$V_1 : V_2 : V_3 = 13 : 15 : 21$$

6) Las bases de un trapecio rectángulo miden 12 y 4 cm; el lado no$\perp$mide 10 cm. Giran sucesivamente en torno al lado $\perp$ a las bases, en torno a la base mayor y en torno a la base menor. Calcular la razón entre los 3 volúmenes engendrados.

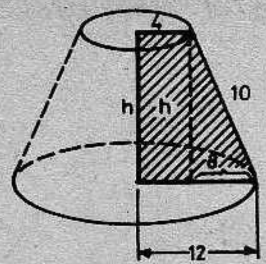


Fig. 8

Solución:

a) Se engendra un cono truncado (Fig. 8):

$R = 12$ cm, $r = 4$ cm y $g = 10$ cm.

$$\therefore h^2 = 10^2 - 8^2 = 36 \therefore h = 6$$

$$V_1 = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + R \cdot r)$$

$$\therefore V_1 = \frac{\pi \cdot 6}{3}(144 + 16 + 48) \therefore V_1 = 416\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

b) Se engendra un cono de $r = 6$ cm, $h = 8$ cm y un cilindro de $r = 6$ cm y $h = 4$ cm. (Fig. 9).

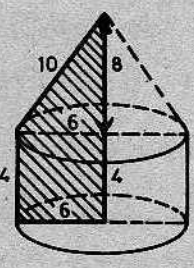


Fig. 9

$$V_2 = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 8}{3} + \pi \cdot 6^2 \cdot 4 = 240\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

c) Se engendra un cilindro de $r = 6$ cm y altura de 12 cm, menos un cono de $r = 6$ cm y $h = 8$ cm. (Fig. 10).

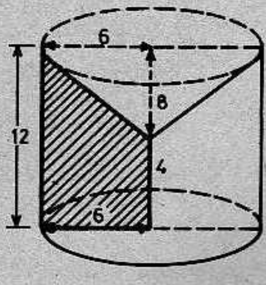


Fig. 10

$$V_3 = \pi \cdot 6^2 \cdot 12 - \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 8}{3} = 336\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

Luego:

$$V_1 : V_2 : V_3 = 416\pi : 240\pi; \ 336\pi$$

simplificando por 16π queda:

$$V_1 : V_2 : V_3 = 26 : 15 : 21$$

7) Calcular el volumen engendrado por la revolución de un paralelogramo, dados sus

dos lados a y b en torno de su lado b, siendo $a > b$ y $\alpha = 60°$.

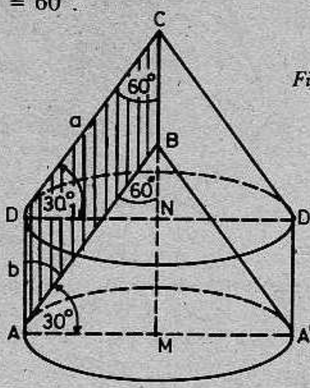


Fig. 11

Solución (Fig. 11):

V = Volumen engendrado = cilindro

AA'D'D + cono DD'C − cono AA'B; pero los conos son $\cong$; luego V = cilindro AA'D'D; en el $\triangle$ DNC: se tiene $\measuredangle$ CDN = 30°; luego $\overline{DN}$ = = altura $\triangle$ equilátero de lado $\overline{CD}$ = a, luego:

$$\overline{CN} = \frac{a}{2};\ \overline{DN} = \frac{a}{2}\sqrt{3} = r;\ \overline{MN} = b$$

$$V = \pi r^2 h = \pi\left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2 \cdot b \therefore V = \frac{3}{4}\pi a^2 b$$

8) Un trapecio isósceles de 60° = α de bases a y $\frac{a}{2}$ gira en torno a uno de sus lados.

Calcular el volumen y superficie del cuerpo engendrado.

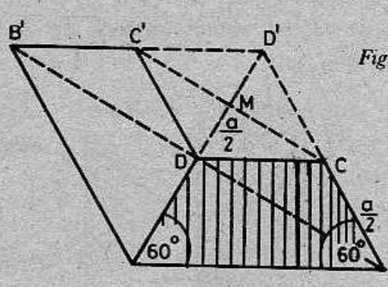


Fig. 12

Solución (Fig. 12):

V = vol. engendrado = cono BB'A + tronco cono **BB'C'C − cono CC'D o bien:**

V = cono BB'A + cono BB'D' − 2 conos CC'D'

$$\overline{AD'} = a;\ BD = \frac{a}{2}\sqrt{3} = r;$$

$$\overline{MC} = \frac{a}{4}\sqrt{3}$$

V = 2 · (cono BB'A − cono CC'D')

$$V = \frac{2}{3}\cdot\left[\pi\left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2\cdot\frac{a}{2} - \pi\cdot\left(\frac{a}{4}\sqrt{3}\right)^2\cdot\frac{a}{4}\right]$$

$$V = \frac{2}{3}\pi\left(\frac{\overset{24}{\cancel{3}}}{\underset{64}{\cancel{8}}}a^3 - \frac{3}{64}a^3\right) = \frac{2}{3}\pi\cdot\frac{21}{64}a^3 = \frac{7}{32}\pi a^3$$

9) El volumen de un cono de revolución es 320π cm³. Si su altura es 15 cm ¿cuánto mide la superficie lateral (manto)?

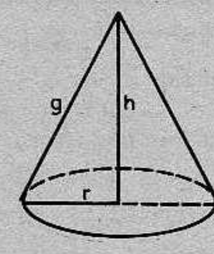


Fig. 13

Solución (Fig. 13):

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$$

$$320\pi = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot 15$$

luego

$$r^2 = 64;\ \text{de donde } r = 8 \text{ cm}$$

Además:

$$g^2 = h^2 + r^2 = 15^2 + 8^2 = 289$$

de donde:

$$g = 17 \text{ cm}$$

Finalmente:

$$S_l = \pi rg = \pi\cdot 8\cdot 17 = 136\pi\ (=)\ 427{,}26 \text{ cm}^2.$$

10) Los vértices de un triángulo son A (O, −3), B (12, −3) y C (6;5). Calcular la superficie total y el volumen del cuerpo engendrado al girar el triángulo en torno al eje de las ordenadas.

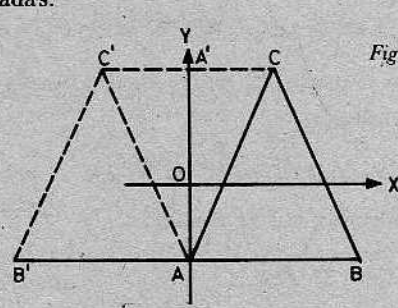


Fig. 14

Solución (Fig. 14):

Se engendra el tronco de cono B'BCC' menos el cono CC'A.

1°. Tronco cono de altura $\overline{AA'}$ = 8; radios basales $\overline{AB}$ = 12 y $\overline{A'C'}$ = 6; y generatriz $\overline{AC}$:

$\overline{AC} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$

$V_1 = \frac{\pi h}{3} (R^2 + r^2 + R \cdot r)$

$V_1 = \frac{\pi \cdot 8}{3} (12^2 + 6^2 + 12 \cdot 6) = 672\pi$

2°. S_l (manto del tronco) =

$\pi g \cdot (R + r) = \pi \cdot 10 (12 + 6) = 180\pi$

$B_1 = \pi R^2 = 144\pi$

$B_2 = \pi r^2 = 36\pi$

Luego:

S'_t (tronco cono) =

$180\pi + 144\pi + 36\pi = 360\pi$

3°. cono: $V_2 = \frac{\pi}{3} r^2 \cdot h = \frac{\pi}{3} \cdot (6)^2 \cdot 8 = 96\pi$

S_l (cono) $= \pi rg = \pi \cdot 6 \cdot 10 = 60\pi$

$B = \pi r^2 = \pi \cdot 6^2 = 36\pi$

S''_t (cono) $= 60\pi + 36\pi = 96\pi$

Luego:

a) Superficie del cuerpo engendrado es S:

S = S_l (tronco) + S_l (cono) + Base mayor tronco =

$S = 180\pi + 60\pi + 144\pi = 384\pi$.

b) Volumen del cuerpo engendrado V:

V = vol. tronco − vol. cono = $V_1 - V_2$

$V = 672\pi - 96\pi = 576\pi$

11) Las coordenadas de los vértices de un △ son A (4,3), B (8,12) y C (4,7). Si el △ gira en torno al eje de las ordenadas ¿cuál es el volumen del cuerpo engendrado?

Solución: Se engendra el tronco de cono (A'BB') menos el tronco de cono (C'CBB') y menos el cilindro (A'ACC'). (Fig. 15).

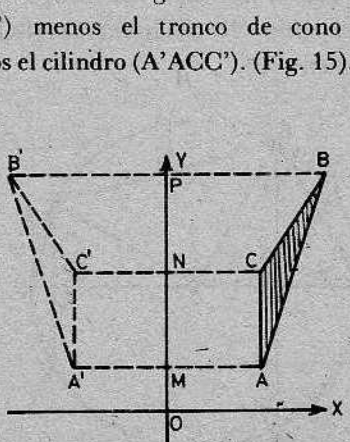


Fig. 15

1°) Tronco cono (A'ABB') de altura $\overline{MP} = 12 - 3 = 9$;

y radios basales $\overline{PB} = 8$ y $\overline{MA} = 4$

$V_1 = \frac{\pi \cdot 9}{3} (8^2 + 4^2 + 8 \cdot 4) = 336\pi$

2°. Tronco cono (BB'C'C) de altura $\overline{NP} = 12 - 7 = 5$

$V_2 = \frac{\pi \cdot 5}{3} (8^2 + 4^2 + 8 \cdot 4) = \frac{560}{3} \pi = 186 \frac{2}{3} \pi$

3°. Cilindro A'ACC' de altura

$\overline{MN} = 7 - 3 = 4$

$V_3 = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 4^2 \cdot 4 = 64\pi$

Luego el volumen del cuerpo engendrado por △ ABC es:

$V = V_1 - V_2 - V_3 = 336\pi - 186 \frac{2}{3} \pi - 64\pi = 85 \frac{1}{3} \pi$

12) En un sistema cartesiano las coordenadas de los vértices de un trapezoide son A (O, −6), B (10, −2), C (10,4) y D (5,8). Calcular el volumen del cuerpo engendrado al girar en torno al eje de las ordenadas.

Solución: Se engendra: el cono ABB', + cilindro BCC'B' + tronco de cono C'CDD' − cono DD'A. (Fig. 16).

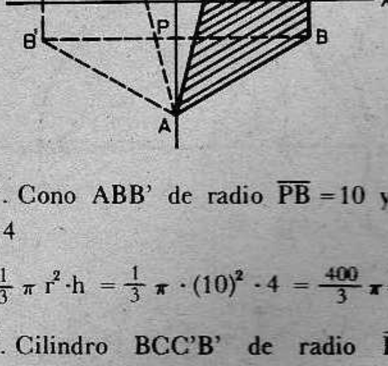


Fig. 16

1°. Cono ABB' de radio $\overline{PB} = 10$ y altura $\overline{PA} = 4$

$V_1 = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \pi \cdot (10)^2 \cdot 4 = \frac{400}{3} \pi = 133 \frac{1}{3} \pi$

2°. Cilindro BCC'B' de radio $\overline{PB} = 10$ y altura $\overline{BC} = 6$

$V_2 = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot (10)^2 \cdot 6 = 600\pi$

3°. Tronco cono C'CDD' de altura $\overline{MN} = 4$ y radios basales $\overline{NC} = 10$ y $\overline{MD} = 5$.

$$V_3 = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + R\cdot r) = \frac{\pi\cdot 4}{3}(10^2 + 5^2 + 10\cdot 5)$$

$$= \frac{700\pi}{3}\pi = 233\frac{1}{3}\pi$$

4°. Cono (DD'A) de radio $\overline{MD} = 5$ y altura $\overline{AM} = 14$.

$$V_4 = \frac{1}{3}\pi r^2\cdot h = \frac{1}{3}\pi\cdot(5)^2\cdot 14$$

$$= \frac{350\pi}{3} = 116\frac{2}{3}\pi$$

Luego el volumen V del cuerpo engendrado es:

$$V = (V_1 + V_2 + V_3) - V_4 = 966\frac{2}{3}\pi - \frac{350\pi}{3} = 850\pi$$

13) Los catetos de un triángulo rectángulo miden 15 cm y 20 cm. Calcular el volumen del cuerpo que se engendra al girar un torno: a) al cateto menor; b) al cateto mayor; c) a la hipotenusa; d) a la altura.

14) Los catetos de un triángulo rectángulo miden 60 cm y 80 cm. Calcular la razón entre los volúmenes de los cuerpos engendrados al girar sucesivamente un torno a sus tres lados y a su altura.

454. PROBLEMAS VARIOS RESUELTOS

1) En una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$ se aplica una cuerda $\overline{AC} = l_6$; se une B con C. Calcular el volumen y la superficie del cuerpo que se engendra al girar el $\triangle$ ABC en torno al diámetro $\overline{AB}$.

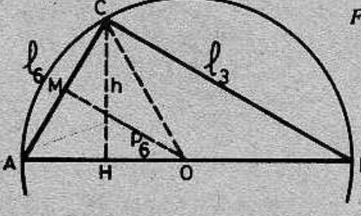


Fig. 17

Solución (Fig. 17):

$\overline{AC} = l_6 = r$; resulta

$$\overline{BC} = 2\rho_6 = 2\cdot\frac{r}{2}\sqrt{3} = r\sqrt{3} = l_3$$

Como $\triangle$ AOC es equilátero de lado $= r$, su altura es:

$$h = \frac{r}{2}\sqrt{3}$$

Al girar se engendran dos conos de radios $= h$

1^r^ cono HCA: tiene por altura

$\overline{AH} = \frac{r}{2}$, generatriz $\overline{AC} = r$

y radio basal $\overline{CH} = \frac{r}{2}\sqrt{3}$.

La superficie de su manto es:

$$S_1 = \pi rg = \pi\frac{r}{2}\sqrt{3}\cdot r = \frac{\pi r^2}{2}\sqrt{3}$$

Su volumen es

$$V_1 = \frac{\pi r^2}{3}\cdot h = \frac{\pi\cdot(\frac{r}{2}\sqrt{3})^2\cdot\frac{r}{2}}{3} = \frac{\pi r^3}{8}$$

2° cono CHB: Su altura es $\overline{BH} = \frac{3}{2}r$; su generatriz $\overline{BC} = r\sqrt{3}$ y su radio basal $= \frac{r}{2}\sqrt{3}$.

Superficie de su manto:

$$S_2 = \pi\cdot\frac{r}{2}\sqrt{3}\cdot r\sqrt{3} = \frac{3}{2}\pi r^2$$

Su volumen es:

$$V_2 = \frac{\pi r^2\cdot h}{3} = \frac{\pi}{3}\cdot(\frac{r}{2}\sqrt{3})^2\cdot\frac{3}{2}r = \frac{3}{8}\pi r^3$$

Luego:

a) La superficie del cuerpo engendrado es:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{\pi r^2}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{2}\pi r^2 = \frac{\pi r^2}{2}(\sqrt{3} + 3)$$

b) El volumen del cuerpo es:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{\pi}{8}r^3 + \frac{3}{8}\pi r^3 = \frac{1}{2}\pi r^3$$

2) En una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB} = 2r$ se aplica una cuerda $\overline{AD} = l_6$ y otra $\overline{BC} = l_{12}$. Se une D con C. Calcular la superficie y el volumen del cuerpo que se engendra al girar el cuadrilátero ABCD en torno al diámetro AB.

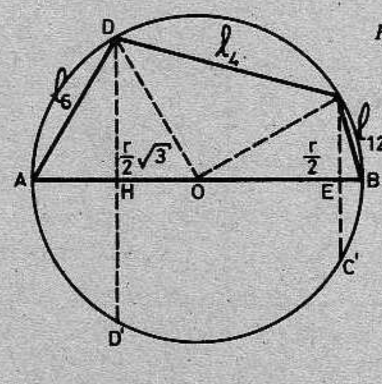


Fig. 18

Solución: (Fig. 18).

Se tiene que:

$\overline{AD} = l_6 = r; \overline{BC} = l_{12} = r\sqrt{2-\sqrt{3}}$

$\overline{CD} = l_4 = r\sqrt{2}$ ($\measuredangle$ DOC = 90°)

$\overline{DH} = \frac{r}{2}\sqrt{3}$ (altura $\triangle$ equilátero lado r)

$\overline{CE} = \frac{r}{2}$ (porque $\overline{CC'} = l_6 = r$)

$\overline{AH} = \frac{r}{2}$

$\overline{BE} = \frac{r}{2}(2-\sqrt{3})$ (ver N° 392-8 o Teorema Pitágoras al $\triangle$ CEB)

$\overline{HE} = 2r - \frac{r}{2} - \frac{r}{2}(2-\sqrt{3}) = \frac{r}{2}(1+\sqrt{3})$

Al girar el $\triangle$ AHD engendra un cono, el trapecio DHEC engendra un tronco de cono y el $\triangle$ CEB otro cono.

1°. *Cono HDA:* altura $\overline{AH} = \frac{r}{2}$; generatriz $\overline{AD} = r$; radio $= \frac{r}{2}\sqrt{3} = \overline{DH}$.

$S_1 = \pi rg = \pi \cdot \frac{r}{2}\sqrt{3}\cdot r = \frac{\pi r^2}{2}\sqrt{3}$

Su volumen es:

$$V_1 = \frac{\pi r^2}{3}\cdot h = \frac{\pi\cdot(\frac{r}{2}\sqrt{3})^2\cdot\frac{r}{2}}{3} = \frac{\pi r^3}{8}$$

2°. *Tronco cono: DHEC:* de radio basales $\overline{DH} = \frac{r}{2}\sqrt{3}$ y $\overline{CE} = \frac{r}{2}$;

generatriz $\overline{DC} = r\sqrt{2}$; altura $\overline{HE} = \frac{r}{2}(1+\sqrt{3})$

$S_2 = \pi g(R+r) = \pi\cdot r\sqrt{2}\left(\frac{r}{2}\sqrt{3}+\frac{r}{2}\right) =$

$S_2 = \frac{\pi r^2}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$

$V_2 = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr) =$

$$= \frac{\pi\cdot\frac{r}{2}(1+\sqrt{3})}{3}\left[\left(\frac{r}{2}\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 + \frac{r}{2}\sqrt{3}\cdot\frac{r}{2}\right]$$

$V_2 = \frac{\pi r^3}{24}(7+5\sqrt{3})$

3°. *Cono CEB:* radio $\overline{CE} = \frac{r}{2}$;

generatriz $\overline{BC} = r\sqrt{2-\sqrt{3}}$;

altura $= \frac{r}{2}(2-\sqrt{3}) = \overline{BE}$

$V_3 = \frac{\pi r^2}{3}\cdot h = \frac{\pi}{3}\cdot\left(\frac{r}{2}\right)^2\cdot\frac{r}{2}(2-\sqrt{3})$

$= \frac{\pi r^3}{24}(2-\sqrt{3})$

$S_3 = \pi rg = \pi\cdot\frac{r}{2}\cdot r\sqrt{2-\sqrt{3}}$

$S_3 = \frac{\pi r^2}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$

Luego:

a) Superficie del cuerpo engendrado:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{\pi r^2}{2}\sqrt{3} + \frac{\pi r^2}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2}) + \frac{\pi r^2}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$S = \frac{\pi r^2}{2}(\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{3}})$$

b) Volumen del cuerpo engendrado:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = \frac{\pi r^3}{8} + \frac{\pi r^3}{24}(7+5\sqrt{3}) + \frac{\pi r^3}{24}(2-\sqrt{3}) =$$

$$V = \frac{\pi r^3}{24}(3+7+5\sqrt{3}+2-\sqrt{3}) =$$

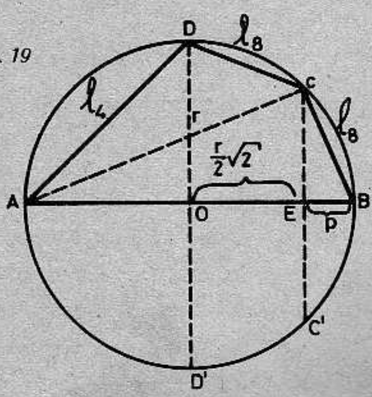
$$= \frac{\pi r^3}{24}(12+4\sqrt{3}) =$$

$$V = \frac{\pi r^3}{6}(3+\sqrt{3})$$

3) En una semi $\odot$ de diámetro $\overline{AB} = 2r$ se aplica una cuerda $\overline{AD} = l_4$ y a continuación $\overline{DC} = l_8$. Se une C con B.

Calcular la superficie total y el volumen del cuerpo que se engendra al girar el cuadrilátero ABCD en torno al diámetro.

Fig. 19



Solución (Fig. 19):

Se tiene

$\overline{AD} = l_4 = r\sqrt{2}$

$\overline{DC} = l_8 = r\sqrt{2-\sqrt{2}}$

$\overline{BC} = l_8 = r\sqrt{2-\sqrt{2}}$ (porque $\overline{BD} = l_4$)

$\overline{OD} = r$

$\overline{CE} = \frac{r}{2}\sqrt{2}$ (porque $\overline{CC'} = l_4$)

$\overline{OE} = \rho_4 = \frac{r}{2}\sqrt{2}$

Se engendra el cono ODA, más el tronco cono DOEC y más el cono CEB.

1°. *Cono ODA:* radio $\overline{OD} = r$, altura $\overline{OA} = r$; generatriz $\overline{AD} = r\sqrt{2}$.

$$S_1 = \pi rg = \pi \cdot r \cdot r\sqrt{2} = \pi r^2\sqrt{2}$$

$$V_1 = \frac{\pi r^2}{3}h = \frac{\pi r^2}{3} \cdot r = \frac{\pi r^3}{3}$$

2°. *Tronco DOEC:* radios basales $\overline{OD} = r$ y $\overline{CE} = \frac{r}{2}\sqrt{2}$; generatriz $\overline{DC} = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}$; altura $\overline{OE} = r - p = \rho_4 = \frac{r}{2}\sqrt{2}$; para calcular p se aplica el 1er Teorema de Euclides al $\triangle$ ABC:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB} \cdot p$$

$$p = \frac{\overline{BC}^2}{AB} = \frac{(l_8)^2}{2r} = \frac{r}{2} \cdot (2 - \sqrt{2})$$

$$\therefore\ OE = r - \frac{r}{2}(2 - \sqrt{2}) = \frac{r}{2}\sqrt{2}$$

O bien:

$$p = \overline{OB} - \overline{OE} = r - \rho_4 = r - \frac{r}{2}\sqrt{2} =$$

$$p = \frac{r}{2} \cdot (2 - \sqrt{2})$$

$$S_2 = \pi g(R + r) = \pi \cdot r\sqrt{2 - \sqrt{2}}\left(r + \frac{r}{2}\sqrt{2}\right) =$$

$$S_2 = \frac{\pi r^2}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}\,(2 + \sqrt{2}) =$$

$$S_2 = \frac{\pi r^2}{2}\sqrt{(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})^2} =$$

$$S_2 = \frac{\pi r^2}{2}\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$$

$$V_2 = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + R \cdot r) =$$

$$= \frac{\pi \cdot \frac{r}{2}\sqrt{2}}{3}\left[r^2 + \left(\frac{r}{2}\sqrt{2}\right)^2 + r \cdot \frac{r}{2}\sqrt{2}\right] =$$

$$V_2 = \frac{\pi r\sqrt{2}}{6}\left(r^2 + \frac{r^2}{2} + \frac{r^2}{2}\sqrt{2}\right) =$$

$$= \frac{\pi r^3\sqrt{2}}{12}(3 + \sqrt{2})$$

$$V_2 = \frac{\pi r^3}{12}(3\sqrt{2} + 2)$$

3°. *Cono CEB:*

$$S_3 = \pi rg = \pi \cdot \frac{r}{2}\sqrt{2} \cdot r\sqrt{2 - \sqrt{2}} =$$

$$= \frac{\pi r^2}{2}\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$$

$$V_3 = \frac{\pi r^2}{3}h = \frac{\pi\left(\frac{r}{2}\sqrt{2}\right)^2}{3} \cdot \frac{r}{2}(2 - \sqrt{2}) =$$

$$= \frac{\pi r^3}{12}(2 - \sqrt{2})$$

Luego:

a) Superficie del cuerpo engendrado:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = \pi r^2\sqrt{2} + $$

$$+ \frac{\pi r^2}{2}\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} + \frac{\pi r^2}{2}\sqrt{4 - 2\sqrt{2}} =$$

$$S = \frac{\pi r^2}{2}\left(2\sqrt{2} + \sqrt{4 + 2\sqrt{2}} + \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}\right)$$

b) Volumen del cuerpo engendrado:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = \frac{\pi r^3}{3} + \frac{\pi r^3}{12}(3\sqrt{2} + 2) +$$

$$+ \frac{\pi r^3}{12}(2 - \sqrt{2}) =$$

$$V = \frac{\pi r^3}{12}(4 + 3\sqrt{2} + 2 + 2 - \sqrt{2}) =$$

$$= \frac{\pi r^3}{12}(8 + 2\sqrt{2}) =$$

$$V = \frac{\pi r^3}{6}(4 + \sqrt{2})$$

4) En una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB} = 2r$ se aplica como cuerda $\overline{AD} = l_4$ y a continuación $\overline{DC} = l_{12}$.

Calcular la superficie del cuerpo que se engendra al girar en torno al diámetro la figura formada por el diámetro $\overline{AB}$, las cuerdas $\overline{AD}$ y $\overline{DC}$ y al arco $\widehat{BC}$.

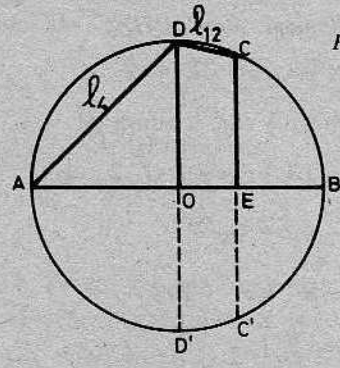


Fig. 20

Solución (Fig. 20):

Se tiene que:

$AB = 2r$

$AD = l_4 = r\sqrt{2}$

$DC = l_{12} = r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

$DO = r$

$AO = r$

$CC' = l_3 = r\sqrt{3}$

$CE = \frac{r}{2}\sqrt{3}$

$OE = \rho_3 = \frac{r}{2}$ luego $EB = \frac{r}{2}$

Se engendra el cono ODA + tronco cono DOEC + casquete esférico CC'B.

1°. Superficie manto del cono:

$$S_1 = \pi rg = \pi r \cdot r\sqrt{2} = \pi r^2\sqrt{2}$$

2°. Superficie manto del tronco cono:

$$S_2 = \pi g (R + r) = \pi \cdot r\sqrt{2 - \sqrt{3}}\,(r + \tfrac{r}{2}\sqrt{3})$$

$$S_2 = \frac{\pi r^2}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}} \cdot (2 + \sqrt{3}) =$$

$$S_2 = \frac{\pi r^2}{2}\sqrt{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^2} =$$

$$S_2 = \frac{\pi r^2}{2}\sqrt{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} =$$

$$= \frac{\pi r^2}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

3°. Superficie casquete:

$$S_3 = 2\pi R \cdot h = 2\pi \overline{OC} \cdot \overline{EB} = 2\pi r \cdot \frac{r}{2} = \pi r^2$$

Luego: Superficie total del cuerpo engendrado es:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 =$$

$$S = \pi r^2\sqrt{2} + \frac{\pi r^2}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}} + \pi r^2 =$$

$$S = \frac{\pi r^2}{2}(2\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}} + 2)$$

5) En una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB} = 2r$ se aplica la cuerda $\overline{AD} = l_6$ y $\overline{BC} = l_8$ **Calcular la superficie del cuerpo que se engendra al girar en torno al diámetro AB la figura formada por el diámetro, las cuerdas $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$, y el arco $\widehat{DC}$.**

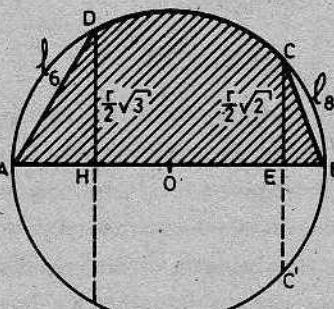


Fig. 21

Solución (Fig. 21):

Tenemos que:

a) $\overline{AD} = l_6 = r \therefore \overline{DH} = \frac{r}{2}\sqrt{3}$; $\overline{HO} = \frac{r}{2}$

b) $\overline{BC} = l_8 = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

$\therefore \overline{CE} = \frac{1}{2}\, l_4 = \frac{r}{2}\sqrt{2} = \overline{OE}$

c) $\overline{HE} = \frac{r}{2} + \frac{r}{2}\sqrt{2} = \frac{r}{2}(1 + \sqrt{2})$

Se engendra un cono HDA + la zona esférica DD'C'C + cono CEB.

1°. Cono HDA de radio $\frac{r}{2}\sqrt{3} = \overline{DH}$, altura $\overline{AH} = \frac{r}{2}$ y generatriz $\overline{AD} = r$.

$$S_1 = \pi rg = \pi \cdot \frac{r}{2}\sqrt{3} \cdot r = \frac{\pi r^2}{2}\sqrt{3}$$

2°. Zona esférica DD'C'C de altura $\overline{HE} = \frac{r}{2}(1 + \sqrt{2})$

$$S_2 = 2\pi R \cdot h = 2\pi r \cdot \frac{r}{2}(1 + \sqrt{2})$$
$$= \pi r^2 (1 + \sqrt{2})$$

3°. Cono CEB: de radio $\overline{CE} = \frac{r}{2}\sqrt{2}$, altura $\overline{EB} = \frac{r}{2}(2 - \sqrt{2})$ y

generatriz $\overline{BC} = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

$$S_3 = \pi rg = \pi \cdot \frac{r}{2}\sqrt{2} \cdot r\sqrt{2 - \sqrt{2}} =$$
$$= \frac{\pi r^2}{2}\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$$

Luego, la superficie del cuerpo engendrado es:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 =$$

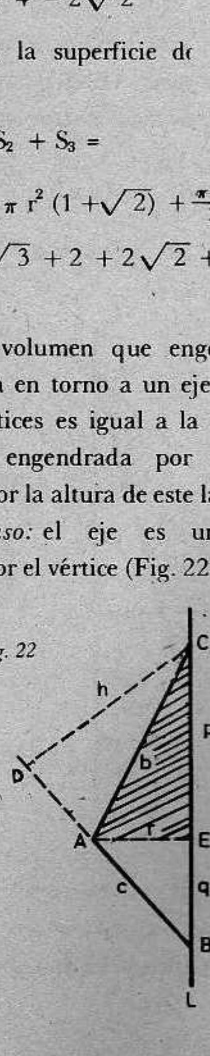
$$= \frac{\pi r^2}{2}\sqrt{3} + \pi r^2 (1 + \sqrt{2}) + \frac{\pi r^2}{2}\sqrt{4 - 2\sqrt{2}} =$$

$$S = \frac{\pi r^2}{2}(\sqrt{3} + 2 + 2\sqrt{2} + \sqrt{4 - 2\sqrt{2}})$$

6) El volumen que engendra un triángulo que gira en torno a un eje que pasa por uno de sus vértices es igual a la tercera parte de la superficie engendrada por el lado opuesto al vértice por la altura de este lado.

1^{er} *caso:* el eje es uno de los lados que pasa por el vértice (Fig. 22).

Fig. 22



H.) L es el eje que pasa por C coincidiendo con el lado $\overline{BC} = a$. Sea, además $\overline{AB} = c$; $\overline{AC} = b$ y la altura $\overline{CD} = h$.

T.) $V = \frac{1}{3} \cdot \text{superf.} (AB) \cdot h$

D.) Se engendran dos conos de la misma base de radio $\overline{AE} = r$ y de altura $\overline{CE} = p$ y $BE = q$, respectivamente.

Es decir:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot p + \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot q$$

$V = \frac{1}{3} \pi r^2 (p + q)$, pero $p + q = a$

luego:

$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot a$; que puede escribirse:

$V = \frac{1}{3} \pi\ r \cdot ra$; como el área de un $\triangle$ es semiproducto de la base por la altura, resulta que:

$\frac{1}{2} ar = \frac{1}{2} c \cdot h$, o sea $ra = c \cdot h$

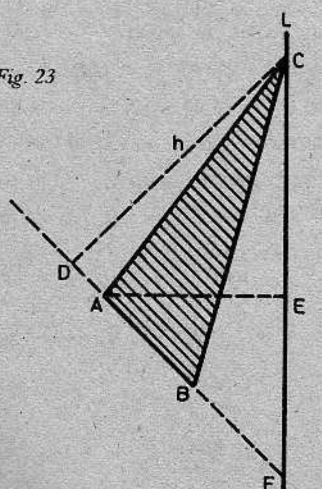
que al ser sustituida en 1) se obtiene:

2) $V = \frac{1}{3} \pi$ rch, pero $\pi \cdot rc$ es la superficie lateral del cono (EAB), o sea, la superficie curva engendrada por el lado $\overline{AB} = c$. Luego:

$V = \frac{1}{3}$ sup. (AB) $\cdot$ h (q.e.d.).

2° caso: Si el eje L no coincide con ningún lado se tiene (Fig. 23):

Fig. 23



El volumen engendrado por el triángulo ABC es igual al volumen engendrado por el $\triangle$ AFC menos el volumen engendrado por el $\triangle$ BFC que tienen la misma altura $h = \overline{CD}$.

De acuerdo con el caso anterior podemos escribir:

Vol. (ABC) = Vol. (AFC) − Vol. (BFC)

Vol. (ABC) $= \frac{1}{3}$ sup (AF) $\cdot$ h $- \frac{1}{3}$ Sup. (BF) $\cdot$ h

Vol. (ABC) $= \frac{h}{3} \cdot$ [sup. (AF) − sup. (BF)]

luego:

Vol. (ABC) $= \frac{1}{3}$ h $\cdot$ sup. (AB)

7) *Teorema:* Si en una semi ⊙ se dibuja una poligonal regular y se unen los extremos de ella con el centro, el volumen engendrado por los sectores de la poligonal al girar en torno al diámetro es igual a un tercio de la superficie engendrada por la poligonal por el apotema de ella.

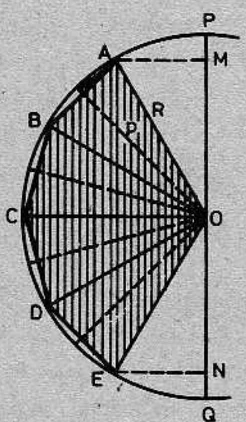


Fig. 24

H.) Sea $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \ldots$ (Fig. 24)

ρ = apotema

T.) $V = \frac{1}{3}$ sup. (ABCDE) $\cdot \rho$

D.) Se forman una serie de triángulos como el $\triangle$ ABO que tienen todos la misma altura ρ. Aplicando el teorema anterior, el volumen total engendrado por la poligonal es igual a la suma de los volúmenes engendrados por estos triángulos. Es decir:

$V = \frac{1}{3}$ sup. (AB) $\cdot \rho + \frac{1}{3}$ sup. (BC) $\cdot \rho +$

$+ \frac{1}{3}$ sup (CD) $\cdot$ e $+ \frac{1}{3}$ sup. (DE) $\cdot \rho =$

$V = \frac{1}{3}$ sup. (poligonal ABCDE) $\cdot \rho = \frac{1}{3} S_p \cdot \rho$

siendo S_p la superficie engendrada por la poligonal.

Corolario 1°. Si las cuerdas que componen la poligonal $\widehat{AE}$ tienden a cero, la poligonal se convierte en el arco $\widehat{AE}$ y la apotema ρ en el radio R. Al girar en torno al diámetro se engendra el sector esférico (OAEO) en el cual el arco $\widehat{AE}$ engendra la zona esférica. Luego, podemos calcular con ayuda de la fórmula anterior el volumen del sector esférico.

En efecto (Fig. 24):

$V = \frac{1}{3}$ sup. $(\widehat{AE}) \cdot \rho$; como sup. (AE) es la sup. de una zona esférica:

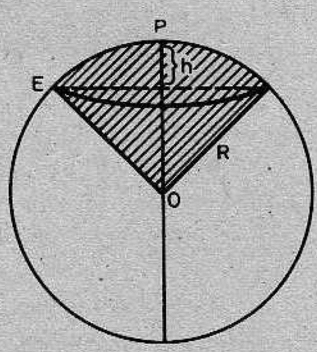
$S = 2\pi R \cdot h$ (ver N° 446-9°) y $\rho = R$, se obtiene, siendo $\overline{MN} = h$:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 2\pi R \cdot h \cdot \rho = \frac{2}{3}\pi R \cdot h \cdot R$$

Es decir: $\boxed{V = \frac{2}{3}\pi R^2 \cdot h}$

Corolario 2°. Si el extremo A del arco $\widehat{AE}$ coincide con el extremo P del diámetro es válida la misma fórmula; pues en este caso el sector esférico está limitado por una superficie cónica cuya cúspide está en el centro de la esfera y por el casquete esférico correspondiente. (Recuérdese que el casquete esférico es un caso particular de la zona esférica). (Fig. 25).

Fig. 25



$\boxed{V = \frac{2}{3}\pi R^2 \cdot h}$

Corolario 3°. Con ayuda de esta fórmula también podemos calcular el volumen de la semiesfera que sería el volumen de un sector esférico de altura h = R, es decir:

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 \cdot R = \frac{2}{3}\pi R^3$$

por lo tanto, el volumen de la esfera es el doble de esto, o sea:

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3}$$

que ya conocíamos.

8) En una semicircunferencia (AB) de radio R se aplica una cuerda $\overline{CD} = l_4 = r\sqrt{2}$ pero de modo que el ángulo AOD = 60°; se determina el segmento circular CMD. Calcular el volumen que engendra este segmento al girar en torno al diámetro AB.

Se engendra lo que se llama un *anillo esférico*.

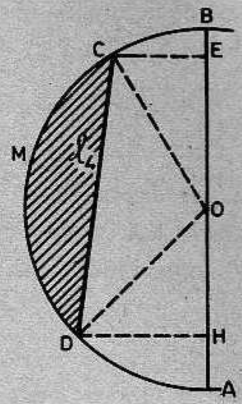


Fig. 26

Luego podemos escribir (Fig. 26):

V (anillo CMD) = V_1 (sector esférico OCMD) + + V_2 (cono OEC) + V_3 (cono OHD) − − V_4 (tronco cono DHEC).

Calculemos estos volúmenes; recordemos que según problema N° 454-2, encontramos que:

$\overline{CE} = \frac{R}{2}$; $\overline{DH} = \frac{R}{2}\sqrt{3}$; $\overline{OH} = \frac{R}{2}$; $\overline{OE} = \frac{R}{2}\sqrt{3}$

y

$\overline{HE} = \frac{R}{2}(1 + \sqrt{3}) = h.$

Entonces:

$$V_1 = \frac{2}{3}\pi R^2 \cdot h = \frac{2}{3}\pi R^2 \cdot \frac{R}{2}(1 + \sqrt{3}) =$$

$$= \frac{\pi R^3}{3}(1 + \sqrt{3})$$

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot \overline{CE}^2 \cdot \overline{OE} = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{R}{2}\right)^2 \cdot \frac{R}{2}\sqrt{3} =$$

$$= \frac{\pi R^3}{24}\sqrt{3}$$

$$V_3 = \frac{1}{3}\pi \overline{DH}^2 \cdot \overline{OH} = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{R}{2}\sqrt{3}\right)^2 \cdot \frac{R}{2} = \frac{\pi R^3}{8}$$

$$V_4 = \frac{\pi \cdot \overline{HE}}{3}(\overline{DH}^2 + \overline{CE}^2 + \overline{DH} \cdot \overline{CE}) =$$

$$V_4 = \frac{\pi R(1 + \sqrt{3})}{6}\left[\left(\frac{R}{2}\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{R}{2} \cdot \frac{R}{2}\sqrt{3}\right] =$$

$$V_4 = \frac{\pi R(1 + \sqrt{3})}{6}\left(\frac{3R^2}{4} + \frac{R^2}{4} + \frac{R^2}{4}\sqrt{3}\right) =$$

$$V_4 = \frac{\pi R^3}{24}(1 + \sqrt{3})(4 + \sqrt{3}) = \frac{\pi R^3}{24}(7 + 5\sqrt{3})$$

Luego, el vol. V del anillo esférico (CDM) será:

$V = V_1 + V_2 + V_3 - V_4$; hechas las sustituciones resulta:

$$V = \frac{\pi R^3}{6} \cdot (1 + \sqrt{3})$$

El problema se simplifica en su cálculo si se aplica directamente la fórmula que expresa el volumen del anillo esférico (Fig. 27):

$$\boxed{V = \frac{\pi}{6} c^2 \cdot h}$$

siendo *c* la cuerda que determina el segmento y *h* la proyección de esta cuerda sobre el eje (correspondiente a la altura *h* del segmento esférico correspondiente).

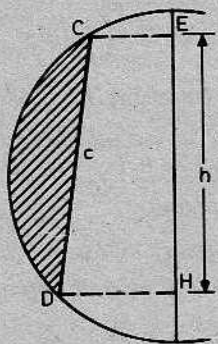


Fig. 27

Aplicando directamente esta fórmula al problema anterior resulta:

$$c = R\sqrt{2};\ h = \frac{R}{2}(1 + \sqrt{3});\ \text{luego:}$$

$$V = \frac{\pi}{6}(R\sqrt{2})^2 \cdot \frac{R}{2}(1 + \sqrt{3})$$

$$V = \frac{\pi R^3}{6}(1 + \sqrt{3})$$

455. VOLUMEN DEL SEGMENTO ESFERICO

1) *Segmento de dos bases o rebanada:*
Se compone del anillo esférico (CDM) engendrado por el segmento circular (CMD) más el tronco de cono DHEC engendrado por el trapecio DHEC.

Sea $\overline{DH} = a$; $\overline{CE} = b$; $\overline{CD} = c$; $\overline{HE} = h$

V_1 (anillo esférico) $= \frac{\pi}{6} c^2 \cdot h$, pero en el $\triangle DFC$ se tiene $c^2 = h^2 + (a - b)^2$

luego:

$$V_1 = \frac{\pi h}{6}[h^2 + (a - b)^2]$$

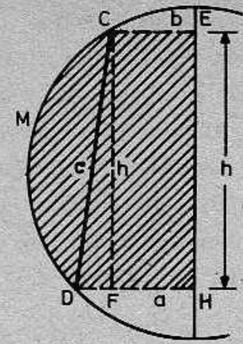


Fig. 28

V_2 (tronco cono) $= \frac{\pi h}{3}(a^2 + b^2 + ab)$

Luego, el volumen del segmento esférico es:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{\pi h}{6}[h^2 + a^2 - 2ab + b^2] + $$
$$+ \frac{\pi h}{3}(a^2 + b^2 + ab)$$

$$V = \frac{\pi h}{6}(h^2 + a^2 - 2ab + b^2 + 2a^2 +$$
$$+ 2b^2 + 2ab)$$

a) $$\boxed{V = \frac{\pi h}{6} \cdot (h^2 + 3a^2 + 3b^2)}$$

2) *Segmento de una base:* Corresponde al volumen limitado por un casquete esférico y el plano que lo determina.

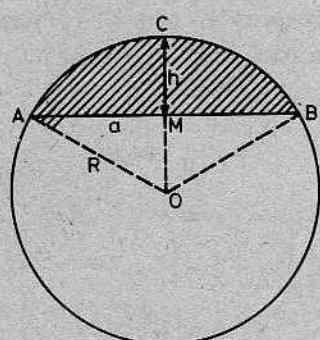


Fig. 29

En este caso b = cero. Luego la fórmula anterior se reduce en este caso a:

b) $$\boxed{V = \frac{\pi h}{6}(h^2 + 3a^2)}$$

Se puede también expresar este volumen en función del radio R de la esfera y la altura *h*.

En efecto, en el $\triangle$ AMO se tiene:

$$a^2 = R^2 - (R - h)^2$$

$a^2 = 2Rh - h^2$, al sustituir este valor en 2) resulta:

$$V = \frac{\pi h}{6} \cdot [h^2 + 3(2Rh - h^2)]$$

lo que da finalmente:

c) $\boxed{V = \frac{\pi h^2}{3} \cdot (3R - h)}$

Por lo demás, esta fórmula se puede obtener directamente sin la ayuda de la fórmula a). Se tiene:

Vol. segmento (ABC) = V_1 (sector AOBC) − V_2 (cono ABO)

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 \cdot h - \frac{1}{3}\pi a^2 (R - h),$$

pero $a^2 = R^2 - (R - h)^2$ o sea:

$$a^2 = h \cdot (2R - h)$$

Con lo cual:

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h - \frac{1}{3}\pi h (2R - h)(R - h)$$

$$V = \frac{\pi h}{3}(2R^2 - 2R^2 + Rh + 2Rh - h^2)$$

$$V = \frac{\pi h}{3}(3Rh - h^2)$$

luego:

c) $\boxed{V = \frac{\pi h^2}{3} \cdot (3R - h)}$

Corolario: Si el segmento de una base se agranda hasta la semiesfera se tendrá a = h = R; luego, el volumen de la semiesfera será de acuerdo a las fórmulas anteriores b) ó c):

$$b)\ V = \frac{\pi \cdot R}{6}(R^2 + 3R^2) = \frac{4\pi R^3}{6}$$

por lo tanto, el volumen de la esfera será el doble de esta cantidad, obteniéndose el valor ya conocido por otros caminos:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Si en la c) se considera h = 2R resulta:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

456. VOLUMEN DE LA CUÑA O INGLETE ESFERICO Y SUPERFICIE DEL HUSO ESFERICO:

Sea el ∡ diedro que forman los dos semicírculos máximos que determinan la cuña o inglete esférico; la porción de la superficie de la esfera que limita es el *huso esférico*.

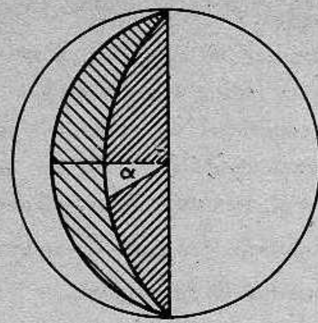


Fig. 30

Toda la esfera tiene una superficie $S = 4\pi R^2$; luego un huso de 1 grado de amplitud tendrá una superficie $\frac{4\pi R^2}{360°}$ y para un ∡ α la superficie del huso será:

$$S = \frac{4\pi R^2}{360°} \cdot \alpha;\ \text{o bien:}$$

$$\boxed{S = \frac{\pi R^2 \cdot \alpha}{90°}}$$

Análogamente el *volumen de la cuña* correspondiente es:

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \frac{\alpha}{360} = \frac{\pi R^3 \cdot \alpha}{270}}$$

457. TEOREMAS DE GULDIN

Son muy útiles para determinar la superficie y el volumen de los cuerpos engendrados por una figura plana que gira en torno a un eje situado en el mismo plano que ella:

1°. La superficie de un cuerpo de rotación es igual al producto del perímetro de la figura que la engendra por el camino recorrido por su centro de gravedad.

2°. El volumen de un cuerpo de rotación es igual al producto de la superficie de la figura que lo engendra por el camino recorrido por su centro de gravedad.

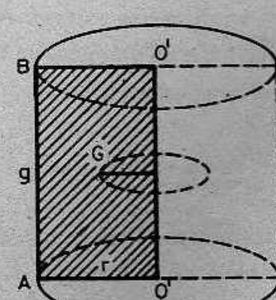


Fig. 31

Por ejemplo:

1) Determinar la superficie y el volumen de un cilindro de radio *r* y generatriz g.

1°. La superficie se engendra por rotación del rectángulo AOO'B de perímetro $2s = 2 \cdot (r+g)$; su centro de gravedad está a la distancia $\frac{r}{2}$ del eje y al girar el camino que recorre G es el de una ⊙ de longitud:

$$C = 2\pi \cdot \frac{r}{2} = \pi r$$

luego: la superficie total engendrada es:

$$S_t = 2s \cdot C = 2(r+g) \cdot \pi r = 2\pi r^2 + 2\pi rg$$

que es igual a la N° 425-c.

2°. El volumen engendrado es igual a la superficie del rectángulo que lo genera, o sea $S = r \cdot g = r \cdot h$ por el camino que recorre su centro de gravedad que es $C = \pi r$.

Luego:

$V = S \cdot C = rh \cdot \pi r = \pi r^2 \cdot h$ que es la misma fórmula ya conocida (N° 425-d).

458. EJERCICIOS

1) Calcular la superficie y el volumen de un *toro* (Fig. 32).

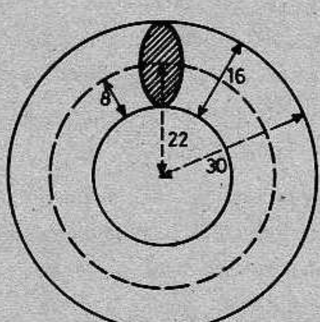


Fig. 32

Una cámara de neumático (»toro«) se engendra por rotación de un disco en torno a un eje.

Calcular la superficie y el volumen de una cámara si su diámetro exterior mide 60 cm. y su sección tiene un diámetro de 16 cm.

1°. *Superficie:* perímetro 2s de la ⊙ que rota es:

$$2s = 2\pi 8 = 16\pi$$

Camino recorrido por el centro de gravedad de este círculo es la longitud de una ⊙ de radio $30 - 8 = 22$ cm; $C = 2\pi \cdot 22 = 44\pi$

Luego:

$$S_t = 16\pi \cdot 44\pi = 704\pi^2 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

2°. *Volumen:* Superficie de la ⊙ que rota es $S = 64\pi$ y distancia recorrida por su centro de gravedad es $C = 44\pi$.

Luego:

$V = 64\pi \cdot 44\pi = 27657{,}76$ cm^3 (=) 27,7 litros.

2) Calcular la cantidad de material que se saca de un cilindro de 40 cm de diámetro si al colocarlo en un torno se le hace un corte cuya sección es un △ isósceles de 10 cm de base y 12 cm de altura siendo 7,2 la densidad del material (Fig. 33).

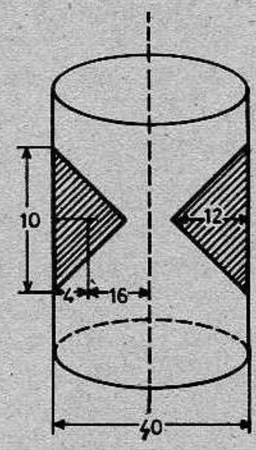


Fig. 33

Como el centro de gravedad de un △ divide a la transversal de gravedad en la razón de 1:2 quiere decir que G está a 4 cm de la base del isósceles y a 8 cm del vértice de este △ y por lo tanto a $20 - 4 = 16$ cm del eje de rotación.

Además, como el área de triángulo es

$S = \frac{1}{2} b \cdot h$, resulta:

$S = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 = 60$ cm^2 y el recorrido *C* de su centro de gravedad es $C = 2\pi \cdot 16 = 32\pi$. Luego el volumen de material sacado es:

$$V = S \cdot C = 60 \cdot 32\pi = 1920\pi \text{ cm}^3 = 6028{,}8 \text{ cm}^3$$

Como:

$m = V \cdot d$, resulta finalmente:

$m = 6028{,}8 \cdot 7{,}2 = 43407{,}36$ gramos (=) 43,4 Kg

3) Un $\triangle$ equilátero de lado 2a gira en torno a uno de sus lados. Calcular la superficie y el volumen que engendra.

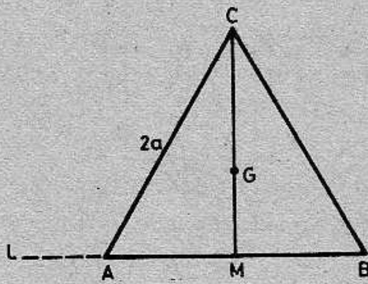


Fig. 34

Solución (Fig. 34):

Sea el lado = 2a, luego la altura $\overline{CM} = a\sqrt{3}$; si gira en torno al lado $\overline{AB}$ la distancia del centro de gravedad G a este lado es

$\frac{1}{3}$ de $\overline{CM}$, o sea $\overline{GM} = \frac{a}{3}\sqrt{3}$

Luego:

1° Superficie engendrada = S

a) perímetro 2s del $\triangle$ = 6a.

b) C = camino recorrido por el centro de gravedad es

$C = 2\pi \cdot \frac{a}{3}\sqrt{3}$

Luego:

$S = 2s \cdot C = 6a \cdot \frac{2\pi a}{3}\sqrt{3} = 4\pi a^2\sqrt{3}\,cm^2$

2°. Vol. engendrado = V.

a) Superficie de $\triangle$ ABC es

$S = \frac{1}{2}\, b \cdot h = a^2\sqrt{3}$

b) Camino recorrido por G es $C = \frac{2\pi a}{3}\sqrt{3}$

Luego:

$V = S \cdot C = a^2\sqrt{3} \cdot \frac{2\pi a}{3}\sqrt{3} = 2\pi a^3$

(ver N° 453).

4) Un triángulo equilátero de lado 2a gira en torno a un eje paralelo a uno de sus lados y situado a la distancia *d* de éste. Calcular la superficie y el volumen engendrados. (Hay dos casos).

1er caso: Se tiene: lado = 2a; (Fig. 35)

$\overline{CM} = a\sqrt{3}$; $\overline{GM} = \frac{a}{3}\sqrt{3}$ y

$\overline{GH} = \frac{a}{3}\sqrt{3} + d$

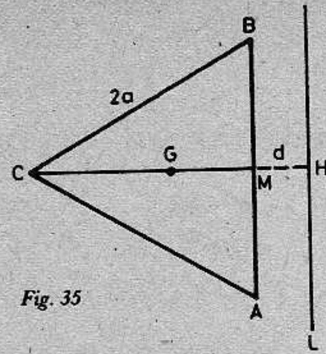


Fig. 35

1°. Superficie engendrada = S

a) perímetro del $\triangle$ es 2s = 6a

b) camino recorrido por el centro de G es

$C = 2\pi\,(\frac{a}{3}\sqrt{3} + d)$

Luego:

$S = 2s \cdot C = 12\pi\, a(\frac{a}{3}\sqrt{3} + d)$

2°. Vol. engendrado = V

a) Superficie del $\triangle$ es $S = \frac{1}{2}\, b \cdot h = a^2\sqrt{3}$

b) Camino recorrido por G es

$C = 2\pi\,(\frac{a}{3}\sqrt{3} + d)$

Luego:

$V = S \cdot C = a^2\sqrt{3} \cdot 2\pi\,(\frac{a}{3}\sqrt{3} + d)$

$V = 2\pi\,(a^3 + a^2 d\sqrt{3}) = 2\pi a^2(a + d\sqrt{3})$

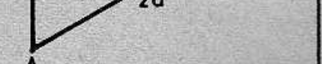


Fig. 36

2° *caso:* lado = 2a; $\overline{CM} = a\sqrt{3}$;

$\overline{MH} = d$; $\overline{GC} = \frac{2}{3}a\sqrt{3}$; $\overline{GH} = d - \frac{a}{3}\sqrt{3}$

1°. Superficie engendrada = S

a) perímetro del $\triangle$ es 2s = 6a

b) camino recorrido por G es

$C = 2\pi\,(d - \frac{a}{3}\sqrt{3})$

Luego:

$S = 2s \cdot C = 12\pi\, a \cdot (d - \frac{a}{3}\sqrt{3})$

2°. Vol. engendrado = V

a) área $\triangle$ es $S = a^2\sqrt{3}$

b) camino de G en $C = 2\pi\,(d - \frac{a}{3}\sqrt{3})$

Luego:

$$V = S \cdot C = a^2\sqrt{3} \cdot 2\pi\,(d - \frac{a}{3}\sqrt{3})$$

$$V = 2\pi a^2 d\sqrt{3} - 2\pi a^3 = 2\pi a^2(d\sqrt{3} - a)$$

5) Calcular el volumen y la superficie que engendra un exágono regular de lado $\underline{a}$ cuando gira en torno a un lado.
El eje sea $\overline{AB}$ (Fig. 37)

Se tiene $\overline{AB} = a$; $\overline{GH} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$

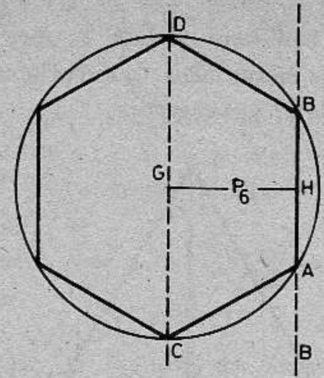
1° Superficie engendrada = S

a) perímetro exágono $2s = 6a$

b) camino recorrido por G.

$$C = 2\pi \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = a\pi\sqrt{3}$$

Fig. 37



Luego:

$$S = 2s \cdot C = 6a \cdot \pi a\sqrt{3} = 6\pi a^2\sqrt{3}$$

2°. Vol. engendrado = V

a) área del exágono $= A = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$

(ver N° 355-c).

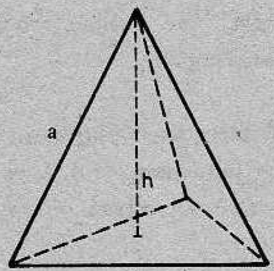
b) camino de G es $C = a\pi\sqrt{3}$

Luego:

$$V = A \cdot C = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3} \cdot a\pi\sqrt{3} = \frac{9}{2}\pi a^3$$

459. Son sólo cinco. El tetraedro, el hexaedro (el cubo), el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro (20 caras).

A) *Tetraedro:* Es el poliedro de menor número de caras. Si es regular, todas sus caras son triángulos equiláteros congruentes (Fig. A).



A

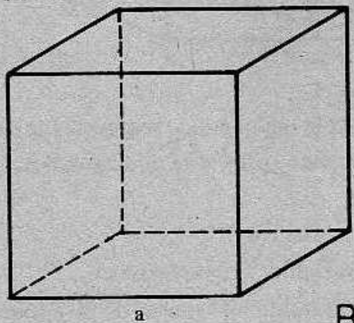
Para calcular la superficie del tetraedro regular basta calcular la superficie de una cara y multiplicarla por 4,

$S = a^2 \cdot \sqrt{3}$

Para calcular su volumen se aplica la fórmula de la pirámide: $\frac{1}{3}\ b \cdot h$

Si su arista es a, resulta: $V = \frac{1}{12}\ a^3 \cdot \sqrt{2}$

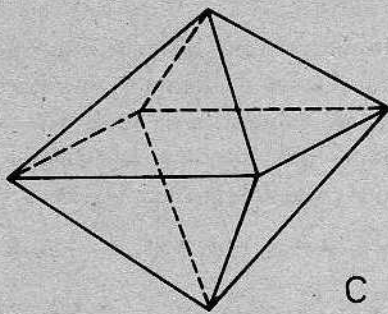
B) *Hexaedro regular:* Es más conocido por cubo (Fig. B).



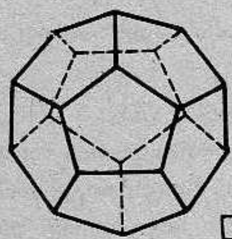
B

Sus caras son cuadradas; siendo su arista a su superficie es: $S = 6a^2$. Su volumen: $V = a^3$.

C) *Octaedro regular:* Está compuesto de 8 caras que son triángulos equiláteros (Fig. 266c). Se puede considerar como formado por dos pirámides de base cuadrada y unidas por ellas. Su superficie es igual a 8 veces la superficie de una cara. Para calcular su volumen se calcula previamente el volumen de una de las pirámides cuadrangulares que lo forman y el resultado se duplica.

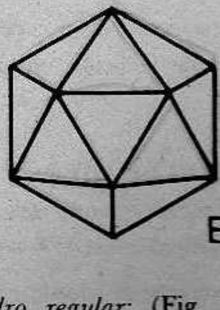


C



D

D) *Dodecaedro regular:* (Fig. D) está formado por 12 pentágonos regulares. Su superficie es igual a 12 veces la superficie de una cara. Para calcular su volumen se le considera formado por 12 pirámides pentagonales iguales. La base de cada una de ellas es la cara pentagonal y su altura es la distancia desde el centro del poliedro a la cara. (La altura viene a ser el radio de la esfera inscrita al dodecaedro regular.)



E

E) *Icosaedro regular:* (Fig. E). Está formado por 20 caras que son triángulos equiláteros congruentes. Su superficie es igual a 20 veces la superficie de uno de éstos triángulos.

Como en el caso anterior, se le descompone en 20 pirámides triangulares iguales que tienen por base un triángulo equilátero y por altura la distancia desde el centro del icosaedro a esta cara, el volumen es igual a la suma de ellas.

460. LA ESFERA

Se puede considerar como el límite a que tiende un poliedro regular de infinitas caras pequeñísimas. Así su volumen sería igual a la suma de las infinitas pirámides que se formarían de altura igual al radio R de la esfera. Es decir:

$$V = \frac{1}{3} b_1 \cdot R + \frac{1}{3} b_2 \cdot R + \ldots + \frac{1}{3} b_n \cdot R$$

$$V = \frac{1}{3} R\, (b_1 + b_2 + \ldots + b_n), \text{ pero}$$

$b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ = superficie total de la esfera $= 4\pi R^2$.

Luego: $\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3}$

que es la fórmula ya obtenida por otros métodos.

461. OBSERVACIONES

1) Polígonos regulares pueden construirse todos los que se deseen. En cambio, poliedros regulares existen sólo cinco, mencionados anteriormente, y eran ya conocidos por la Escuela de Pitágoras (Siglo VI a. de J.C.) que probablemente »importaron« dos o tres de ellos desde Egipto.

2) *Teorema de Euler-Descartes:* en todos los poliedros convexos (regulares o no) existe **entre el número *c* de caras, el número *v* de vértices y el número *a* de aristas la relación siguiente:**

$$\boxed{C + v = a + 2}$$

Este teorema fue dado a conocer por Euler en 1752, pero era conocido un siglo antes por Descartes.

462. TEST DE VERDADERO-FALSO

Dentro del paréntesis coloque una »V« si lo que se afirma es verdadero o una »F« si es falso.

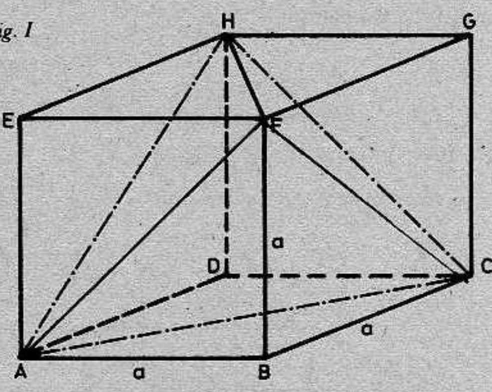
1) (. . .) Un heptaedro puede tener 10 vértices.
2) (. . .) Un heptaedro puede tener 7 vértices.
3) (. . .) Un heptaedro puede tener 15 aristas.
4) (. . .) Un heptaedro puede tener 12 aristas.
5) (. . .) Un octaedro puede tener 8 vértices.
6) (. . .) Un octaedro puede tener 12 vértices.
7) (. . .) Un octaedro puede tener 18 aristas.
8) (. . .) Un octaedro puede tener 14 aristas.
9) (. . .) Un octaedro regular tiene 6 vértices.
10) (. . .) Un octaedro regular tiene 12 aristas.
11) (. . .) El poliedro de menor número de caras es el tetraedro.
12) (. . .) Siempre es posible construir un poliedro regular.

463. TEST (de Selección Múltiple)

Los problemas siguientes, 1 al 7, se refieren a »variaciones sobre un mismo tema« en la figura I.

En un cubo de arista »a« se traza en cada cara una diagonal en la forma indicada en la figura adjunta.

Fig. I



1) Al cortar este cubo según los planos determinados por estas diagonales, se obtienen:
   A) 5 tetraedros
   B) 5 pirámides congruentes
   C) 1 pirámide y 4 troncos de pirámides
   D) 5 prismas
   E) 4 pirámides y un exaedro central.

2) El volumen del tetraedro ACHF es:
   A) $\frac{1}{6} \cdot a^3$; B) $\frac{2}{3} \cdot a^3$;
   C) $\frac{5}{6} \cdot a^3$; D) $\frac{1}{3} \cdot a^3$;
   E) otro valor.

3) La superficie total del tetraedro ACHF es:

A) $a^2 \cdot \sqrt{6}$; B) $\frac{1}{2} a^2 \cdot \sqrt{3}$;

C) $4a^2 \cdot \sqrt{6}$; D) $2a^2 \cdot \sqrt{6}$;

E) $2a^2 \cdot \sqrt{3}$.

4) El cuerpo resultante ABCF se afirma que es:

I) Un tetraedro regular

II) Una pirámide

III) Un prisma triangular.

De estas afirmaciones son verdaderas:

A) sólo I; B) sólo II;

C) sólo III; D) sólo I y II;

E) las tres.

5) El volumen del tetraedro ABCF es:

A) $\frac{1}{2} \cdot a^3$; B) $\frac{1}{3} \cdot a^3$;

C) $\frac{1}{6} \cdot a^3$; D) $\frac{1}{3} a^3 \cdot \sqrt{3}$;

E) otro valor

6) La superficie total del tetraedro ABCF es:

A) $a^2 \cdot (3 + \sqrt{12})$ B) $\frac{a^2}{2}(3 + \sqrt{3})$

C) $2 \cdot a^2$; D) $\frac{3}{2} \cdot a^2$;

E) otro valor.

7) La altura del tetraedro ACHF mide:

A) $\frac{2}{3} a \sqrt{6}$; B) $\frac{2}{3} a \sqrt{3}$;

C) $\frac{a}{2} \sqrt{6}$; D) $\frac{a}{3} \sqrt{3}$;

E) $\frac{a}{2} \sqrt{3}$

Las preguntas 8 a 12 se refieren a la figura II, en la cual, un cubo de arista »a«, se unen los puntos medios de las aristas de cada cara.

8) El cuerpo central resultante es un:

A) exaedro; B) octaedro;

C) dodecaedro; D) tetradecaedro;

E) icosaedro.

9) El volumen del cuerpo central resultante mide:

A) $a^3 \cdot (1 - \frac{1}{3} \sqrt{3})$

B) $\frac{7}{8} \cdot a^3$; C) $\frac{2}{3} \cdot a^3$;

D) $\frac{5}{6} \cdot a^3$; E) otro valor.

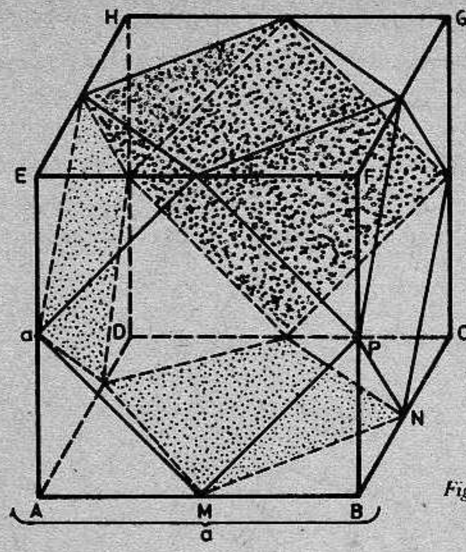


Fig. II

10) La superficie total del cuerpo central resultante mide:

A) $6a^2 + 8a^2 \sqrt{3}$;

B) $3a^2 + a^2 \cdot \sqrt{12}$;

C) $a^2 \cdot (3 + \sqrt{3})$

D) $3a^2 \cdot (1 + 2\sqrt{3})$;

E) otro valor.

11) El volumen del tetraedro MBNP es:

A) $\frac{1}{48} \cdot a^3$; B) $\frac{1}{24} \cdot a^3$;

C) $\frac{1}{16} \cdot a^3$; D) $\frac{1}{12} \cdot a^3$;

E) $\frac{1}{8} \cdot a^3$.

12) El área de la superficie de todas las caras del tetraedro MBNP es:

A) $0{,}125 \cdot a^2 (3 + \sqrt{3})$;

B) $\frac{a^2}{8} (3 + \sqrt{6})$;

C) $\frac{3a^2}{8} (1 + \sqrt{3})$;

D) $0{,}125\, a^2 (1 + \sqrt{6})$;

E) otro valor.

Respuestas:

1) A;	2) D;	3) E;
4) B;	5) C;	6) B;
7) B;	8) D;	9) D;
10) C;	11) A;	12) B;

464. Cuando un cono de revolución se corta por planos paralelos a su base se obtienen *círculos*. Pero cuando estos planos secantes no son paralelos a la base del cono se obtienen en la intersección curvas diferentes. Por ejemplo:

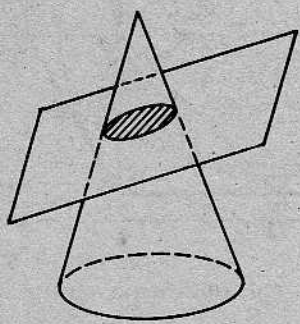


Fig. 1

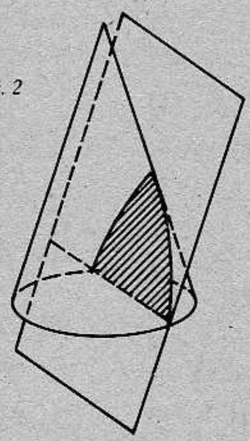


Fig. 2

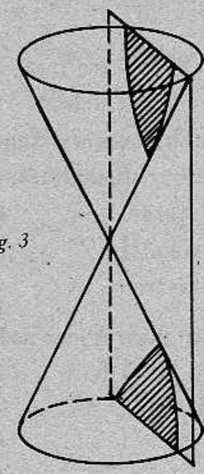


Fig. 3

1°. Cuando el plano secante corta a todas generatrices (sin ser // a la base) del cono a la sección que se obtiene se llama *elipse* (Fig. 1).

2°. Cuando el plano secante es paralelo a una generatriz se obtiene la *parábola* (Fig. 2).

3°. Cuando el plano secante es paralelo al eje, la intersección determina una curva llamada *hipérbola* que tiene dos ramas (Fig. 3).

Veremos someramente algo sobre estas curvas que se llaman cónicas porque se obtienen de las secciones de un cono. En los Nº 497 y siguientes volveremos sobre estas curvas, pero desde otro punto de vista.

465. LA ELIPSE

Es L.G. de todos los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos o focos es constante.

$F_1 P_1 + F_2 P_1 = F_1 P_2 + P_2 F_2 =$ constante $= 2a$.

Sus elementos son (Fig. 4):

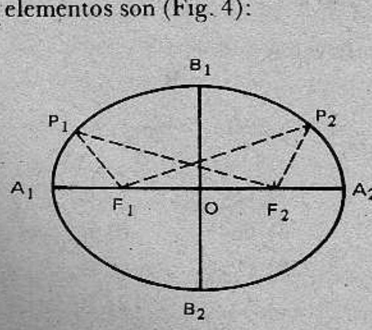


Fig. 4

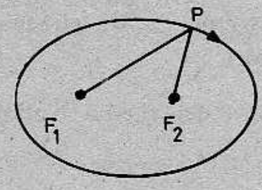
O	= centro de la elipse
F_1 y F_2	= focos
F_1F_2	= eje de simetría de la elipse y es la distancia focal = 2c
A_1A_2	= eje mayor = 2a
A_1 O	= semieje mayor = a
B_1 B_2	= eje menor = 2b
B_1 O	= semieje menor = b

466. CONSTRUCCION DE LA ELIPSE
(1ᵉʳᵃ construcción)

Método del jardinero:

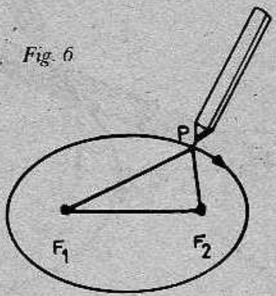
Para trazar elipses en los prados, los jardineros entierran dos palos en los focos F_1 y F_2 en los cuales amarran los extremos en un cordel; en seguida deslizan otro palo P, manteniendo tirante el cordel (Fig. 5).

Fig. 5



En el cuaderno es fácil dibujar una elipse haciendo una lazada con un hilo; se entierran dos alfileres en los focos F_1 F_2 pasando en torno a ellos la lazada. Basta mantener tirante la lazada con un lápiz y hacerlo deslizar siempre manteniendo tirante el hilo (Fig. 6).

Fig. 6



Métodos por puntos:
Se dan los focos y el eje mayor $A_1A_2 = 2a$.

Se procede de la manera siguiente:

1) se dimidia F_1 F_2 (Fig. 7).

2) con arcos (O, a) se determina A_1 y A_2

3) Con arcos ⊙ (F_1, a) y ⊙ (F_2, a) se determina B_1 y B_2 por lo tanto el eje menor B_1 B_2.

4) Se marca un punto cualquiera C sobre A_1A_2.

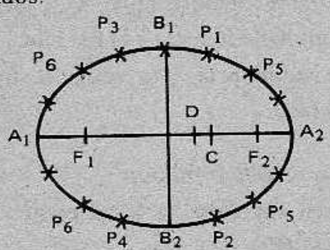
5) **Con arcos de ⊙ (F_1, $\overline{A_1 C}$) y ⊙ (F_2, $\overline{A_2 C}$) se determinan los puntos P_1 y P_2; análogamente con ⊙ (F_1, $\overline{A_2 C}$) y ⊙ (F_2, $\overline{A_1 C}$) se determina P_3 y P_4.**

6) Se marca otro punto D sobre A_1 A_2.

7) Con ⊙ (F_1, $\overline{A_1 D}$) y ⊙ (F_2, $\overline{A_2D}$) se determina P_5 y P'_5.

8) Con ⊙ (F_1, $\overline{A_2D}$) y ⊙ (F_2, $\overline{A_1D}$) se determina P_6 y P'_6 y así sucesivamente. Por último se unen los puntos encontrados.

Fig. 7



Area de la elipse: es igual a la constante π por el producto de los semiejes.

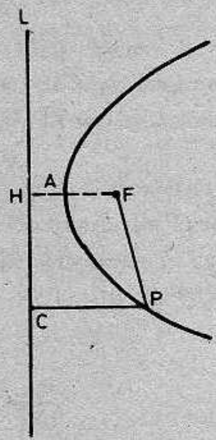
Es decir: $\boxed{A = \pi \cdot ab}$

Esta fórmula ya era conocida por Arquímedes.

467. LA PARABOLA

Es el L.G. de todos los puntos que equidistan de una recta fija (la directriz) y de un punto fijo (el foco) (Fig. 8).

Fig. 8



Es una curva plana y no cerrada de una sola rama que se extiende hasta el infinito.

Radio vector es la recta que une el foco F con un punto cualquiera P de la curva.

Para que la curva sea una parábola, todos sus puntos deben cumplir la condición de que PF = PC.

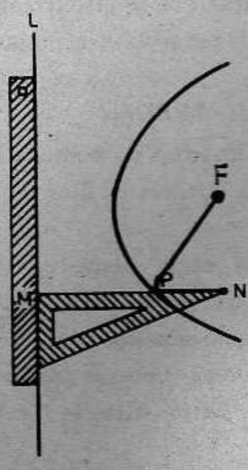
La distancia $\overline{FH}$ se llama *parámetro* = p. Es obvio indicar que el punto A es el punto medio de $\overline{FH}$.

Construcción mecánica de la parábola:

1) Se corta un hilo del largo MN del cateto de una escuadra; un extremo del hilo se fija en N y el otro en el foco por medio de dos alfileres o »chinches« (Fig. 9).

2) Una regla se mantiene fija coincidiendo con la directriz L.

Fig. 9



3) Con un lápiz aguzado se mantiene tirante el hilo estando la punta apoyada contra el cateto $\overline{MN}$; en esta forma se desliza el otro cateto de la escuadra sobre la regla y el lápiz dibujará la curva.

Siempre se tendrá para cualquier posición de la punta del lápiz al mantener tirante el hilo contra la escuadra que $\overline{PF} = \overline{PM}$ (Fig. 9).

Construcción por puntos:
Se conoce el foco F y la directriz L.

1) Se traza el parámetro $\overline{FH}$ y se dimidia; se determina A (Fig. 10).

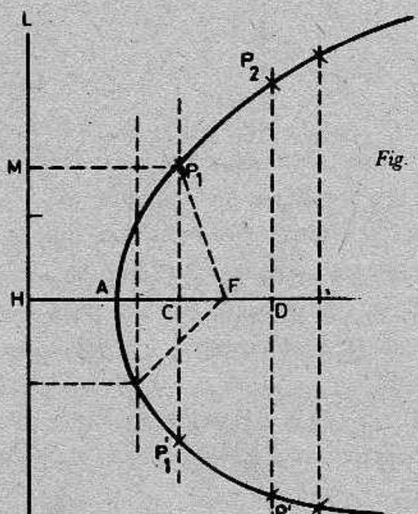


Fig. 10

2) Por un punto C cualquiera del eje de simetría se traza una paralela a la directriz que se corta desde F con ⊙ (F, $\overline{HC}$) determina P_1 y P'_1.

3) Se traza otra paralela por D y se la corta desde F con radio $\overline{HD}$ y así sucesivamente.

Finalmente, se unen los puntos. Es conveniente indicar que la bisectriz del ∢ MPF es la tangente a la parábola en el punto P.

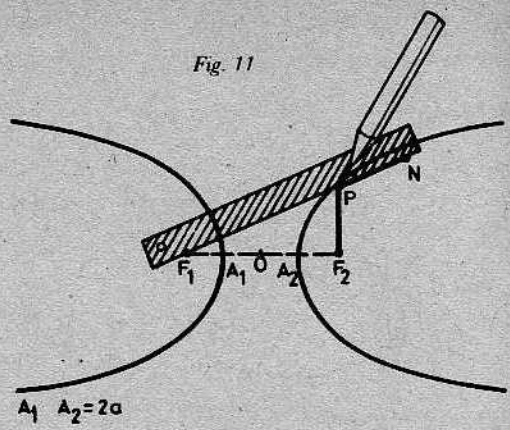
468. LA HIPERBOLA

Es el L.G. de todos los puntos cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos (los focos) es constante.

Es una curva plana no cerrada formada por dos ramas que se extienden hasta el infinito pero en sentido opuesto.

Los puntos fijos son los focos y la distancia $\overline{F_1 F_2}$ entre ellos es la *distancia focal.* (Fig. 11).

Fig. 11



Radios vectores son las rectas que unen un punto P de la curva con los focos.

La diferencia constante es $\overline{A_1 A_2} = 2a$.

Si $\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = 2a$ el punto P pertenece a la hipérbola.

a) *Construcción mecánica:*
No es tan fácil como las anteriores. Se hace con la ayuda de una regla, de un hilo y de 3 alfileres o »chinches«.

1) El hilo debe ser igual a la longitud de la regla menos 2a; un extremo N del hilo se fija en un extremo de la regla y el otro en uno de los focos (Fig. 11).

2) El otro extremo de la regla se fija en el otro foco.

3) Un lápiz apoyado contra la regla debe mantener continuamente tirante el hilo.

4) Al hacer girar la regla en torno al extremo fijo, el lápiz dibujará la hipérbola, porque la diferencia entre la distancia de un punto de ella a los focos es siempre igual a la diferencia entre la longitud de la regla y la del hilo.

Para dibujar la otra rama se fija la regla en el otro foco.

b) *Construcción por puntos:*
Se conocen los focos y la diferencia constante $2a = \overline{A_1 A_2}$ (Fig. 12).

1) Sobre el eje de simetría se marca un punto C fuera de la distancia focal $\overline{F_1 F_2}$. Se tiene que

$$\overline{CA_1} - \overline{CA_2} = \overline{A_1 A_2} = 2a.$$

Luego: con ⊙ (F_1, $\overline{A_1 C}$) y

⊙ (F_2, $\overline{A_2 C}$) se determinan los puntos

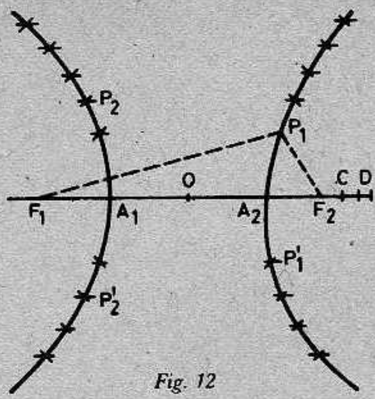


Fig. 12

P_1 y P'_1; análogamente, con ⊙ (F_1, $\overline{CA_2}$) y circunferencia (F_2, $\overline{CA_1}$) se determina P_2 y P'_2.

3) Se marca otro punto D y con ⊙ (F_1, $\overline{A_1 D}$) y ⊙ (F_2, $\overline{A_2 D}$) se determinan otros dos puntos y así sucesivamente.

469. EJERCICIOS

1) Dados tres puntos A, B y C determinar los puntos que tengan una distancia dada *r* al punto A y cuyas distancias a los puntos B y C tengan una suma dada s.

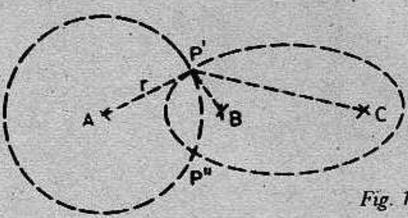


Fig. 13

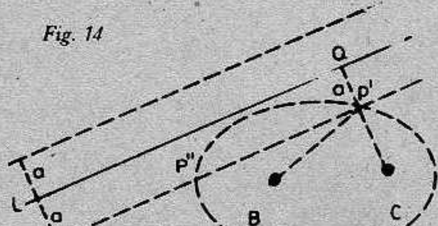
Solución: Un L.G. es la ⊙ (A, r) y el otro L.G. es la elipse de focos B y C. (Fig. 13).

P'A = r

P'B + P'C = s

2) Dada una recta L y dos puntos situados fuera de ella, se pide determinar los puntos que tengan una distancia *a* a la recta y cuya distancia a los puntos dados tengan una suma dada s.

Fig. 14



Solución: (Fig. 14). 1^er^. L.G. las dos paralelas trazadas a la distancia *a* de L.
2°. L.G. es la elipse de focos B y C.

BP' + P'C = s y P'Q = a

3) Determinar los puntos que tengan una distancia r a un punto P y que equidistan de una recta dada L y de otro punto dado F fuera de la recta.

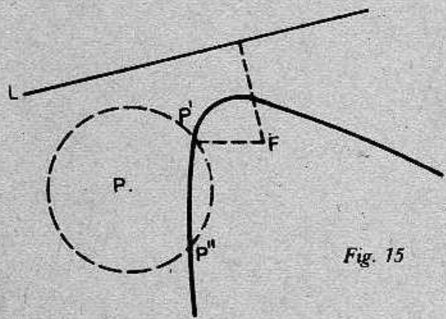


Fig. 15

Solución: (Fig. 15). 1^er^. L.G. es la circunferencia (P, r).

2°. L.G. es la parábola de foco F y directriz L.

4) Dada una recta L y dos puntos A y B fuera de ella, determinar los puntos que tengan una distancia *a* de la recta L y cuya distancia a los puntos dados tengan una diferencia constante d.

Solución: (Fig. 16). 1^er^ L.G. se compone de las dos paralelas a L. a distancia *a*.

2°. L.G.: son la hipérbola de focos A y B.

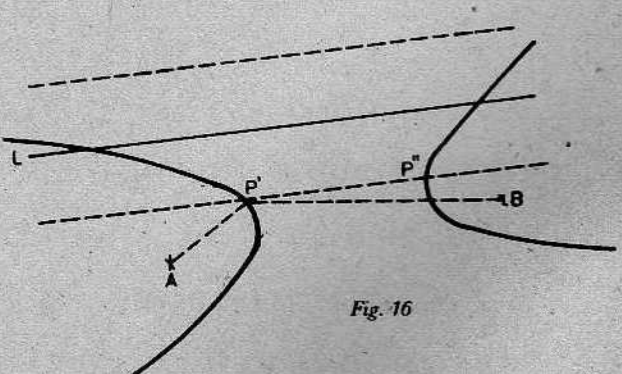


Fig. 16

P"A − P'B = P'B − P'A = d

TERCERA PARTE Patricio Saavedra

GEOMETRIA ANALITICA

Renato Descartes

Este eminente filósofo francés (1596-1650), considerado como el verdadero fundador de la Filosofía moderna, es importante para la Matemática por ser el Padre de la Geometría Analítica. Creó el sistema de coordenadas y es, por esta razón, que al Sistema Ortogonal de coordenadas se le conoce también como »Sistema cartesiano«.

41ª UNIDAD

Distancia entre dos puntos. Coordenadas del punto medio de un trazo. División de un trozo en cierta razón. Perímetro y área de un triángulo y de un cuadrilátero.

---

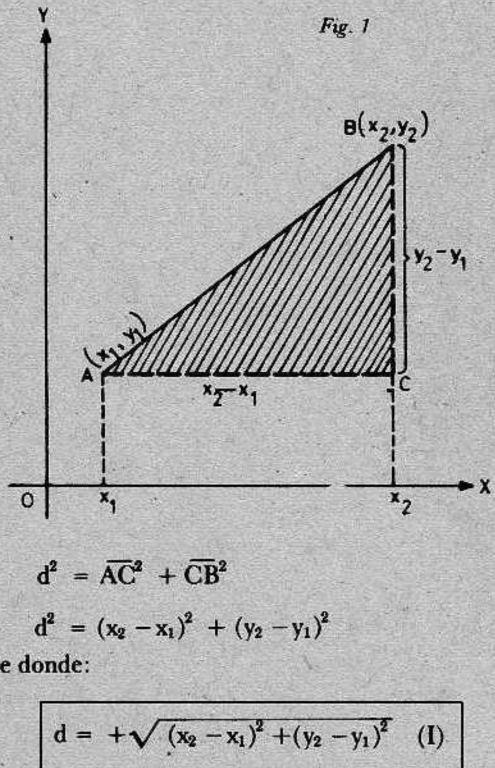
470. DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

En todos nuestros desarrollos usaremos sólo el *Sistema Cartesiano Ortogonal de Coordenadas,* es decir, aquél que tiene sus ejes perpendiculares entre sí.

Sean los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$.

Aplicando el Teorema de Pitágoras al $\triangle$ ACB, se tiene (Fig. 1):

Fig. 1



$$d^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2$$

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

de donde:

$$\boxed{d = +\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (I)}$$

(Esta distancia es siempre positiva).

Corolario: Tres puntos A, B, C son colineales cuando la suma de las medidas de dos trazos que forman es igual a la medida del tercer trazo. Es decir (Fig. 2):

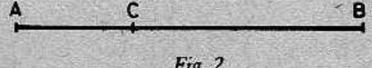


Fig. 2

Si $\overline{AC} + \overline{BC} = \overline{AC}$, entonces A, B, C son colineales.

Ejemplos: 1) Calcular la distancia entre el punto A (−5, −3) y B (4,7).

Solución:

$$d^2 = (-5-4)^2 + (-3-7)^2 = 181$$

$$\Rightarrow d = \sqrt{181}\ (=)\ 13{,}45.$$

2) ¿Son colineales los puntos A(−2, −3), B(2,1) y C(6,5)?

Solución:

$$\overline{AB}^2 = [2-(-2)]^2 + [1-(-3)]^2 = 32$$

$$\Rightarrow \overline{AB} = 4\sqrt{2}$$

$$\overline{BC}^2 = (2-6)^2 + (1-5)^2 = 32$$

$$\Rightarrow \overline{BC} = 4\sqrt{2}$$

$$\overline{AC}^2 = (-2-6)^2 + (-3-5)^2 = 128$$

$$\Rightarrow \overline{AC} = 8\sqrt{2}$$

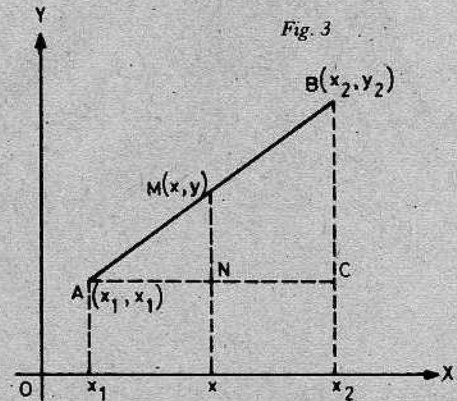
Por lo tanto, son colineales, pues

$$\overline{AB} + \overline{BC} = 8\sqrt{2} = \overline{AC}$$

471. COORDENADAS DEL PUNTO MEDIO DE UN TRAZO

En el $\triangle$ ABC (Fig. 3), se tiene: (según Nº 204).

Fig. 3



a) $\overline{BC} = 2 \cdot \overline{MN}$ pues $\overline{MN}$ es mediana del $\triangle$ ABC; $y_2 - y_1 = 2(y - y_1)$ de donde:

$$\boxed{\begin{aligned} y &= \frac{y_1 + y_2}{2} \\ x &= \frac{x_1 + x_2}{2} \end{aligned}} \quad (II)$$

b) $\overline{AC} = 2 \cdot \overline{AN}$ pues $\overline{Na} = \overline{NC}$

$x_2 - x_1 = 2(x - x_1)$ de donde:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Ejemplo: Determinar los puntos medios de los lados del triángulo determinado por los puntos A (−3, −2), B (6, −1) y C (−2,5).

Solución: Designando por M_1, M_2 y M_3 los puntos medios de los lados del triángulo, se obtiene (Fig. 4):

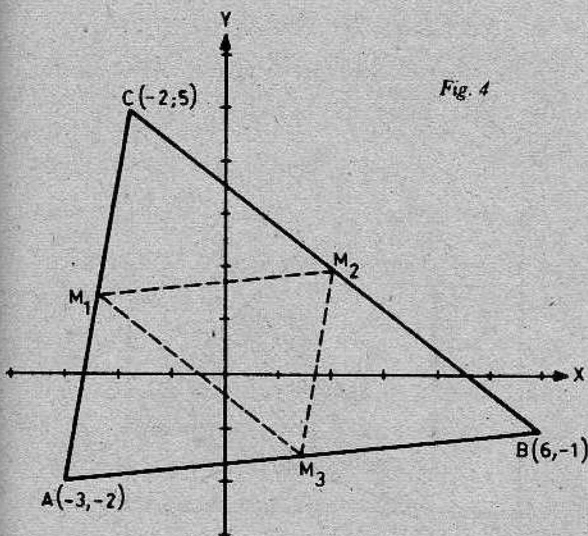


Fig. 4

Para M_1: $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-3+(-2)}{2} = -2\dfrac{1}{2} \\ y_1 = \dfrac{-2+5}{2} = 1\dfrac{1}{2} \end{cases}$

luego: $M_1\left(-2\frac{1}{2}; 1\frac{1}{2}\right)$

Para M_2: $\begin{cases} x_2 = \dfrac{6+(-2)}{2} = 2 \\ y_2 = \dfrac{5+(-1)}{2} = 2 \end{cases}$

Luego: $M_2 = (2;2)$

Para M_3: $\begin{cases} x_3 = \dfrac{-3+6}{2} = 1\dfrac{1}{2} \\ y_3 = \dfrac{-2+(-1)}{2} = -1\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Luego: $M_3\left(1\frac{1}{2}; -1\frac{1}{2}\right)$

472. DIVISION DE UN TRAZO

Consideraremos sólo el caso de *división interior* de un trazo $\overline{AB}$ por un punto P(x, y) en una razón λ. Es decir (Fig. 5):

$$\boxed{\frac{AP}{PB} = \lambda}$$

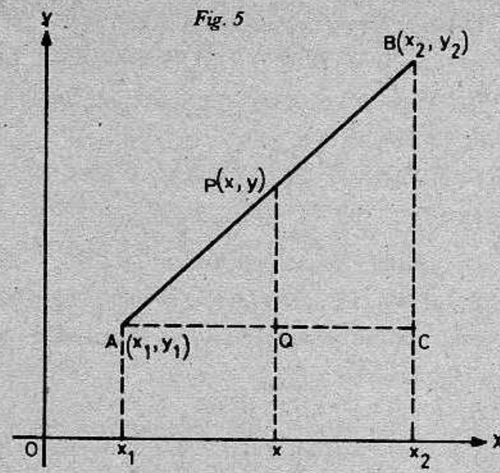


Fig. 5

Como $\overline{PQ} \,//\, \overline{BC}$ se obtiene, (por Teor. de Thales):

$$\lambda = \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{QC}} = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$$

de donde:

$$x - x_1 = \lambda \cdot x_2 - \lambda \cdot x$$

$$x \cdot (1\ \lambda) = x_1 + \lambda \cdot x_2 \Rightarrow \boxed{x = \frac{x_1 + \lambda \cdot x_2}{1+\lambda}} \quad \text{(III)}$$

En forma análoga resulta: $\Rightarrow \boxed{y = \dfrac{y_1 + \lambda \cdot y_2}{1+\lambda}}$

Observación: En el N° 291 tratamos este mismo tema considerando negativo el valor de λ para la división interior y positivo para la división exterior. De acuerdo con esta »convención«, ¿cómo serían las fórmulas anteriores para la división interior?

Ejemplo: Los extremos de un trazo son A (−2, −5) y B (7,7). Determinar el punto que lo divide en la razón 4:5.

Solución: $\lambda = \frac{4}{5} = 0{,}8$

Luego: $x = \dfrac{-2+0{,}8\cdot 7}{1+0{,}8} = 2;$

$y = \dfrac{-5+0{,}8\cdot 7}{1+0{,}8} = \dfrac{1}{3}$. Resulta $P\left(2, \frac{1}{3}\right)$

473. EJERCICIOS

1) Calcular la distancia entre los puntos A (−4, −1) y B (6, −3)
   Resps.: $\overline{AB} = \sqrt{104}$
2) Calcular el perímetro del triángulo cuyos vértices son A(−2, −5), B(4, −1) y C(−4,6).
   Resp.: p = 29

3) Los vértices de un cuadrilátero son $A(-3, -5)$, $B(6, -2)$, $C(7,5)$, $D(-2, 6)$. Calcular: a) el perímetro; b) la longitud de las diagonales.
Resp.: a) p(=) 36,7
b) $\overline{AC} = 10\sqrt{2}$, $\overline{BD} = 8\sqrt{2}$

4) Los vértices de un polígono son $A(-3, -2)$, $B(7, -4)$, $C(10,4)$, $D(5,7)$ y $E(-5,5)$. Calcular: a) su perímetro; b) la longitud de la diagonal $\overline{AD}$.
Resp.: a) (=) 42; b) 12,04

5) Los vértices de un trapezoide son $A(-3, -4)$, $B(6, -2)$; $C(5,5)$ y $D(-5,6)$. Calcular: a) su perímetro; b) la longitud de las diagonales.
Resp.: a) (=) 36,6; b) $\overline{AC}$(=) 12,04
$\overline{BD}$(=) 13,60

6) Determinar las coordenadas del punto medio del trazo determinado por los puntos $A(-5,6)$ y $B(3, -8)$.
Resp.: $M(-1, -1)$.

7) Determinar las coordenadas del punto medio del trazo $\overline{CD}$ si $C(-3;5$ y $D(6, -5)$.
Resp.: $M(1\frac{1}{2}, 0)$.

8) Los vértices de un triángulo son $A(-2; 2)$, $B(6, -1)$ y $C(-1; 4)$. Calcular:
a) las coordenadas de los puntos medios de sus lados;
b) la longitud de cada mediana.
Resp.: $M_1(2\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2})$, $M_2(-1\frac{1}{2}, 3)$,
$M_3 = (2; -\frac{1}{2})$, $\overline{M_1M_2}$(=)4,27;
$\overline{M_1M_3}$(=) 1,12; $\overline{M_2M_3}$ (=) 4,30.

9) Los vértices de un triángulo son $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ y $C(x_3, y_3)$. Demostrar que cada mediana es igual a la mitad del lado opuesto.

10) Los extremos de un trazo son $A(-4, -7)$ y $B(6; 3)$. Un punto P lo divide en la razón 2:3. Calcular: a) la longitud de cada segmento; b) la longitud del trazo.
Resp.: a) $4\sqrt{2} \wedge 6\sqrt{2}$; b) $10\sqrt{2}$

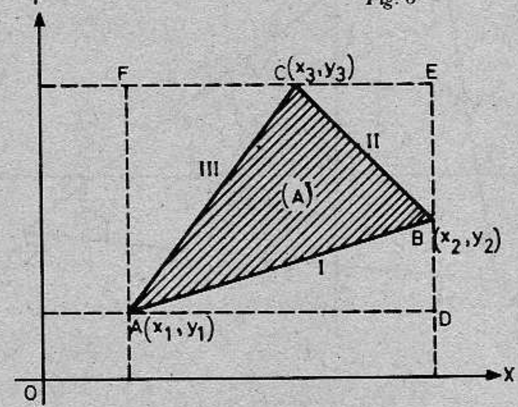
11) Un trazo $\overline{AB}$ está dividido en dos partes por un punto P (2, −3) de modo que $\overline{AP}:\overline{PB} = 2:5$. Calcular la posición del punto A si $B(-3; 2)$.
Resp.: $A(4, -5)$.

12) Los vértices de un triángulo son $A(-3, -2)$, $B(6, -1)$ y $C(-2; 5)$. Cada lado se divide en la razón 2:5. Calcular el perímetro del triángulo que se obtiene al unir estos tres puntos de división interior

474. AREA DE UN TRIANGULO

Calcularemos el área del triángulo ABC siendo $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ y $C(x_3, y_3)$ (Fig. 6). (Fig. 6).

Fig. 6



Solución: Designando por A el área del triángulo se obtiene:

$$A = \text{rectángulo ADEF} - \triangle\, I - \triangle\, II - \triangle\, III$$

$$A = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) - $$
$$- \frac{1}{2}(x_2 - x_3)(y_3 - y_2) - \frac{1}{2}(x_3 - x_1)(y_3 - y_1).$$

Al efectuar los productos y las reducciones, se obtiene:

$$A = \frac{1}{2}\cdot(x_2y_3 - x_1y_3 - x_2y_1 + x_1y_2 - x_2y_2 + x_3y_1).$$

Finalmente, factorizando convenientemente por partes, resulta:

$$\boxed{A = \frac{1}{2}\left[(x_3 - x_2)\cdot y_1 + (x_1 - x_3)\cdot y_2 + (x_2 - x_1)\cdot y_3\right]} \quad \text{(IV)}$$

En el resultado debe tomarse el valor absoluto de él, pues el área es siempre positiva.

Debemos hacer notar que la fórmula anterior corresponde al desarrollo del determinante.

$$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$o\ bien: A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

Corolario: Se sabe que tres puntos colineales forman un triángulo de área cero. Por lo tanto, tres puntos son colineales cuando el determinante anterior vale cero, es decir:

$$(x_3 - x_2)\cdot y_1 + (x_1 - x_3)\cdot y_2 + (x_2 - x_1)\cdot y_3 = 0$$

Ejemplo: Los vértices de un triángulo son A(−3, −2), B(6, −1) y C(−2:5). Calcular su área.

Solución: Se puede calcular primeramente, por medio del gráfico, el área del rectángulo ADEF y de los triángulos rectángulos I, II y III; después se haría la resta conveniente.

O bien, se aplica directamente la fórmula IV y para ello no es necesario hacer el gráfico. Por este camino se obtiene:

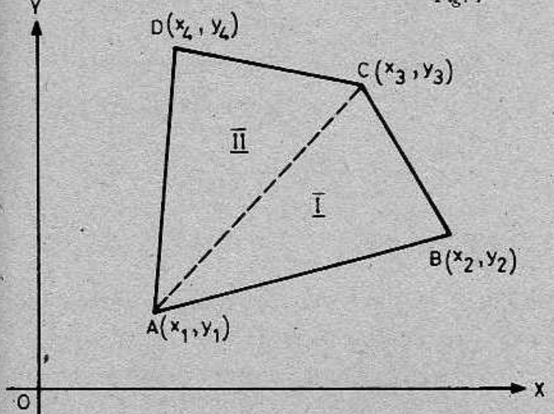
$$A = \frac{1}{2}\left[(-2-6)(-2) + (-3+2)(-1) + (6+3)(5)\right] = 31$$

475. *AREA DE UN CUADRILATERO*

Sea ABCD el cuadrilátero que tiene por vértices $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ y $D(x_4, y_4)$.

Para calcular su área se traza una diagonal la que lo descompone en dos triángulos cuyas áreas se calculan por la fórmula anterior (IV).

Fig. 7



Basta, finalmente, sumar estas áreas, obteniéndose (Fig. 7):

$$\left.\begin{aligned} \triangle I &= \frac{1}{2}\left[(x_3 - x_2)\cdot y_1 + (x_1 - x_3)\cdot y_2 + (x_2 - x_1)\cdot y_3\right] \\ \triangle II &= \frac{1}{2}\left[(x_4 - x_3)\cdot y_1 + (x_1 - x_4)\cdot y_3 + (x_3 - x_1)\cdot y_4\right] \end{aligned}\right\} +$$

$$\text{cuadr. ABCD} = \frac{1}{2}\left[(x_3 - x_2 + x_4 - x_3)\,y_1 + (x_1 - x_3)\,y_2 + (x_2 - x_1 + x_1 - x_4)\,y_3 + (x_3 - x_1)\,y_4\right]$$

de donde:

$$\boxed{A = \frac{1}{2}\left[(x_4 - x_2)\cdot y_1 + (x_1 - x_3)\cdot y_2 + (x_2 - x_4)\cdot y_3 + (x_3 - x_1)\cdot y_4\right]}$$

(V)

Corolario: Cuatro puntos son colineales cuando:

$$(x_4 - x_2)\cdot y_1 + (x_1 - x_3)\cdot y_2 + (x_2 - x_4)\cdot y_3 + (x_3 - x_1)\cdot y_4 = 0$$

476. *EJERCICIOS*

1) Calcular el área del triángulo determinado por los puntos P(−2, −5), Q(6; −1) y R(−4; 7).

   Resp.: A = 52

2) Calcular el área del triángulo que tiene por vértices R(−2, −5), S(4, −1) y T(−4; 6).

   Resp.: A = 37.

3) Los vértices de un cuadrilátero son R(−3, −5), S(6, −2), C(7; 5) y D(−2; 6). Calcular su área.

   Resp.: A = 80.

4) Los vértices de un cuadrilátero son A(−4, −3), B(6; 3), C(3; 9), D(−2; 6). Calcular: a) su perímetro; b) la longitud de las diagonales; c) el área.

   Resp.: a) p(=)33,4; c) A = 68,5; b) $\overline{AC}$ = 13,89; $\overline{BD}$ (=) 8,54.

5) Los vértices de un polígono convexo ABCDE son:

$A(-3, -2)$, $B(7, -4)$, $C(10; 4)$, $D(5; 7)$ y $E(-5; 5)$. Calcular su área.

Resp.: A (=) 102,5

6) Los vértices de un trapezoide RSTU son $R(-3, -4)$, $S(6, -2)$, $T(5; 5)$ y $U(-5; 6)$. Calcular su área.

Resp.: A = 81,5

7) Los vértices de un triángulo son $A(-5; 3)$, $B(3, -1)$ y $C(-1; 7)$.

Calcular: a) ¿Qué clase de triángulo es? b) ¿cuál es su perímetro?; c) ¿cuál es su área?; d) ¿cuáles son las coordenadas de los puntos medios de los lados?; e) ¿cuánto mide cada mediana?

La recta. Pendiente de una recta. Inclinación de una recta. Recta por el origen. Haz de rectas. Recta por dos puntos. Ecuación general y principal de una recta. Coeficiente angular (pendiente) y coeficiente de posición. Ecuación de segmentos. Rectas paralelas. Angulo formado por dos rectas. Rectas perpendiculares.

---

477. PENDIENTE DE UNA RECTA

Sean $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ dos puntos de la recta L (Fig. 1).

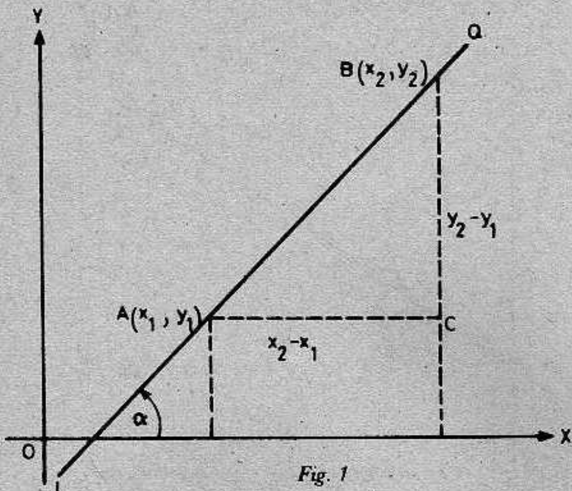


Fig. 1

Se define por »*pendiente* de una recta a la razón entre la diferencia de las ordenadas de dos puntos de ella y la diferencia entre las abscisas de ellos«. Es costumbre designar la pendiente por »m«; por lo tanto:

$$\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}} \qquad \text{(VI)}$$

Por ejemplo:

1) Calcular la pendiente de la recta que pasa por los puntos A (−3, −5) y B (6; 4).

Solución: $m = \frac{4-(-5)}{6-(-3)} = 1$

2) Determinar la pendiente del trazo $\overline{PQ}$ si P(−4; 8) y Q(3, −2).

Solución: $m = \frac{-2-8}{3-(-4)} = -\frac{10}{7}$

478. INCLINACION DE UNA RECTA

El ángulo α que forma la recta con el eje positivo de las X (Fig. 1), es su *inclinación* y, por lo tanto, se expresa en grados o en radianes.

La pendiente es $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$; pero, por Trigonometría, se sabe que esta razón corresponde a la tangente trigonométrica del ángulo α.

Por lo tanto:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}} \quad \text{o bien:} \quad \boxed{\operatorname{tg}\alpha = m} \qquad \text{(VII)}$$

En el ejemplo 1) anterior, obtuvimos: m = 1. Por lo tanto, $\operatorname{tg}\alpha = 1$ de donde: $\alpha = 45°$ pues $\operatorname{tg} 45° = 1$. Luego, esta recta corta al eje positivo de las X formando un ángulo de 45°.

En el ejemplo 2) obtuvimos

$$m = -\frac{10}{7} = -1{,}428.$$

Por lo tanto: $\operatorname{tg}\alpha = -1{,}428$ de donde:

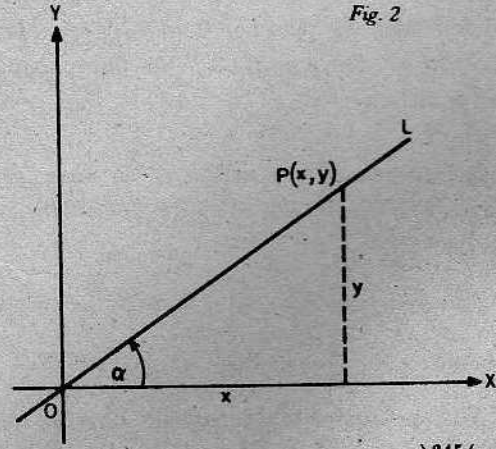
$$\alpha = 126° = 0{,}7\pi \text{ radianes.}$$

(Se observa que cuando la pendiente es positiva la inclinación es un ángulo agudo y cuando es negativa, la inclinación es un ángulo obtuso).

479. RECTA POR EL ORIGEN

Sea L una recta que pasa por el origen 0 del sistema de coordenadas y P(x, y) un punto cualquiera de ella (Fig. 2).

Fig. 2



De acuerdo con lo anterior, la pendiente de esta recta es:

$$m = \frac{y}{x} \text{ de donde: } \boxed{y = m \cdot x} \qquad \text{(VIII)}$$

que es la ecuación de la recta que pasa por el origen.

Ejemplo: La ecuación de la recta que pasa por el origen y tiene una pendiente 2,05 es: $y = 2{,}05 \cdot x$. Su inclinación es 63°.

480. RECTA QUE PASA POR UN PUNTO

Sea $P(x_1, y_1)$ el punto por el cual pasa el *haz de rectas* y también, sea A (x, y) un punto variable de cualquiera de las rectas (Fig. 3). Entonces, la pendiente de ella será:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \text{ de donde: } \boxed{y - y_1 = m(x - x_1)} \qquad \text{(IX)}$$

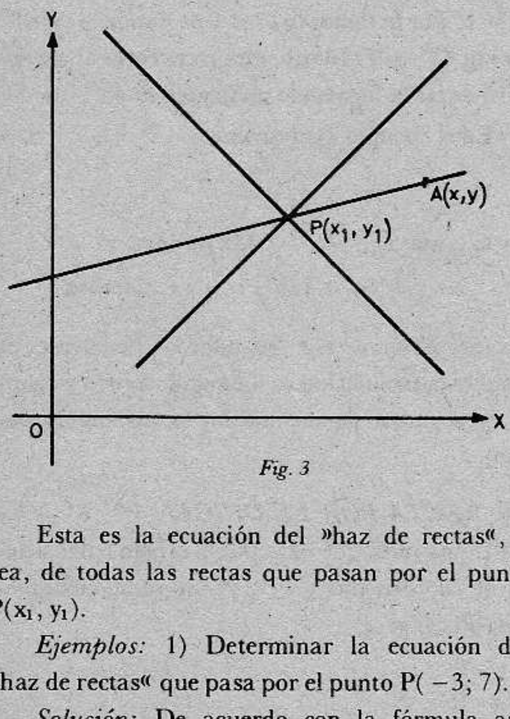


Fig. 3

Esta es la ecuación del »haz de rectas«, o sea, de todas las rectas que pasan por el punto $P(x_1, y_1)$.

Ejemplos: 1) Determinar la ecuación del »haz de rectas« que pasa por el punto P(−3; 7).

Solución: De acuerdo con la fórmula anterior se obtiene:

$y - 7 = m \cdot (x + 3)$

2) Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto P(−3; 7) y tiene una pendiente igual a 0,75.

Solución: $y - 7 = \frac{3}{4} \cdot (x + 3)$ de donde se obtiene: $y = \frac{3}{4} \cdot x + \frac{37}{4}$

3) Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto Q(4, −5) y tiene una inclinación de 63°.

Solución: Se determina primeramente la pendiente: $m = \text{tg } 63° = 2{,}05$. Por lo tanto: $y - (-5) = 2{,}05 \cdot (x - 4)$ de donde $y = 2{,}05 \cdot x - 11{,}2$

481. RECTA POR DOS PUNTOS

Sean $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ los dos puntos dados. De acuerdo con la fórmula IX la ecuación de todas las rectas (haz de rectas) que pasan por el punto A es (Fig 4):

$$y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$$

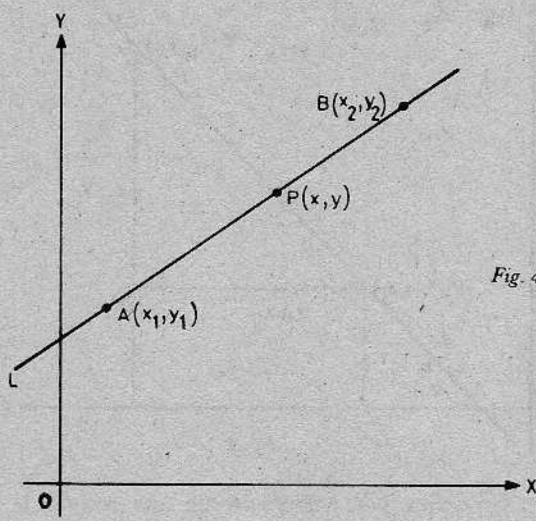


Fig. 4

Pero, la pendiente de la recta que pasa por los puntos A y B es, según VI:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Introduciendo este valor en la ecuación anterior, resulta:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$$

Puede esribirse, también, en la forma:

$$\boxed{\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}} \qquad \text{(X)}$$

Ejemplo: Determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(−6; 5) y B(4, −7).

Solución: Aplicando la fórmula anterior, se obtiene:

$$\frac{y - 5}{x + 2} = \frac{-7 - 5}{4 + 6} \text{ de donde resulta:}$$

$$y = -\frac{6}{5} \cdot x + \frac{13}{5}$$

482. *ECUACION PRINCIPAL DE LA RECTA*

Para trazar la recta L bastaría conocer su pendiente »m« y el segmento $n = \overline{OA}$ que determina en el eje de las Y. A este segmento se le llama *coeficiente de posición* (Fig. 6) y corresponde al valor de la ordenada »y« cuando $x = 0$. Es decir, cuando $x = 0$ se obtiene $y = n$.

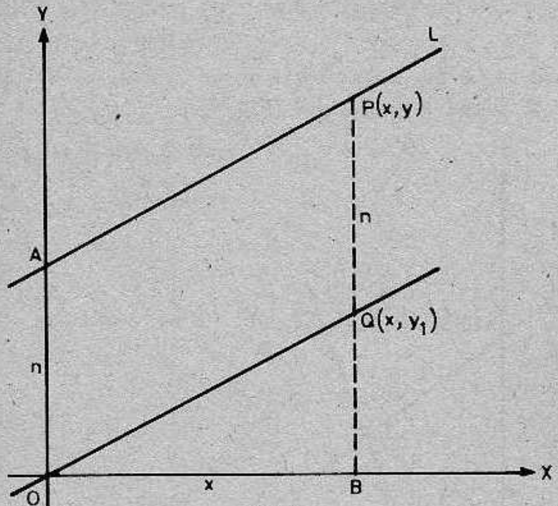


Fig. 5

Al considerar un punto cualquiera P (x,y) de la recta L y trazar por el origen la paralela a L, se obtiene:

$\overline{BP} = \overline{BQ} + \overline{QP}$; siendo $Q(x, y_1)$

resulta: $y = y_1 + n$

Pero de la pendiente $m = \frac{y_1}{x}$ obtenemos el valor $y_1 = m \cdot x$

Sustituyendo este valor encontramos:

$$\boxed{y = m \cdot x + n} \qquad \text{(XI)}$$

A esta ecuación se le llama *ecuación principal de la recta* en la cual »m« es el *coeficiente angular o pendiente* y »n« es el *coeficiente de posición.*

Ejemplos: 1) Determinar la ecuación y trazar la recta cuya pendiente es 0,75 y tiene por coeficiente de posición -2.

Solución: Se tiene $m = 0{,}75$, $n = -2$ de donde: $y = 0{,}75 \cdot x - 2$

Para dibujarla se determina su inclinación para lo cual se da la pendiente $m = 0{,}75 = \frac{3}{4}$.

Se ubica el punto C(4,3) que al unirlo con el origen da la inclinación de la recta. Finalmente, al trazar por el punto A(0, −2) o $y = -2$ la paralela a $\overline{OC}$ se obtiene la recta L. (Fig. 6).

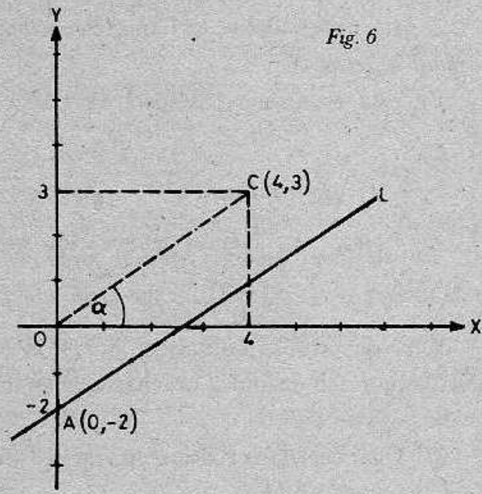


Fig. 6

2) Determinar la ecuación y dibujar la recta de pendiente $-\frac{3}{2}$ y coeficiente de posición 4.

Solución: Como $m = -\frac{3}{2}$, $n = 4$ resulta:

$$y = -\frac{3}{2}x + 4$$

Para trazarla se ubica el punto C(−2;3) o bien, el punto C'(2, −3) que al unirlo con el origen se determina la inclinación. Finalmente, por el punto $y = 4$ se traza la paralela a la recta que pasa por el origen (Fig. 7).

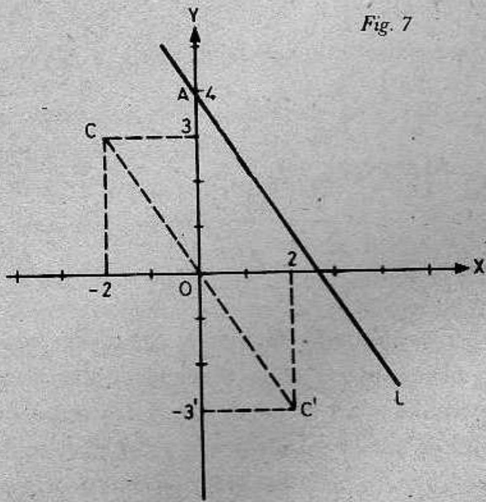


Fig. 7

483. *ECUACION GENERAL DE LA RECTA*

A la ecuación principal $y = n \cdot x + n$ se le puede dar la forma: $\boxed{Ax + By + C = 0}$ (XII)

A esta expresión se le llama *Ecuación General de la recta.*

En esta ecuación al despejar »y« se obtiene:

$y = -\frac{A}{B}\ y - \frac{C}{B}$ en la cual $m = -\frac{A}{B}$; $n = -\frac{C}{B}$

Ejemplos: 1) ¿Cuál es la ecuación general de la recta $y = \frac{3}{4} \cdot x - 2$?

Solución: Basta multiplicar por 4 la ecuación dada y, en seguida, ordenarla obteniéndose: $3x - 4y - 8 = 0$

2) ¿Cuál es la ecuación principal de la recta $2x - 6y + 3 = 0$?

Solución: $2x - 6y + 3 = 0$

$6y = 2x + 3$ de donde: $y = \frac{1}{3} \cdot x + \frac{1}{2}$

3) ¿Cuál es la pendiente y el coeficiente de posición de la recta $3x + 5y = 15$?

Solución: $3x + 5y = 15 \Rightarrow y = -\frac{3}{5} \cdot x + 3$

de donde: $m = -0{,}6$; $n = 3$

¡Dibuje usted esta recta!

484. *ECUACION DE SEGMENTOS DE UNA RECTA*

Si la ecuación general de la recta $Ax + By = C$, se la divide por C, se obtiene:

$$\frac{Ax}{C} + \frac{By}{C} = 1$$

Esta ecuación equivale también a

$$\frac{x}{\frac{c}{A}} + \frac{y}{\frac{c}{B}} = 1$$

Al designar $\frac{C}{A} = a$, $\frac{C}{B} = b$, se obtiene:

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1} \qquad \text{(XIII)}$$

Esta fórmula se conoce como *ecuación de segmentos* pues »a« es el segmento que la recta determina sobre el eje de las X (corresponde al valor de la »x« cuando $y = 0$) y »b« es el segmento que determina sobre el eje de las Y (corresponde al valor de la »y« cuando $x = 0$; por lo tanto $b = n$).

Esta ecuación permite muchas veces dibujar cómoda y fácilmente una recta.

Ejemplo: Dibujar la recta $3x + 4y = 24$ aprovechando la ecuación de segmentos.

Solución: $3x + 4y = 24\ /\ :24$

$$\frac{3x}{24} + \frac{4y}{24} = 1$$

$$\frac{x}{8} + \frac{y}{6} = 1$$

de donde: $a = 8$, $b = 6$ (Fig. 8)

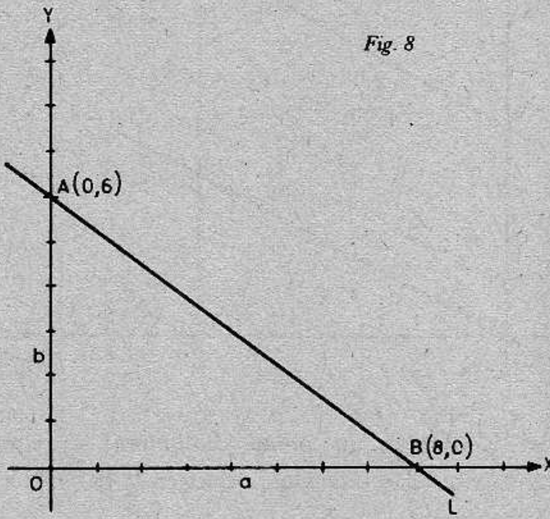


Fig. 8

Por lo tanto, basta unir los puntos A(0,6), B(8,0) para trazar la recta.

En la misma forma trace las rectas:

1) $3x - 5y = 30$
2) $5x - 9y = -18$
3) $2x - 3y + 9 = 0$

485. *RECTAS PARALELAS*

Sabemos que dos rectas de un plano son paralelas cuando tienen la misma inclinación y, por lo tanto, la misma pendiente.

Para que las rectas $L_1 : y = m_1 \cdot x + n_1$, $L_2 : y = m_2 \cdot x + n_2$ sean paralelas debe verificarse que:

$$\boxed{m_1 = m_2} \qquad \text{(XIV)}$$

Ejemplo: ¿Son paralelas las rectas

$2x + 3y = 12 \wedge y = -\frac{2}{3} \cdot x + 5$?

Solución: Basta calcular la pendiente de ellas. Se obtiene:

$m_1 = -\frac{2}{3}$, $m_2 = -\frac{2}{3}$. Por lo tanto, son paralelas pues $m_1 = m_2$

486. ANGULO FORMADO POR DOS RECTAS

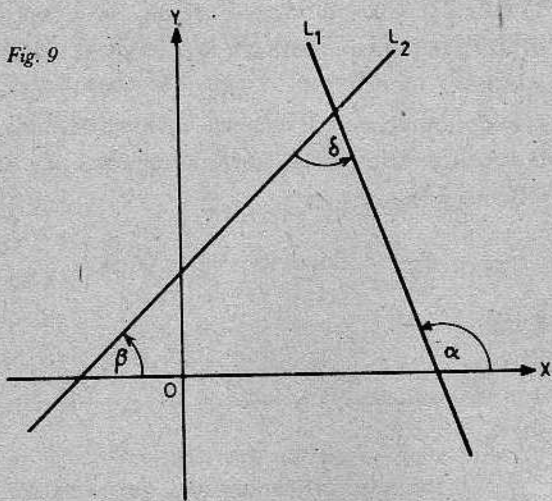
Sea δ el ángulo que forman al cortarse las rectas: L_1 y L_2 siendo:

$L_1\ y = m_1 \cdot x + n_1 \wedge L_2 : y = m_2 x + n_2$

Como α es ángulo exterior del triángulo que se forma, se obtiene (Fig. 9):

$\alpha = \beta + \delta$ de donde: $\delta = \alpha - \beta$

Fig. 9



Pero, por Trigonometría, se sabe que:

$$\text{tg}\ \delta = \text{tg}\ (\alpha - \beta) = \frac{\text{tg}\ \alpha - \text{tg}\ \beta}{1 + \text{tg}\ \alpha \cdot \text{tg}\ \beta}$$

Además, como tg $\alpha = m_1$, tg $\beta = m_2$, resulta:

$$\boxed{\text{tg}\ \delta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}} \qquad \text{(XV)}$$

Ejemplo. ¿Qué ángulo forman los trazos $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ si A(3;9), B(9;6) y P(1;3)?

Solución: Se debe calcular primeramente la pendiente de estos trazos, obteniéndose:

$m_1 = \frac{9-3}{3-1} = 3$ para $\overline{PA}$;

$m_2 = \frac{6-3}{9-1} = \frac{3}{8}$ para $\overline{PB}$

Luego: $\text{tg}\ x = \dfrac{3 - \frac{3}{8}}{1 + 3 \cdot \frac{3}{8}} = \frac{21}{17} = 1{,}235$

de donde: $x = 51°$

487. RECTAS PERPENDICULARES

Sabemos que dos rectas son perpendiculares cuando al cortarse forman un ángulo de 90°. Por lo tanto:

$$\text{tg}\ 90° = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}$$

Pero tg 90° tiende a infinito, es decir, tiene un valor indeterminado.

Para evitar esta ideterminación se toma

$$\cot 90° = \frac{1 + m_1 \cdot m_2}{m_1 - m_2} = 0$$

Esta igualdad se cumple cuando el numerador es cero, es decir, cuando $1 + m_1 \cdot m_2 = 0$.

De aquí obtenemos:

$$\boxed{m_1 \cdot m_2 = -1} \quad \text{o bien:} \quad \boxed{m_2 = -\frac{1}{m_1}} \ \text{(XVI)}$$

Ejemplos: 1) ¿Son perpendiculares las rectas:

$4x + 3y + 38 = 0 \wedge 3x - 4y = 15$?

Solución: Se debe determinar m_1 y m_2.

De $4x + 3y + 38 = 0$ se obtiene:

$m_1 = -\frac{4}{3}$

De $3x - 4y = 15$ se obtiene: $m_2 = \frac{3}{4}$

Por lo tanto, las rectas son perpendiculares pues $-\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} = -1$

2) Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto P(1;3) y es perpendicular al trazo determinado por los puntos A(2;8) y B(7;3). ¿Cuáles son las coordenadas del pie de esta perpendicular?

Solución: Se determina la pendiente del trazo $\overline{AB}$ obteniéndose: $m_1 = \frac{8-3}{2-7} = -1$;

por lo tanto: $m_2 = 1$ (pendiente de la recta perpendicular al trazo $\overline{AB}$)

Recta por el punto P(1;3) : $y - 3 = 1 \cdot (x - 1)$

Luego: $y = x + 2$

Para determinar las coordenadas del pie de la perpendicular basta resolver el sistema formado por las dos ecuaciones de las rectas, pues este punto es común a las dos. Se obtiene:

Recta $\overline{AB}$: $\frac{y-8}{x-2} = \frac{3-8}{7-2}$ de donde: $x + y = 10$

Recta por P: $x - y = -2$

Resolviendo este sistema se obtiene: $x = 4$; $y = 6$ que son las coordenadas del pie de la perpendicular.

OPTATIVO

488. DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

Sea la recta L: $Ax + By + C = 0$, $P(x_1, y_1)$ el punto y $d = \overline{PQ}$ la distancia de este punto a la recta (Fig. 10).

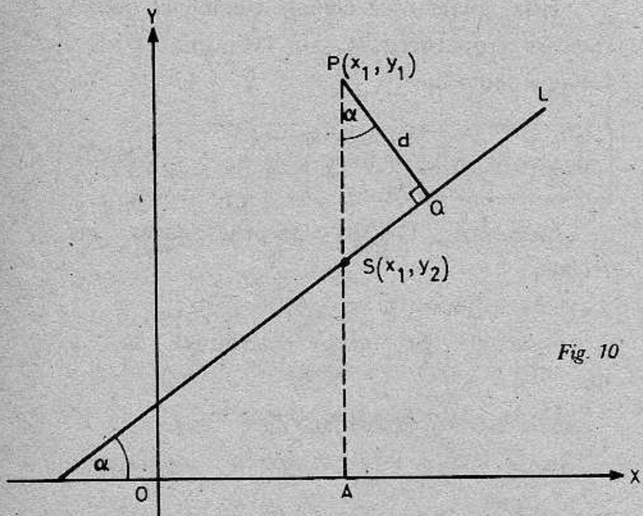


Fig. 10

Se tiene:

$$\overline{PA} = \overline{PS} + \overline{SA}$$

$$y_1 = \overline{PS} + y_2$$

$$\overline{PS} = y_1 - y_2$$

pero:

$$\overline{PS} = \frac{d}{\cos\alpha}$$

de donde: $d = (y_1 - y_2) \cdot \cos\alpha$

Expresando el coseno en función de la tangente se obtiene:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + m^2}} \text{ de donde:}$$

$$d = \frac{y_1 - y_2}{\sqrt{1 + m^2}} \qquad \text{(I)}$$

Como el punto $S(x_1, y_2)$ pertenece a la recta L, deben sus coordenadas satisfacer su ecuación obteniéndose:

$Ax_1 + By_2 + C = 0$. De aquí resulta:

1) $y_2 = -\frac{A}{B}x_1 - \frac{C}{B}$; 2) $m = -\frac{A}{B}$

Sustituyendo estos valores en (I) se obtiene:

$$d = \frac{y_1 - \left(-\frac{A}{B}\cdot x_1 - \frac{C}{B}\right)}{\sqrt{1 + \left(-\frac{A}{B}\right)^2}}$$; de aquí resulta finalmente:

$$\boxed{d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}} \qquad \text{(XVII)}$$

Se toma el valor absoluto porque la distancia es siempre positiva.

Con un desarrollo análogo se obtiene también:

$$\boxed{d = \frac{|y_1 - m \cdot x_1 - n|}{\sqrt{1 + m^2}}} \qquad \text{(XVIII)}$$

Ejemplos:

1) Calcular la distancia desde el punto P(6;2) a la recta que pasa por los puntos A(−5;0) y B(0;3).

1ª solución: previamente se determina la ecuación principal de la recta que pasa por A y B, obteniéndose:

$$\frac{y - 0}{x + 5} = \frac{3 - 0}{0 + 5} \text{ de donde: } y = \frac{3}{5}\cdot x + 3 \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{5} \\ n = 3 \end{cases}$$

Luego:

$$d = \frac{\left|2 - \frac{3}{5}\cdot 6 - 3\right|}{\sqrt{1 + \left(\frac{3}{5}\right)^2}} = \frac{|-23|}{\sqrt{34}} \Rightarrow d = \frac{23}{\sqrt{34}}$$

2ª solución: primeramente se determina la ecuación general de la recta, obteniéndose:

$$3x - 5y + 15 = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = -5 \\ C = 15 \end{cases}$$

Ahora, basta aplicar la fórmula XVII:

$$d = \frac{|3\cdot 6 + (-5)\cdot 2 + (15)|}{\sqrt{3^2 + (-5)^2}} = \frac{23}{\sqrt{34}}$$ que puede escribirse: $d = \frac{23}{34}\cdot\sqrt{34}$

2) Calcular el radio de la circunferencia de centro P(6;2) y que es tangente a la recta que pasa por los puntos A(−5;0 y B(0;3).

Solución: Es el mismo problema anterior sólo con otro enunciado.

Resp.: $r = \frac{23}{34}\sqrt{34}$

3) Calcular el radio de la circunferencia de centro (−8, −2) que es tangente a la recta

$3x - 4y - 15 = 0$. ¿Cuáles son las coordenadas del punto de tangencia?

Solución: De la ecuación $3x - 4y - 15 = 0$

se obtiene: $\begin{cases} A = 3 \\ B = -4 \\ C = -15 \end{cases}$

Luego:

$$d = \frac{|3 \cdot (-8) + (-4) \cdot (-2) + (-15)|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|-31|}{5} \quad ;$$

por tanto: $d = 6\frac{1}{5} = r$

Para determinar las coordenadas del punto de tangencia, sabemos que $y = \frac{3}{4} \cdot x - 3{,}75$ de donde: $m_1 = \frac{3}{4}$. Pero como la tangente es perpendicular a esta recta la pendiente de toda perpendicular a ella es $m_2 = -\frac{4}{3}$. Además, esta perpendicular debe pasar por el punto $(-8, -2)$ y, por lo tanto, su ecuación es:

$y + 2 = -\frac{4}{3} \cdot (x + 8)$ de donde se obtiene:

$$y = -\frac{4}{3} \cdot x - \frac{38}{3}$$

pero

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{15}{4}$$

Al resolver este sistema, obtenemos el punto de tangencia: $(-4{,}28;\ -6{,}96)$.

489. EJERCICIOS

1) Calcular la distancia entre el punto: $P(-5;\ -1)$ y $Q(4,\ -7)$.
Resp.: $d = \sqrt{117}$

2) Los vértices de un triángulo son $R(-5;4)$, $S(3,\ -6)$ y $T(5;8)$.
Calcular su perímetro y su área.
Resp.: $p\,(=)\,37{,}12$; $A = 66$.

3) Los vértices de un cuadrilátero son $A(-3, -1)$, $B(5, -4)$, $C(7;0)$, $D(2;5)$.
Calcular su área y su perímetro.

4) Demuestre que son colineales los puntos $R(7,1)$, $S(-2,\ -2)$ y $T(10;2)$.

5) Los extremos de un trazo son $R(-2,\ -5)$ y $S(4;7)$. Calcular: a) la pendiente; b) la inclinación.
Resp.: a) $m = 2$; b) $\alpha = 63°26'$

6) Los extremos de un trazo son: $P(-4;6)$ y $A(8,\ -2)$. Determinar: a) su pendiente; b) su inclinación.
Resp.: $m = -\frac{2}{3}$; $\alpha = 146°20'$.

7) Determinar la ecuación de la recta que pasa por el origen y por el punto $P(-3,\ -5)$. Su inclinación.
Resp.: $y = 0{,}6 \cdot x$; $\alpha = 30°58'$

8) Determinar la ecuación de la recta que pasa por el origen y que tiene una pendiente de $3/4$.
Resp.: $y = 0{,}75 \cdot x$

9) Determinar la ecuación de la recta que pasa por el origen y tiene una inclinación de $60°$.
Resp.: $y = \sqrt{3} \cdot x$

10) Determinar la ecuación y la inclinación de la recta que pasa por el origen y por el punto $Q(-5;\ 4)$.
Resp.: $y = -0{,}8 \cdot x$; $\alpha = 141°20'$

11) Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-2,\ -3)$ y tiene una inclinación de $58°$.
Resp.: $y = 1{,}6 \cdot x + 0{,}2$

12) Determinar la ecuación de la recta que tiene por coeficiente angular 1,5 y por coeficiente de posición -3.
K *Resp.:* $y = 1{,}5 \cdot x - 3$

13) Calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(-5,\ -3)$ y por el punto $B(-2;\ 7)$.
Resp.: $y = 3\frac{1}{3}\ x + \frac{41}{3}$

14) Determinar la ecuación general de la recta que pasa por el punto $P(6,\ -3)$ y tiene una pendiente de $-2, 5$.
Resp.: $5x + 2y - 24 = 0$

15) Determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P(-4,\ -1)$ y $Q(2;7)$.
Resp.: $4x - 3y + 13 = 0$

16) ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(5;7)$ y es paralela a la recta que determinan los puntos $R(-4,\ -1)$ y $S(6,\ -2)$?
Resp.: $y = -0{,}2 \cdot x + 8$

17) Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(5;7)$ y es perpendicu-

lar a la recta que pasa por los puntos:
$R(-4, -1)$ y $S(6, -2)$.
Resp.: $y = 5x - 18$

18) Los extremos de un trazo son los puntos $P(6, -3)$ y $Q(2;7)$. ¿En qué punto corta este trazo al eje de las X?
Resp.: $(4 \frac{4}{5}, 0)$

19) Un trazo está determinado por los puntos $A(-3;5)$ y $B(9, -3)$. Determinar la intersección de este trazo con los ejes coordenados.
Resp.: (0;3), (4,5; 0)

20) Los extremos de un trazo son $A(-8;12)$ y $B(12, -3)$. ¿Cuánto mide el segmento interceptado por los ejes?
Resp.: $d = 0{,}5 \cdot \sqrt{117}$

21) Los extremos de un trazo son $A(-8; 12)$ y $B(12, -3)$. Calcular la razón en que los ejes coordenados dividen a este trazo.
Resp.: 1:2:2

22) Determinar la intersección de la recta que pasa por los puntos $P(1;7)$ y $Q(0;4)$ con la recta que determinan los puntos $R(7;1)$ y $S(10;2)$.
Resp.: $(-2, -2)$

23) Determinar los vértices del triángulo que determinan al cortarse las rectas L_1: $4x - 3y + 13 = 0$, L_2: $5x + 2y - 24 = 0$, L_3: $x + 5y + 9 = 0$.
Resp.: $(-4, -1)$, $(6, -3)$, $(2;7)$

24) Los vértices de un cuadrilátero son: $A(-4, -3)$, $B(6; 3)$, $C(3; 9)$ y $D(-2; 6)$. ¿Qué clase de cuadrilátero es?
Resp.: trapecio, pues $m(\overline{AB}) = m(\overline{CD}) = \frac{3}{5}$

25) Un ángulo está formado por los trazos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$. Si $A(-4, -3)$, $B(6;8)$ y $C(3;9)$, ¿son perpendiculares estos trazos?
Resp.: No, pues $m_1 \cdot m_2 \neq -1$

26) Determinar el ángulo agudo que forman las rectas: $x - 3y = 4$; $y = 3x + 4$
Resp.: 53°8'

27) Los vértices de un cuadrilátero son $A(-4, -3)$, $B(6;3)$, $C(3;9)$ y $D(-2;6)$. Determinar las coordenadas del punto de intersección de sus diagonales y el ángulo obtuso que forman.
Resp.: $(\frac{2}{3}, 5)$; 99°42'

28) Desde el punto $C(3;9)$ se traza la perpendicular al trazo determinado por los puntos $A(-4, -3)$ y $B(6;3)$. ¿Cuánto mide esta perpendicular? ¿Cuál es la ecuación de esta perpendicular?
Resp.: $d = \frac{39}{\sqrt{34}}$; $y = -\frac{5}{3}x + 14$

29) a) ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(10, -2)$ y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos $A(-2, -3)$ y $B(7;4)$? b) ¿Cuáles son las coordenadas del pie de la perpendicular? c) ¿Cuál es la ecuación de la recta paralela a $\overline{AB}$ por el punto P?
Resp.: a) $9x + 7y - 76 = 0$; b) $(\frac{155}{26}, \frac{83}{26})$;
c) $7x - 9y - 88 = 0$

30) Una recta L_1 corta a los ejes coordenados de un sistema en los puntos $A(0;6)$ y $B(5;0)$. Otra recta L_2 los corta en los puntos $C(0; -4)$ y $D(2;0)$. Determinar:
a) $L_1 \cap L_2$; b) $\measuredangle(L_1, L_2)$
Resp.: a) $(3 \frac{1}{8}, 2\frac{1}{4})$; b) 66°23'

31) Los vértices de un polígono convexo son $A(-3, -2)$, $B(7, -4)$, $C(10;4)$, $D(5;7)$ y $E(-5;5)$. Determinar:
a) la ecuación de la diagonal $\overline{AD}$; b) $\measuredangle$ EAB; c) ¿En qué punto corta el lado $\overline{AB}$ al eje de las Y? d) ¿En qué punto corta el lado $\overline{AE}$ al eje de las X? e) ¿En qué punto se cortan las prolongaciones de los lados $\overline{ED}$ y $\overline{BC}$? f) ¿En qué razón corta el eje de las Y al lado $\overline{DE}$?
Resp.: a) $9x - 8y + 11 = 0$; b) 117°15';
c) (0; −2,6); d) $(-3\frac{4}{7}; 0)$ e) (11,62; 832);
f) 1 : 1.

32) Los vértices de un trapezoide son $Q(-5;6)$, $R(-3, -4)$, $S(6, -2)$ y $T(5; 5)$. Calcular:
a) si BC // AD; b) si son perpendiculares las diagonales; c) el ángulo que forma $\overline{AC}$ con $\overline{BD}$.
Resp.: a) no, pues $m_1 = \frac{9}{8}$, $m_2 = -\frac{8}{11}$;
b) no, pues $m_1 \cdot m_2 \neq -1$; c) 84°23'

33) Los vértices de un cuadrilátero son A(−6, −3), B(4, −2), C(7; 4) y D(−2; 1). Calcular: a) su perímetro; b) su área; c) la longitud de sus diagonales; d) el ángulo obtuso que forman las diagonales; e) coordenadas del punto de intersección de las diagonales.

Resp.:

a) (=) 31,82; b) 37,5; c) $\overline{AC}$ = 14,76; $\overline{BD}$ = 6,70; d) 125°8'; e) ($-\frac{2}{9}, \frac{1}{9}$).

34) Los vértices del △ ABC son A(−2, −5), B(6, −1) y C(−4; 7). Demostrar que las tres transversales de gravedad de este triángulo se cortan en un mismo punto, es decir, son concurrentes en el centro de gravedad del triángulo.

Solución: Primeramente se determinan las coordenadas de los puntos medios de los lados obteniéndose (Fig. 11):

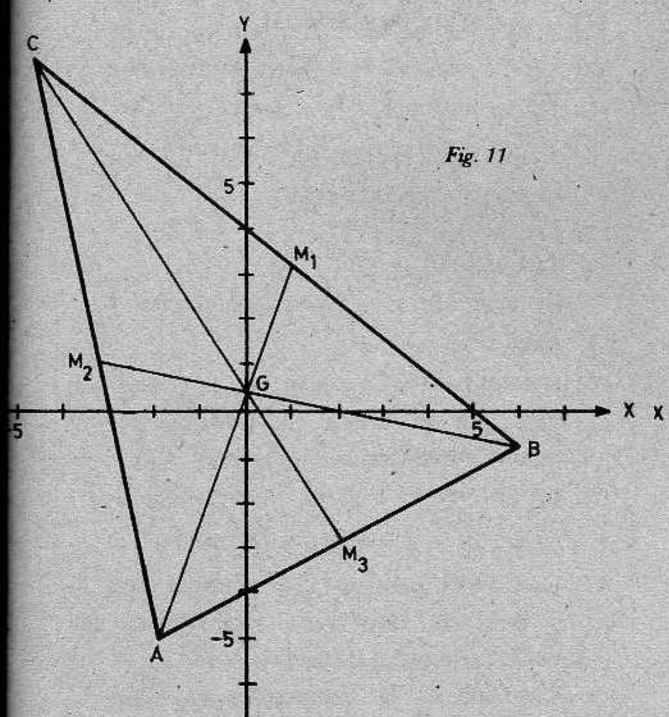


Fig. 11

M_1 (1; 3), M_2 (−3; 1) y M_3(2, −3).

En seguida, se determinan las ecuacione de las rectas $\overleftrightarrow{AM_1}$, $\overleftrightarrow{BM_2}$ y $\overleftrightarrow{CM_3}$:

$\overleftrightarrow{AM_1}$: $\frac{y+5}{x+2} = \frac{3+5}{1+2}$ de donde

I) $8x - 3y = -1$

$\overleftrightarrow{BM_2}$: $\frac{y+1}{x-6} = \frac{1+1}{-3-6}$ de donde

II) $2x + 9y = 3$

$\overleftrightarrow{CM_3}$: $\frac{y-7}{x+4} = \frac{-3-7}{2+4}$ de donde

III) $5x + 3y = 1$

Se resuelve el sistema formado por dos de estas ecuaciones y su solución se sustituye en la tercera ecuación. Si la convierten en una identidad, quiere decir que las tres transversales son concurrentes en este punto.

En este ejemplo, conviene tomar la ecuación I y la III, obteniéndose el sistema:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I)} & 8x - 3y = -1 \\ \text{III)} & 5x + 3y = 1 \end{array}\right|$$

La solución de este sistema es: $x = 0$; $y = \frac{1}{3}$. Al sustituir estos valores en la ecuación II) resulta: $2 \cdot 0 + 9 \cdot \frac{1}{3} = 3$ de donde: $3 = 3$.

Llegamos a una identidad; por lo tanto, las tres transversales de gravedad se cortan en G(0; $\frac{1}{3}$)

35) Demostrar que en el △ ABC del problema anterior las tres simetrales de los lados son concurrentes (el punto de concurrencia es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo).

Solución: Primeramente se determinan las coordenadas de los puntos medios M_1, M_2 y M_3 (ya determinados en el problema anterior).

En seguida, se determina la pendiente de cada lado obteniéndose: para $\overline{AB}$: $m_1 = \frac{1}{2}$ de donde: $m_2 = -2$. Por lo tanto, la ecuación de la recta perpendicular a $\overline{AB}$ en M_3 es:

$\frac{y+3}{x-2} = -2 \Rightarrow$ I) $2x + y = 1$. En forma análoga se obtienen para $\overline{BC}$; $m_1 = -\frac{4}{5}$ de donde: $m_2 = \frac{5}{4}$; la recta perpendicular en M_1 es: $\frac{y-3}{x-1} = \frac{5}{4} \Rightarrow$ II) $5x - 4y = -7$.

Para $\overline{AC}$ resulta $m_1 = -6$, $m_2 = \frac{1}{6}$. Perpendicular en M_2: III) $x - 6y = -9$.

Resolviendo el sistema:

$$\begin{array}{|l} \text{II) } 5x - 4y = -7 \\ \text{III) } x - 6y = -9 \end{array}$$

se obtiene: $x = -\frac{3}{13}$, $y = \frac{19}{13}$. Estos valores satisfacen a la otra ecuación (I).

Por lo tanto, las tres simetrales se cortan en el punto $(-\frac{3}{13}, \frac{19}{13})$.

36) Demostrar que las tres alturas del $\triangle$ ABC del problema anterior son concurrentes.

Solución: Primeramente se determinan las pendientes de cada lado (ya determinadas en los problemas anteriores):

$\overline{AB}$: $m_1 = \frac{1}{2}$ luego: $m_2 = -2$ es la pendiente de la altura que pasa por C. Su ecuación es: I) $2x + y = -1$ (para h_c).

$\overline{BC}$: $m_1 = -\frac{4}{5}$ luego: $m_2 = \frac{5}{4}$ es la pendiente de la altura que pasa por A. Su ecuación es: II) $5x - 4y = 10$ (para h_a).

$\overline{AC}$: $m_1 = -6$, luego: $m_2 = \frac{1}{6}$ que es la pendiente de la altura que pasa por B. Su ecuación es: III) $x - 6y = 12$ (para h_b).

Resolviendo el sistema formado por dos de estas ecuaciones se obtiene:

$x = \frac{6}{13}$, $y = -\frac{25}{13}$ valores que satisfacen a la tercera ecuación. Por lo tanto, las tres alturas se cortan en el punto $H(\frac{6}{13}, -\frac{25}{13})$ que es el ortocentro del triángulo.

37) Demostrar que son concurrentes las tres simetrales de los lados del triángulo PQR si P $(-5, -4)$, Q $(3, -2)$ y R $(-2; 6)$.

Resp.: Punto inters. $(-\frac{139}{74}, \frac{19}{37})$.

38) Demostrar que son concurrentes las transversales de gravedad del triángulo ABC si A$(-6, -5)$, B$(4, -3)$, C$(-4;3)$.

Resp.: $G(-2, -\frac{5}{3})$.

39) Demostrar que las alturas del triángulo del problema anterior son concurrentes.

Resp.: $H(-\frac{60}{19}, -\frac{23}{19})$.

40) Los vértices de un triángulo son: R$(-5, -2)$, B$(7, -4)$ y T$(-3; 6)$. Demostrar que sus tres simetrales concurren al punto $(1{,}6; 0{,}6)$.

41) Idem. que sus transversales de gravedad concurren al punto $G(-\frac{1}{3}, 0)$.

42) Idem., que sus tres alturas se cortan en el punto $H(-\frac{21}{5}, -\frac{6}{5})$.

43) Los vértices de un triángulo son: A$(-5, -2)$, B$(7, -4)$, C$(-3; 6)$. Calcular el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo. (Ind. guíese por el probl. 35; determine el punto de intersección de dos simetrales, y, después, calcule la distancia de este punto a uno de los vértices).

Resp.: $\odot$ $(1{,}6; 0{,}6)$; $r = 0{,}2 \cdot \sqrt{1256}$

44) ¿Son concurrentes las rectas:

L_1: $8x - 3y + 1 = 0$, L_2: $y = -\frac{2}{9} \cdot x + \frac{1}{3}$, L_3: $5x + 3y = 1$?

Resp.: Sí, en el punto $(0; \frac{1}{3})$.

45) Demuestre que las rectas:

L_1: $3x + 7y - 11 = 0$

L_2: $0{,}2x + 0{,}12y = -1$

L_3: $y = 0{,}5 \cdot x + 9$ son concurrentes.

Resp.: en $(-8; 5)$.

46) Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(2, -3)$ y por el punto de intersección de las rectas:

L_1: $5x - 4y + 7 = 0$, L_2: $x - 6y + 9 = 0$.

Resp.: $2x + y = 1$; $P(-\frac{3}{13}, \frac{19}{13})$.

47) Una recta pasa por los puntos A $(2; 6)$ y B $(5; 9)$. Otra recta está determinada por los puntos C $(2; 1)$ y D $(6, -3)$.

Calcular: a) la intersección de ellas; b) el ángulo que forman; c) ecuación de la recta $\overline{AC}$; d) ecuación de la recta $\overline{BD}$; e) intersección de las rectas $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$; f) inclinación de la recta $\overline{AC}$; g) inclinación de la recta $\overline{BC}$; h) ángulo obtuso que forman $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$.

Resp.: a) $(-0{,}5; 3{,}5)$; b) $90°$; c) $x = 2$; d) $y = -12x + 9$; e) $3\frac{1}{59}$, $3\frac{42}{59}$; f) $90°$; g) $69°30'$; h) $135°20'$.

48) Determinar, por medio del gráfico, la ecuación general de cada una de las rectas L_1, L_2 y L_3. (Figs. 12-13-14). (Indicación: aproveche la »ecuación de segmentos«).
Resp.: $L_1: 4x + 3y - 12 = 0$;
$L_2: 2x - 5y + 10 = 0$; $L_3: 3x + 2y + 6 = 0$.

Fig. 12

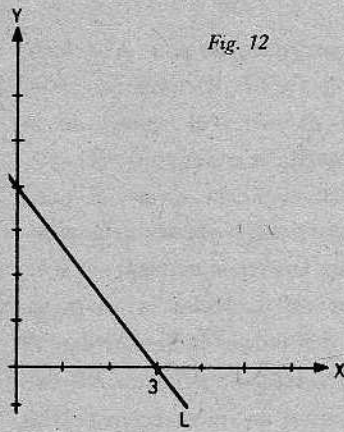


Fig. 13

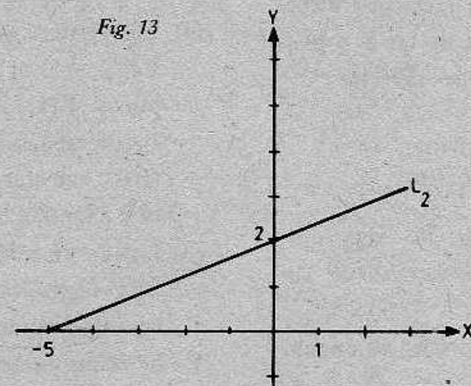
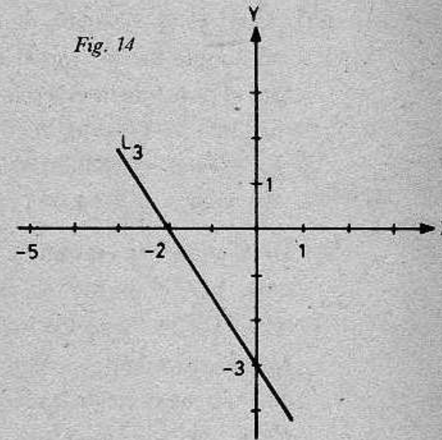


Fig. 14



49) Determinar, por medio del gráfico, la ecuación principal de cada una de las rectas siguientes. (Indicación: en cada caso determine por el gráfico »m« y »n« considerando el signo de la pendiente de acuerdo con la inclinación de la recta) (Figs. 15, 16, 17).

Resp: $L_1: y = -2{,}5 \cdot x + 5$;
$L_2: y = 0{,}5 \cdot x + 2$;
$L_3: y = -0{,}75 \cdot x - 3$.

Fig. 15

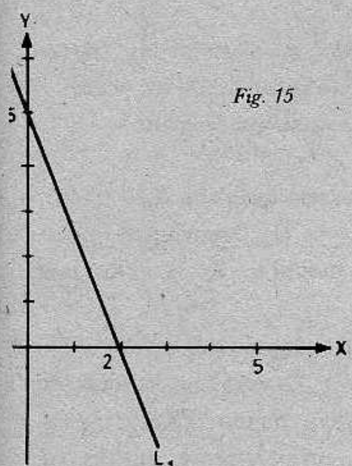


Fig. 16

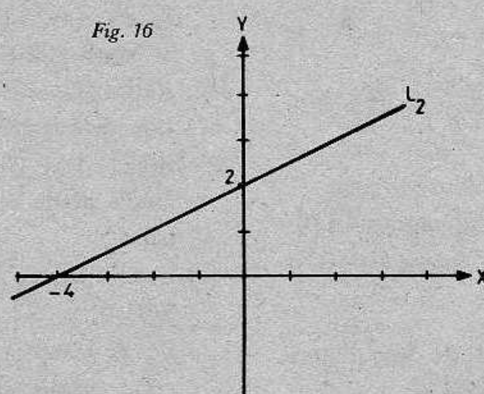
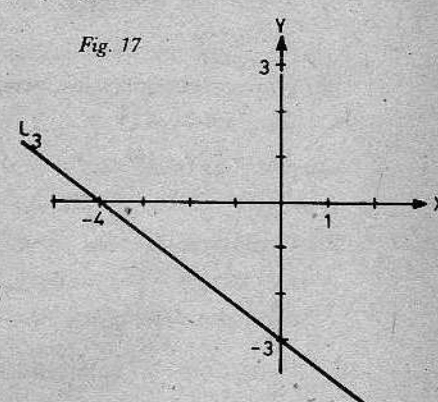


Fig. 17



50) ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por el origen y por el punto (4;6)?
Resp.: $y = 1{,}5 \cdot x$.

51) ¿Qué valor debe tener K en la recta:
$3x - 5Ky + 16 = 0$ para que pase por el punto $(-2, -2)$?
Solución: Basta sustituir en la ecuación de la recta el valor $x = -2$, e $y = -2$ obteniéndose:
$3 \cdot (-2) - 5K(-2) + 16 = 0$ de donde:
$K = -1$.

52) ¿Qué valor debe tener K en la recta $5Kx + 2y - 6 = 0$ para que sea paralela al trazo determinado por $A(-2, -3)$ y $B(4, -5)$?

Resp.: $K = \frac{2}{15}$

53) ¿Qué valor debe tener K en la recta $6 - 2y = 5Kx$ para que sea perpendicular a la recta $3y + x + 11 = 0$?

Resp.: $K = -1{,}2$.

54) ¿Cuál es la ecuación de la recta que tiene una inclinación de 30° y pasa por el punto $(-3, \sqrt{3})$?
Resp.: $\sqrt{3} \cdot x - 3y + 6\sqrt{3} = 0$.

55) ¿Cuál es la ecuación de la recta que forma un ángulo de 60° con el eje de las X y pasa por el punto de intersección de las rectas:
$L_1: 2x + 3y + 6 = 0$;
$L_2: x - 0{,}5 \cdot y - 5 = 0$?
Resp.: $y - \sqrt{3} \cdot x + 4 + 3\sqrt{3} = 0$.

56) Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $L_1: 3x - 5y - 22 = 0$;
$L_2: 6x + 7y - 10 = 0$ y forma un ángulo de 135° con el eje de las X.
Resp.: $y + x - 2 = 0$

57) Una recta pasa por los puntos A(0; 4) y B(1; 7); se corta con otra recta que pasa por los puntos C(7; 1) y D(10; 2). Demostrar si el punto P(5; 5) pertenece o no a la bisectriz del ángulo que forman. (Indicación: determine la distancia del punto a las dos rectas).
Resp.: Sí.

58) ¿Son concurrentes las rectas
$L_1: 3x + 7y - 11 = 0$; $L_2: 5x + 3y + 25 = 0$;
$L_3: x - 2y + 18 = 0$:
Resp.: Sí, en el punto (−8; 5).

59) Demuestre que las rectas $L_1: 4x + 5y = 19$, $L_2: 6x + y + 17 = 0$, $L_3: 2x + y + 1 = 0$ concurren en el punto P(−4; 7).

60) Demuestre la colinealidad de los puntos $(-2, -\frac{5}{3})$, $(4, -3)$ y $(-5, -1)$.

61) Calcular el área del △ PQR si P(−4; 3), $Q(-2, -1\frac{2}{3})$ y R(−1, −4).
¿Qué deduce del resultado?

62) Determinar el ángulo agudo que forma la recta $2x + 9y + 19 = 0$ al cortarse con la recta $7x + 3y + 19 = 0$.
Resp.: 54°18'.

63) Los extremos de un trazo son A(−2, −3) y B(4; 3). ¿Cuál o cuáles de los puntos P(−3; 4), Q(−1; 2) y R(5, −4) pertenecen a la simetral del trazo?
Resp.: los tres.

64) Los vértices de un triángulo son A(−5;0), B(8, −1) y C(1; 6). Demostrar si el punto P(1; 2) es o no el centro de la circunferencia inscrita al triángulo.
(Ind.: calcular la distancia desde el punto P a los tres lados del △ y ver si son iguales).

65) Los vértices de un triángulo son A(−4, −3), B(6; 2) y C(−1; 8). Calcular: a) el punto de intersección del lado $\overline{AB}$ con el eje Y; b) el punto de intersección del lado $\overline{AC}$ con el eje x; c) el punto de intersección del lado $\overline{BC}$ con las X y con las Y; d) determinar la medida de los ángulos del triángulo.

Resp.: a) (0, −1); b) $(-3\frac{2}{11}, 0)$;
c) $(0, 7\frac{1}{7})$, $(8\frac{1}{3}, 0)$; d) $\alpha = 48°11'$,
$\beta = 67°10'$, $\gamma = 64°39'$.

66) ¿En qué punto se cortan las rectas $L_1: 3x - 4y - 17 = 0$, $L_2: 12x + 5y = 26$?
¿Cuánto mide el ángulo que forman?
Resp.: (3, −2); $\delta = 75°45'$.

67) Los vértices de un triángulo son A(−2, −5), B(6, −1) y C(−4; 7). Determinar la distancia desde el punto (−8; 5) a los tres lados.

68) Los vértices de un triángulo son R(−2, −4), S(9; 0) y T(2; 7). Determinar la ecuación de la bisectriz del ángulo TRS. (Indicación: demuestre primeramente que es un triángulo isósceles).
Resp.: $x - y = 2$.

69) Determinar el L.G. de los puntos que equidistan de los extremos del. trazo determinado por A(−1, −5) y B(11; 7).
Resp.: L.G.: $x + y - 6 = 0$.

70) Demostrar que el punto (5; 2) equidista de los lados del ángulo CAB siendo A(−4; 2), B(5, −1) y C(5; 5).

Ecuación normal de una recta. Distancia de un punto a una recta. Ecuación del plano. Ecuación de la bisectriz.

OPTATIVO

490. ECUACION NORMAL DE LA RECTA

Si en la ecuación general de la recta $Ax + By + C = 0$ se hace $y = 0$ se obtiene $x = \overline{OP}$; análogamente, al hacer $x = 0$ se obtiene $y = \overline{OQ}$. Esto nos lleva, como ya vimos anteriormente, a la ecuación de segmentos de la recta (Nº 484) (Fig. 1).

A) $\frac{x}{\overline{OP}} + \frac{y}{\overline{OQ}} = 1$

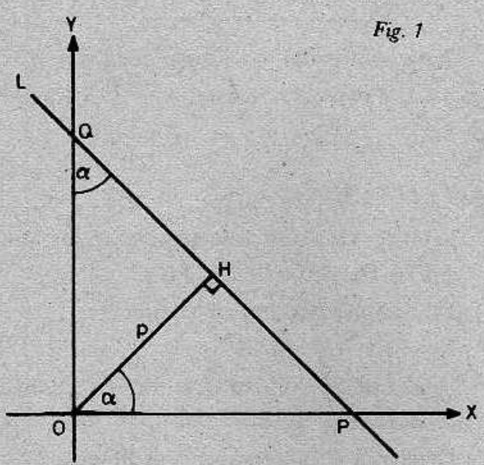


Fig. 1

La normal (perpendicular) $\overline{OH} = p$ desde el origen a la recta L forma con el eje de las abscisas X el ángulo α. Con esto se obtienen los siguientes valores para los segmentos $\overline{OP}$ y $\overline{OQ}$ recordando que $\measuredangle POH = \measuredangle PQO = \alpha$ (pues son ángulos de lados perpendiculares):

$$\overline{OP} = \frac{p}{\cos\alpha} \; ; \overline{OQ} = \frac{p}{\operatorname{sen}\alpha}$$

Al sustituir estos valores en A) resulta:

$$\boxed{x \cdot \cos\alpha + y \cdot \operatorname{sen}\alpha = p} \qquad \text{(XIX)}$$

Esta ecuación se llama *ecuación normal de la recta.*

491. EJERCICIOS

1) ¿Cuál es la ecuación normal de la recta si la perpendicular desde el origen a ella mide $2\sqrt{3}$, y forma un ángulo de 30° con las X?

Solución: Se tiene $p = 2\sqrt{3}$, $\alpha = 30°$, $\operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}$, $\cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Por lo tanto, al aplicar la ecuación anterior, se obtiene:

$$x \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + y \cdot \frac{1}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} \cdot x + y = 4\sqrt{3}$$

¡Dibújela Ud.!

2) Una recta corta a los ejes coordenados en los puntos A(15; 0) y B(0; 20). Determinar su ecuación normal.

Resp.: $0{,}8 \cdot x + 0{,}6 \cdot y = 12$

3) La ecuación de segmentos de una recta es $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$. ¿Cuál es su ecuación normal?

Resp.: $\frac{4}{5} \cdot x + \frac{3}{5} \cdot y = \frac{12}{5}$

4) Una recta corta a los ejes coordenados determinando un trazo de 13 unidades. La menor distancia desde el origen a este trazo es 6 unidades. ¿Cuál es la ecuación normal de la recta?

Resp.: $3x + 2y = 6\sqrt{13}$.

OPTATIVO

492. DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

Ya hemos calculado anteriormente esta distancia (Nº 488). Ahora, aprovecharemos la ecuación normal de la recta.

Sea el punto P_0 (x_0, y_0); »d« la distancia desde este punto a la recta L; además, $\overline{OH} = p$.

La proyección de x_0 sobre »p« es $\overline{OF} = u$; la proyección de y_0 sobre »d« es $\overline{P_0E} = v$. Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} u = x_0 \cdot \cos\alpha \\ v = y_0 \cdot \operatorname{sen}\alpha \end{array}\right\} +$$

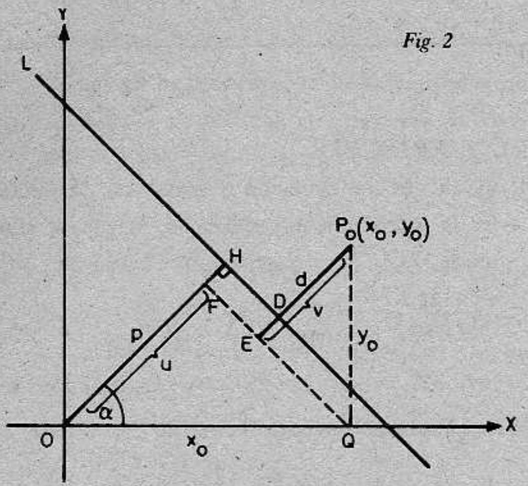


Fig. 2

$u + v = x_0 \cdot \cos\alpha + y_0 \cdot \operatorname{sen}\alpha$

pero: $u + v = p + d$

Luego: $p + d = x_0 \cdot \cos\alpha + y_0 \cdot \operatorname{sen}\alpha$

de donde:

$$\boxed{d = x_0 \cdot \cos\alpha + y_0 \cdot \operatorname{sen}\alpha - p} \qquad \text{(xx)}$$

OPTATIVO

493. ECUACION DEL PLANO

Una ecuación de primer grado con tres incógnitas representa en el espacio (R^3) un plano que corta a los tres ejes coordenados de un sistema ortogonal tridimensional:

$$\boxed{Ax + By + Cz = k} \qquad \text{(xxi)}$$

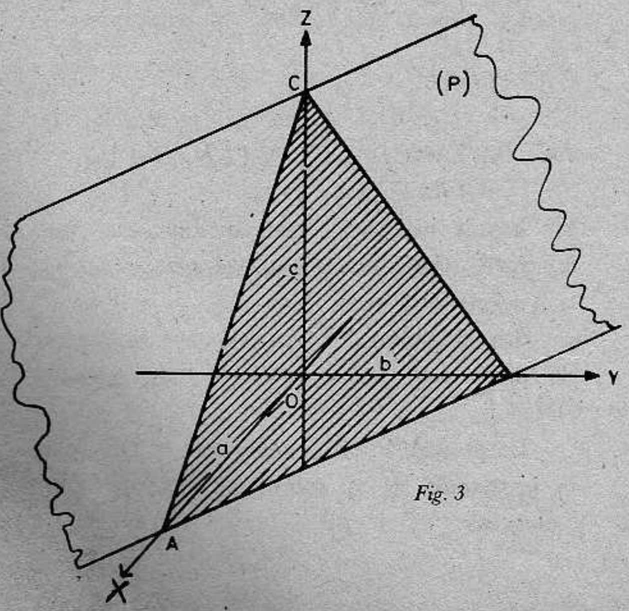


Fig. 3

En efecto:

si $y = 0$, $z = 0$ se obtiene: $x = \frac{k}{A} = a \Rightarrow A(a, 0, 0)$

si $x = 0$, $z = 0$ se obtiene: $y = \frac{k}{B} = b \Rightarrow B(0, b, 0)$

si $x = 0$, $z = 0$ se obtiene: $z = \frac{k}{C} = c \Rightarrow C(0,0,c)$.

Obtenemos de esta manera tres puntos del espacio que bastan para determinar un plano (P).

Si la ecuación anterior (xxi) se divide por k, resulta:

$$\frac{Ax}{k} + \frac{By}{k} + \frac{Cz}{k} = 1$$

$$\frac{x}{\frac{k}{A}} + \frac{y}{\frac{k}{B}} + \frac{z}{\frac{k}{C}} = 1$$

de donde:

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{x}{c} = 1} \qquad \text{(xxii)}$$

Esta expresión se llama *ecuación de segmentos del plano* en la cual $a = \overline{OA}$, $b = \overline{OB}$, $c = \overline{OC}$.

494. EJERCICIOS

1) Dibujar el plano que pasa por los puntos A(2, 0, 0), B(0,6,0) y C(0,0,8).
2) Dibujar el plano cuya ecuación es: $5x + 6y + 8z = 24$.
3) ¿Qué plano representa en el espacio la ecuación: $3y + 4z = 12$?
4) Determinar la ecuación del plano que pasa por los puntos A(4, 0, 0,), B(0, 3, 0) y C(0, 0, 8).
   Resp.: $6x + 8y + 3z = 24$.
5) Determinar la »cota« del punto: P(2; 4; z) para que pertenezca al plano $5x - 3y + 2z = 20$.
   Resp.: $z = 11$.
6) Dibujar el plano cuya ecuación es: $5x - 6y + 15z = 30$.
7) Dibujar el plano cuya ecuación es: $3x - 8y - 6z = 24$.
8) Verifique cuáles de los siguientes puntos pertenecen o no al plano: $6x + 4y + 9z = 36$.
   P_1 (0, 0, 4), P_2 (1; 0,75; 3),
   P_3 (2; −3; 4), P_4 (−3; 9; 2),
   P_5 (5; 3; −1).
   Resp.: todos menos P_5.

9) ¿Cuál es la ecuación, en el espacio, del plano (YZ)?

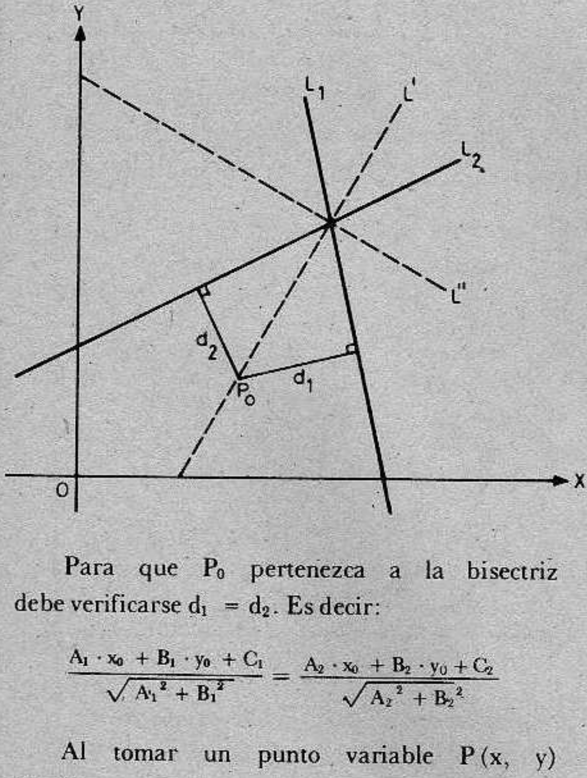
OPTATIVO

495. ECUACION DE LA BISECTRIZ

Consideremos un punto P_0 (x_0, x_0) de una de las bisectrices del ángulo formado por las rectas L_1 y L_2 cuyas ecuaciones normales se conocen. Entonces, las distancias de este punto a las rectas son:

$$d_1 = \frac{A_1 \cdot x_0 + B_1 \cdot y_0 + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}$$

$$d_2 = \frac{A_2 \cdot x_0 + B_2 \cdot y_0 + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$



Para que P_0 pertenezca a la bisectriz debe verificarse $d_1 = d_2$. Es decir:

$$\frac{A_1 \cdot x_0 + B_1 \cdot y_0 + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{A_2 \cdot x_0 + B_2 \cdot y_0 + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

Al tomar un punto variable $P(x, y)$ resulta:

$$\boxed{\frac{A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}}$$

Esta es la ecuación de la bisectriz de uno de los ángulos que forman las rectas. Al considerar el signo de las raíces, se obtiene $d_1 = \pm d_2$. Con esto se obtienen las ecuaciones de las dos bisectrices que son:

$$\frac{A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} - \frac{A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = 0 \qquad \textbf{(XXIII)}$$

$$\frac{A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} + \frac{A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = 0 \qquad \textbf{(XXIV)}$$

496. EJERCICIOS

1) Determinar las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos que forman las rectas: $L_1: 4x - 11y - 36 = 0$, $L_2: 11x - 4y + 6 = 0$.
Resp.: $L': x - y - 2 = 0$, $L'': x + y + 6 = 0$.

2) Dos rectas al cortarse forman un ángulo cuyo vértice es el punto $P(-2; 8)$. Si la ecuación de una de las bisectrices es: $L': x + y - 6 = 0$, ¿cuál es la bisectriz del otro ángulo que forman las rectas?
Resp.: $L'': x - y + 10 = 0$

3) Determinar la ecuación de la bisectriz del ángulo agudo que forman al cortarse las rectas $L_1: x + 3y - 2 = 0$,
$L_2: x - 3y + 10 = 0$.
Resp.: $y = 2$.

4) Determinar las ecuaciones de las bisectrices de los ángulos que forman al cortarse las rectas $L_1: x - 2y - 2 = 0$,
$L_2: 11x - 3y + 35 = 0$.
Verifique el resultado que encuentre para el punto de intersección de las rectas.
Resp.: $P(-4, -3)$;
$L': (11 - \sqrt{26})\, x + (2\sqrt{26} - 3)\, y + 35 + 2\sqrt{26} = 0$.

5) Determinar una ecuación de la bisectriz de uno de los ángulos formados por las rectas:
$L_1: x - 2y - 2 = 0$,
$L_2: 6x + 7y - 50 = 0$.
Compruebe su resultado para el vértice del ángulo.
Resp.: $P(6; 2)$.
$L': (\sqrt{17} - 6) \cdot x - (2\sqrt{17} + 7) \cdot y + 50 - 2\sqrt{17} = 0$.

6) Determinar la ecuación de la bisectriz del ángulo formado por las rectas:
$L_1: 6x + 7y - 50 = 0$, $L_2: 11x - 3y + 35 = 0$.

Compruebe su resultado para el punto de intersección de las rectas.

Resp.: P(−1; 8).

L': $(6\sqrt{26} - 11\sqrt{17})x + (7\sqrt{26} + 3\cdot\sqrt{17})\cdot y - 5\cdot(10\sqrt{26} + 7\sqrt{17}) = 0$.

7) Se dan las rectas $L_1: 3x + 4y = 12$, $L_2: 5x - 12y = 60$.
Determinar: a) su punto de intersección; b) la ecuación de las bisectrices; c) ¿a cuál de las bisectrices pertenece el punto (8; 7)?

Resp.: a) $\left(\frac{48}{7}, -\frac{15}{7}\right)$;
b) L': $7x + 56y + 72 = 0$ (ángulo agudo);
L'': $8x - y - 57 = 0$ (ángulo obtuso; c) a la del ángulo obtuso.

8) Determinar la ecuación de la bisectriz del ángulo que forman las rectas que pasan por los puntos A (7; 1), B (10; 2) y C (1; 7), D (0; 4), respectivamente.

Resp.: L': y = x; ¿cuál es la otra?

44ª UNIDAD

La circunferencia. Ecuación general y ecuación canónica. Discusión de la ecuación general de la circunferencia.

---

497. *ECUACION DE LA CIRCUNFERENCIA*

Para determinarla basta calcular la distancia entre su centro y un punto de ella. Siendo C(u,v) el centro de la circunferencia de radio »r« y P(x,y) un punto cualquiera de ella, la distancia entre C y P, según la fórmula I, es: (Nº 470).

$$r = \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}$$

o bien:

$$\boxed{(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2} \qquad \text{(XXV)}$$

Esta es la ecuación de la circunferencia de centro C(u,v) y radio »r« (Fig. 1).

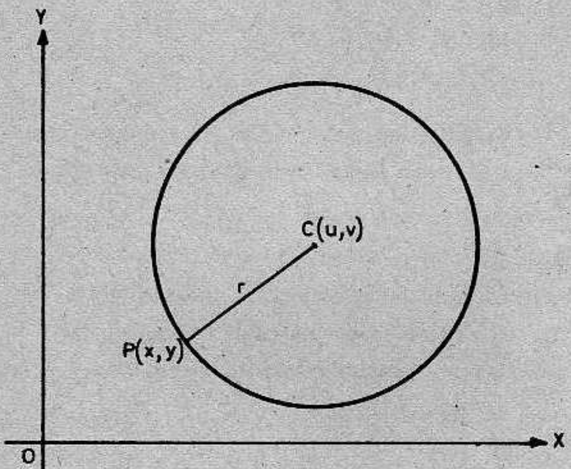


Fig. 1

Si el centro de la circunferencia coincide con el origen 0 del sistema de coordenadas, es decir, si u = 0, v = 0, se obtiene la ecuación:

$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2} \qquad \text{(XXVI)}$$

Al desarrollar la ecuación XXV se obtiene:

$$\boxed{x^2 + y^2 - 2ux - 2vy + u^2 + v^2 - r^2 = 0} \qquad \text{(XXVII)}$$

A esta ecuación se le llama *ecuación general de la circunferencia;* en cambio, a la ecuación XXV se le llama *ecuación canónica.*

Se presentan dos problemas por resolver:

a) conocidas las coordenadas (u, v) del centro C y el radio »r«, determinar la ecuación de la circunferencia.

Ejemplo: 1) Si C(−3;5) y r = 10, la ecuación de esta circunferencia es:

$(x+3)^2 + (y-5)^2 = 100$ (ecuación canónica).

o bien: $x^2 + y^2 + 6x - 10y - 66 = 0$ (ecuación general; se obtiene desarrollando y ordenando la ecuación canónica).

b) conocida la ecuación de la circunferencia, determinar las coordenadas del centro y su radio.

Si se da la ecuación canónica el problema se resuelve fácil y rápidamente.

Ejemplo 2) Determinar el radio y las coordenadas del centro de la circunferencia $(x+6)^2 + (y-3)^2 = 64$.

De esta ecuación se obtiene inmediatamente: $u = -6$, $v = 3$, $r = 8$. No es tan fácil cuando se da la ecuación general.

Ejemplo 3) Determinar el centro y el radio de la circunferencia:

$$x^2 + y^2 - 10x + 6y + 30 = 0.$$

Para obtener de esta ecuación lo que se pide debemos completar los cuadrados $(x-u)^2$ e $(y-v)^2$.

Se ordena, primeramente, del modo siguiente:

$$\underbrace{x^2 - 10x} + \underbrace{y^2 + 6y} + 30 = 0$$

(para completar el primer *cuadrado* se suma y resta 25; para completar el otro cuadrado se suma y resta 9).

Se obtiene:

$$\underbrace{x^2 - 10x + 25}_{(x-5)^2} - 25 + \underbrace{y^2 + 6y + 9}_{(y+3)^2} - 9 + 30 = 0$$

$$(x-5)^2 \quad -25 + \quad (y+3)^2 \quad - 9 + 30 = 0$$

Finalmente, de aquí obtenemos:

$$(x-5)^2 + (y+3)^2 = 4.$$

Por lo tanto: $r = 2$; $u = 5$, $v = -3 \Longrightarrow C(5, -3)$

Más atrás vimos que al desarrollar la forma canónica $(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$ se obtiene la forma general:

$$x^2 + y^2 - 2ux - 2vy + u^2 + v^2 - r^2 = 0.$$

Ahora, si se designa $D = -2u$, $E = -2v$, $F = u^2 + v^2 - r^2$ se obtiene otra manera de expresar la ecuación general de la circunferencia:

$$\boxed{x^2 + y^2 + D \cdot x + E \cdot y + F = 0} \qquad \text{(XXVIII)}$$

De las designaciones anteriores obtenemos, también:

$$u = -\frac{D}{2},\ v = -\frac{E}{2},\ r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4 \cdot F}$$

Con esto la ecuación canónica puede, asimismo, expresarse en la forma:

$$\boxed{\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = r^2} \qquad \text{(XXIX)}$$

El ejemplo anterior lo podemos resolver por este camino obteniendo:

$$\left.\begin{array}{l} D = -10 \text{ de donde: } u = -\frac{-10}{2} = 5 \\ E = 6 \text{ de donde: } v = -\frac{6}{2} = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow C(5, -3)$$

por otra parte:

$$r^2 = \frac{(-10)^2 + 6^2 - 4 \cdot 30}{4} = 4 \text{ de donde:}$$

$r = 2$.

Entonces, la ecuación canónica es:

$(x-5)^2 + (y+3)^2 = 4$.

498. *DISCUSION DE LA ECUACION GENERAL DE LA CIRCUNFERENCIA*

$$x^2 + y^2 + D \cdot x + E \cdot y + F = 0$$

1) Si $D = E = F = 0$ se obtiene: $x^2 + y^2 = 0$.

Esta ecuación se satisface para $x = y = 0$; es decir, corresponde al punto $(0,0)$ que es el origen.

2) Si $r^2 > 0$ la ecuación corresponde a la circunferencia de centro $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ y radio $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4 \cdot F}$.

3) Si $D = E = 0$ y $r^2 < 0$, significa que $x^2 + y^2 < 0$ lo que no puede existir pues $\forall x \wedge \forall y$ se tiene $x^2 \geq 0$ e $y^2 \geq 0$. Por lo tanto, no existe ningún punto que satisfaga $x^2 + y^2 = -r^2$ lo que conduce al conjunto vacío.

4) Si $x^2 + y^2 = r^2$ implica que $D = 0$, $E = 0$. En este caso el radio de la circunferencia es »r« y tiene por centro el origen del sistema. Se llama »ecuación central«.

499. *EJERCICIOS*

1) Determinar el radio de las siguientes circunferencias:
   a) $x^2 + y^2 = 1$
   b) $x^2 + y^2 = 3$
   c) $4x^2 + 4y^2 = 9$
   d) $2x^2 + 2y^2 = 3$
   e) $a^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2 = c^2$.

2) Indicar el dominio y el rango de las circunferencias:
   a) $x^2 + y^2 = 9$
   b) $5x^2 + 5y^2 = 10$
   c) $\frac{2}{3} x^2 + \frac{2}{3} \cdot y^2 = 8$.

3) Escribir la ecuación de las circunferencias que tienen su centro en el origen y por radio:
   a) 8 b) $2\sqrt{2}$ c) $\frac{2}{3}\sqrt{3}$
   d) 0.

4) Escribir la ecuación de las siguientes circunferencias de las cuales se da el radio y las coordenadas del centro. Dibujarlas.
   a) $C(-2, -3)$; $r = 4$
   b) $C(4, -2)$; $r = \sqrt{3}$
   c) $C(\sqrt{2}, \sqrt{3})$; $r = \sqrt{5}$
   d) $C(-3; 5)$; $r = 2$
   e) $C(-1; -1)$; $r = 1$
   f) $C(-3, -4)$; $r = 5$.

5) Determinar el radio y las coordenadas del centro de las siguientes circunferencias; además, dibujarlas.
   a) $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 9$
   b) $(x+\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 5$
   c) $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 14 = 0$
   d) $16x^2 + 16y^2 + 16x - 8y - 123 = 0$

e) $x^2 - 10x + y^2 - 4y + 20{,}9 = 0$

f) $25(x+8)^2 + 25(y+2)^2 = 961.$

6) ¿Cuál es la ecuación general de la circunferencia de centro: $(-2;5)$ y radio $3\sqrt{2}$?

Resp.: $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 11 = 0.$

7) Determinar el radio y el centro de la circunferencia:

$x^2 + y^2 - 6x + 8y - 264 = 0$

Resp.: $(3, -4)$; $r = 17.$

8) ¿Cuál es la forma canónica de la circunferencia:

$x^2 + y^2 + 4x - 10y + 11 = 0$?

Resp.: $(x+2)^2 + (y-5)^2 = 18.$

9) ¿Cuál es el centro, el radio y la forma canónica de la circunferencia

$x^2 + y^2 - 4x - 10y + 24 = 0$?

Resp.: $C(2;5)$ $r = \sqrt{5}$; $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 5.$

10) Calcular la distancia entre los centros de las circunferencias:

$C_1: x^2 + y^2 - 6x - 2y - 6 = 0;$

$C_2: x^2 + y^2 - 12x + 4y + 31 = 0.$

Resp.: $d = 3\sqrt{2}.$

11) Se tienen las circunferencias:

$C_1: x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0;$

$C_2: x^2 + y^2 - 14x + 2y + 41 = 0.$

¿Cuál o cuáles de los siguientes puntos pertenecen a ambas circunferencias?

$A(7;2)$, $B(-1;2)$, $C(3;6)$, $D(7,-4)$, $E(7,-1)$

Resp.: sólo A.

12) Se tienen las circunferencias:

$C_1: (x-3)^2 + (y-2)^2 = 16;$

$C_2: (x-7)^2 + (y+1)^2 = 9.$

a) ¿Son secantes? b) ¿Se cortan ortogonalmente?

(Indicación: 1°) determinar el punto de intersección P de ellas resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones; 2°) determinar la pendiente de los radios que parten de P; 3°) verifique si $m_1 = \frac{-1}{m_2}$).

Resp.: a) sí; b) $P'(7;2)$; $P''\left(\frac{103}{25}, -\frac{46}{25}\right)$.

13) ¿Cuál es el L.G. de los puntos que están a 4 unidades de longitud del punto $C(-2;5)$?

Resp.: es la circunferencia:

$x^2 + y^2 + 4x - 10y + 13 = 0.$

14) Determinar la ecuación de la tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ en el punto $(3,4)$ de ella.

Resp.: $3x + 4y = 25.$

15) ¿Cuál es el centro de la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 43 = 0$?

¿Cuál es la ecuación de la tangente en el punto $(1;4)$ de ella?

Resp.: $(3; -4)$; $x - 4y + 15 = 0.$

16) Determinar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(3,-4)$, $B(2,-5)$ y $C(2,-4)$.

Solución: La ecuación es $(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2.$

Debemos determinar los valores de u, v, r; para esto se sustituyen en la ecuación anterior las coordenadas de los puntos dados:

para el punto A: $(3-u)^2 + (-4-v)^2 = r^2$
para el punto B: $(2-u)^2 + (-5-v)^2 = r^2$
para el punto C: $(2-u)^2 + (-4-v)^2 = r^2$

La resolución de este sistema conduce a los valores:

$u = \frac{5}{2}$, $v = -\frac{9}{2}$, $r^2 = \frac{1}{2}$

Con esto, la ecuación es:

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

o bien: $x^2 + y^2 - 5x + 9y + 26 = 0$

17) Determinar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(9;4)$, $B(3;4)$ y $C(9,-2)$.

Resp.: $x^2 + y^2 - 12x - 2y + 19 = 0.$

18) Una circunferencia pasa por los puntos $A(6;5)$, $B(-2;7)$ y $C(-4;-1)$. Determinar su centro, su radio y su ecuación general.

Resp.: $(1;2)$; $r = \sqrt{34}$;

$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 29 = 0.$

19) Determinar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $(5;4)$ y es tangente al eje de las Y en el punto $y = 2$.

Resp.: $(x-2{,}9)^2 + (y-2)^2 = 8{,}41.$

20) Determinar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $(3;2)$ y es tangente a la Y en $y = 2$.

Resp.: $(x-1{,}5)^2 + (y-2)^2 = 2{,}25.$

21) Determinar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto (2;3) y es tangente al eje de las ordenadas en y = 1.
Resp.: $(x-2)^2+(y-1)^2 = 4$.

22) a) ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia de centro (4, −3) si es tangente al eje de las ordenadas? b) ¿Cuál es la intersección de esta circunferencia con las abscisas?
Resp.: a) $x^2+y^2-8x+6y+9 = 0$
b) $(4+\sqrt{7};0) \wedge (4-\sqrt{7};0)$.

23) La ecuación de una circunferencia tangente al eje de las abscisas es
$x^2+y^2-8x+6y+16 = 0$.
a) ¿Cuál es su centro?; b) ¿su radio?; c) ¿su intersección con el eje de las Y?
Resp.: a) (4, −3); b) r = 3; c) ϕ.

24) ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia de centro (4;3) y que pasa por el origen?
Resp.: $x^2+y^2-8x-6y = 0$.

25) Una circunferencia de radio 5 unidades tiene por centro (4;3). Calcular la intersección de esta circunferencia con los ejes.
Resp.: (0,0); (0;6); (8;0).

26) Determinar el centro, el radio y la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A(4, −1), B(−2, −5) y C(5;4).
Resp.: (−3;3); $r = \sqrt{65}$;
$(x+3)^2+(y-3)^2 = 65$.

27) Saque los datos de la figura adjunta y calcule (Fig. 2):

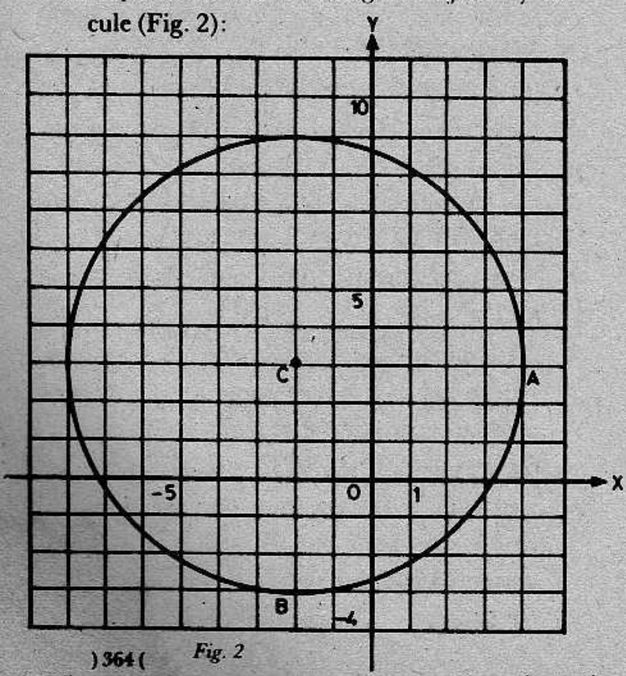


Fig. 2

a) la ecuación general de la circunferencia dibujada;
b) la ecuación de la tangente en el punto A;
c) la ecuación de la tangente en el punto B.
Resp.: a) $x^2+y^2+4x-6y-23 = 0$
b) x = 4; c) y = −3.

28) Determinar las intersecciones de la circunferencia de centro (−4;5) y radio $2\sqrt{10}$ con la recta que pasa por los puntos A(0;9) ∧ B(3;0)
Resp.: $L \cap \odot = \{(2;3), (-0{,}4; 10{,}2\}$.

29) Se da la circunferencia $x^2+y^2-2x+6y+5 = 0$. Calcular la ordenada de un punto de ella si su abscisa vale 2.
Resp.: $y_1 = -1$; $y_2 = -5$.

30) Determinar la intersección de la circunferencia de centro C(1, −3) y radio $\sqrt{5}$ con la recta x = 2.
Resp.: $L \cap \odot = \{(2,-1),(2,-5)\}$.

31) Determinar la intersección de la circunferencia de centro $C_1(-4;5)$ y radio $2\sqrt{10}$ con la circunferencia de centro $C_2(1;-2)$ y radio $\sqrt{26}$.
Resp.: $C_1 \cap C_2 = \{(2;3), (-\frac{170}{37}; -\frac{49}{37})\}$

32) Determinar la ecuación general de la circunferencia de centro C(4; −2) y que es tangente al eje de las ordenadas.
Resp.: $x^2+y^2-8x+4y+4 = 0$.

33) Una circunferencia que es tangente al eje de las Y tiene por centro (4; −2). Calcular la intersección de esta circunferencia con el eje de las abscisas.
Resp.: $X \cap \odot = \{(0{,}54;0), (7{,}46;0)\}$.

34) Calcular el área comprendida entre las circunferencias:
$C_1: x^2+y^2-8x+4y+16 = 0$,
$C_2: x^2+y^2-4x+2y-20 = 0$
Resp.: área = 21π.

35) Calcular la longitud de la cuerda que la recta y = 6 − x determina al cortar a la circunferencia de centro (2, −1) y radio 5.
Resp.: $d = 5\sqrt{2}$.

36) Una circunferencia pasa por los puntos A(2;4), B(6;2) y C(7; −1). Determinar la

ecuación de la tangente a esta circunferencia en el punto B.

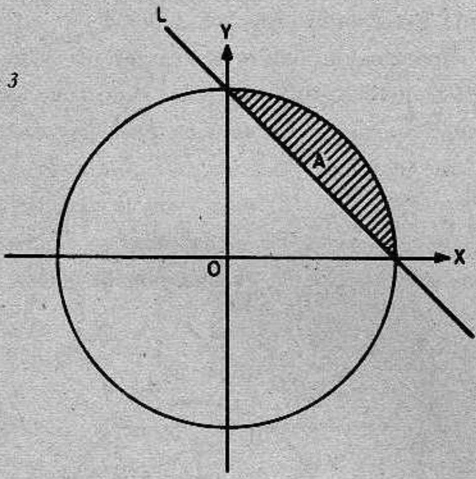
Resp.: $4x + 3y - 30 = 0$.

37) ¿Cuál es la ecuación y la inclinación de la tangente común a las circunferencias de centro C_1 (3;2) con radio $3\sqrt{2}$ y a la circunferencia C_2 (8; −3) con radio $2\sqrt{2}$?

Resp.: $x - y = 7$; $\alpha = 45°$.

38) Calcular (Fig. 3) el área del segmento circular A determinado por la circunferencia $x^2 + y^2 = 49$ y la recta $x + y - 7 = 0$.

Fig. 3



(Considere $\pi = \frac{22}{7}$).

Resp.: A = 14.

39) Calcular: a) el radio de la circunferencia de centro (−8, −2) que es tangente a la recta L: $3x - 4y - 15 = 0$; b) las coordenadas del punto de tangencia; c) la ecuación de la circunferencia.

(Indicación: 1°) calcular la distancia d = r del centro a la recta; 2°) determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto (−8; −2) y es perpendicular a L; 3°) resolver el sistema formado por la ecuación de esta perpendicular y la de la recta L).

Resp.: a) $r = 6\frac{1}{5}$; b) (−4,28; −6,96);

c) $25(x+8)^2 + 25(y+2)^2 = 961$

40) El centro de una circunferencia es (3;2) y su radio $3\sqrt{2}$; el centro de otra circunferencia es (4;1) y su radio $2\sqrt{2}$. Demostrar: a) que el punto de intersección de estas circunferencias y sus centros son puntos colineales; b) que la ecuación de la tangente común a ellas es: $x - y - 7 = 0$.

Repaso: concepto de función, dominio y rango.

500. Recordaremos sucintamente estos conceptos ya estudiados en Algebra. Supongamos que un operario gana \$10 por hora de trabajo al día más \$5 de bonificación diaria para locomoción, permitiéndosele trabajar un máximo de 8 horas diarias, sin considerar las fracciones de horas.

Entonces, al designar por »y« lo que gana al día y por »x« las horas diarias que trabaja, se obtiene la ecuación:

$y = 10 \cdot x + 5.$

Es obvio que lo que gane al día *dependerá* de las horas que trabaje. Por lo tanto, en este caso, la »x« es la *variable independiente* y la »y«, es la *variable dependiente*. Además, en este problema, el *dominio* es:

$0 < x \leqq 8;$

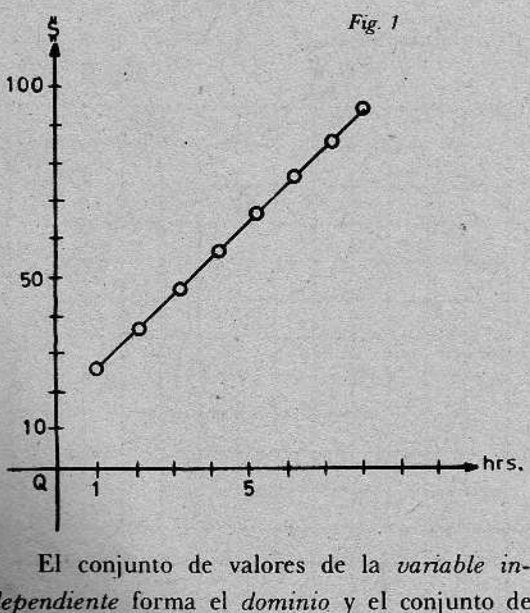
el *rango* correspondiente es:

$15 \leqq y \leqq 85.$

La tabla de valores es:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	(dominio)
y	15	25	35	45	55	65	75	85	(rango)

Fig. 1

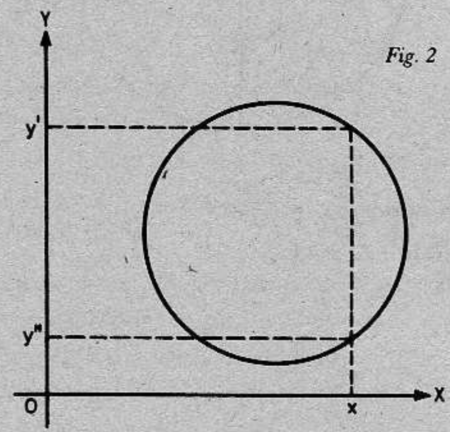


El conjunto de valores de la *variable independiente* forma el *dominio* y el conjunto de los valores de la *variable dependiente* constituye el *rango*.

Existen muchas relaciones, como la precedente, en las cuales existe *sólo un valor* de la »y« para cada valor de la »x«. Cada vez que esto ocurre diremos que la relación es una *función*. Por lo tanto: »una función es una relación tal que a cada valor del dominio le corresponde *uno y sólo un valor* del rango«; o bien: »a cada »x« le corresponde una y sólo una »y««.

Considerado desde este punto de vista el gráfico de una circunferencia y de una elipse no corresponde a una función pues hay verticales que contienen *más de un punto* de estas curvas (Fig. 2). (A cada »x« le corresponde más de una »y«). En estos casos se dice, también, que la relación es una *función doble*.

Fig. 2



De esta manera de la ecuación:

$x^2 + y^2 = 49$ se obtiene:

$y = \pm\sqrt{49 - x^2}$

lo que corresponde a dos funciones:

$y = +\sqrt{49 - x^2} \wedge y = -\sqrt{49 - x^2}$

cuyos gráficos son cada uno, separadamente, funciones (Figs. 3 y 4).

Fig. 3

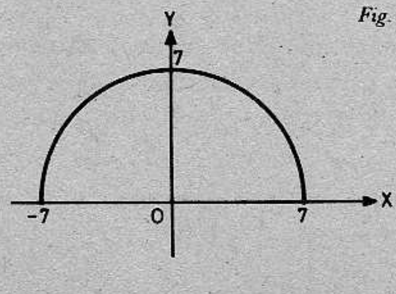
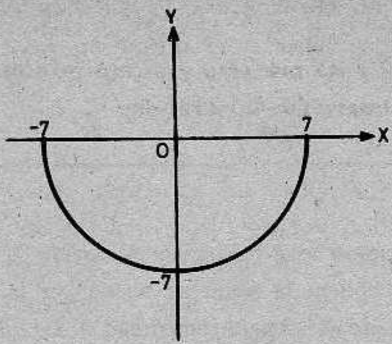


Fig. 4



Lo mismo puede decirse de la elipse.

Además, en el ejemplo anterior, obtenemos:

dominio: $-7 \leqq x \leqq +7$ (conjunto de valores de »x«)

rango: $-7 \leqq y \leqq +7$ (conjunto de valores de »y«).

Cuando el valor absoluto de x o de y es mayor de 7, la cantidad subradical es negativa y, por lo tanto es un número imaginario puro.

Tampoco son funciones, por las razones dadas, las siguientes relaciones expresadas en las figuras 5, 6 y 7.

¿Pueden estas tres últimas relaciones desdoblarse en dos funciones como se hizo para la circunferencia?

Fig. 5

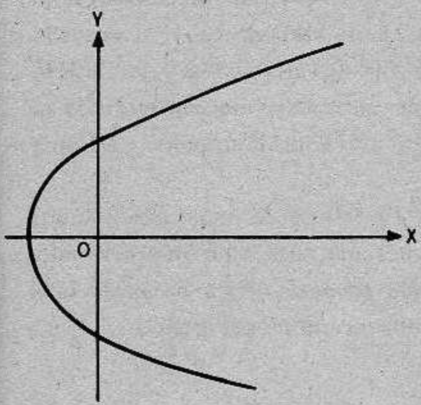


Fig. 6

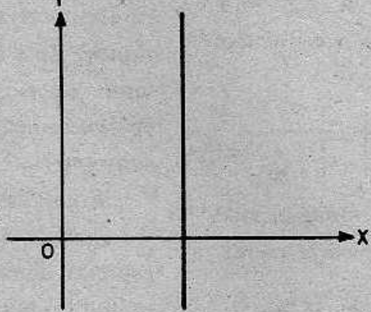
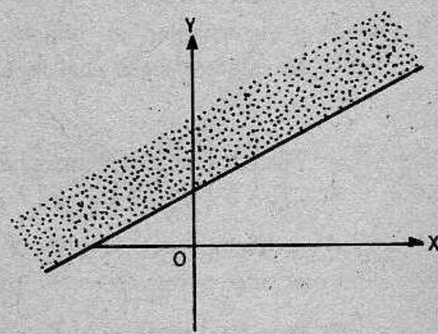


Fig. 7



La parábola. Función cuadrática. Punto de inflexión. Punto máximo y punto mínimo. Discusión de las diferentes fórmulas de la parábola. Eje de simetría de la parábola.

501. ECUACION DE LA PARABOLA

Antes de entrar en detalles sobre esta curva consideraremos algunos ejemplos que se presentan en Física.

i) La energía cinética de un cuerpo es:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot mv^2$$

Al representar gráficamente la relación entre la energía cinética y la masa del cuerpo, siendo v = constante, se obtiene la siguiente »tabla de valores« en la cual se ha considerado v = 1:

m	0	1	2	3	4	5	6
E_c	0	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3

Al graficar estos valores se obtiene una recta que pasa por el origen lo que corresponde a una función lineal pues $E_c = \frac{1}{2}$ m (Fig. 1). Este resultado indica que existe una proporcionalidad directa entre la energía cinética y la masa del cuerpo: $\frac{E_c}{m}$ = constante.

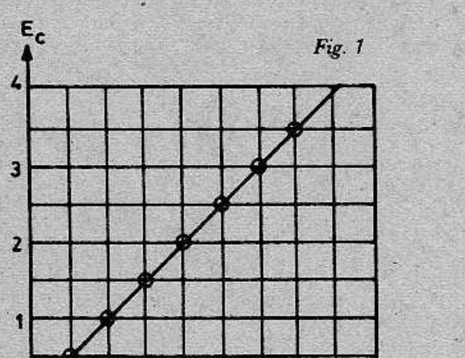


Fig. 1

Se observa que existe, además, un incremento constante ya que al incrementar la masa de 1 a 2 la E_c se incrementa de $\frac{1}{2}$ a 1; al incrementarse la masa de 2 a 3 la E_c se incrementa de 1 a $1\frac{1}{2}$, etc. Es decir: a un incremento de 1 en la masa le corresponde un incremento de $\frac{1}{2}$ en la energía cinética.

ii) Considerando, ahora, el mismo cuerpo, la masa será constante. Al variar la rapidez »v« se obtiene la siguiente »tabla« en la cual se ha tomado m = 2 para comodidad en los cálculos:

v	0	1	2	3	4	5	6
E_c	0	1	4	9	16	25	36

De acuerdo con esta »tabla« se observa que al variar la rapidez de 0 a 1 la energía cinética también varía de 0 a 1; pero al incrementarse la rapidez de 1 a 2 la E_c varía de 1 a 4; al variar la rapidez de 2 a 3 la E_c varía de 4 a 9, etc. Por lo tanto, no existe un incremento constante de la energía cinética al variar la rapidez en forma constante.

Entonces: $E_c = v^2$ no es una función lineal y su gráfica no es una recta, sino una curva muy especial llamada *parábola*. Para dibujarla basta unir los puntos encontrados (Fig. 2).

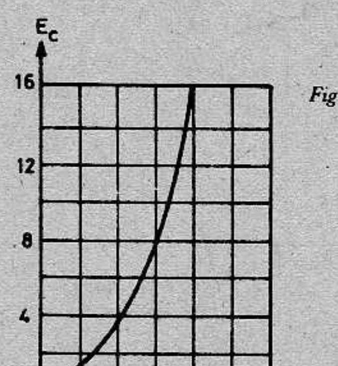


Fig. 2

iii) Por Cinemática sabemos que la distancia »s« recorrida por un móvil que parte del reposo con aceleración constante »a« está dada por la fórmula:

$$s = \frac{1}{2} \cdot at^2.$$

Forme Ud. una tabla para diferentes valores de »t« y tome a = 2; una vez completada la »tabla« haga el gráfico correspondiente: s vs. t.

t	0	1	2	3	4	5	6
s							

iv) Si el móvil comienza a acelerar cuando ya tenía una rapidez V_o la distancia que recorrerá en cierto tiempo *t* será:

$$s = V_o \cdot t + \frac{1}{2} \cdot at^2$$

Considere usted $V_o = 2$, $a = 2$; forme una »tabla« calculando *s* para $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ y 6. Dibuje la parábola correspondiente y compárela con las anteriores.

592. Los ejemplos ii, iii y iv representan ejemplos de una *función cuadrática* que, en forma general, queda definida por la ecuación:

$$\boxed{y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c} \qquad \text{(xxx)}$$

siendo $a \neq 0$, con $a, b, c, \in \mathbb{R}$ Se escribe también:

$$\boxed{f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c} \qquad \text{(xxxi)}$$

Analizaremos a continuación, algunos casos particulares de la ecuación cuadrática.

A) Consideremos, primeramente, la función:

$$\boxed{y = a \cdot x^2} \quad (a > 0;\ b = c = 0)$$

Por ejemplo:

$y_1 = \frac{1}{2} \cdot x^2$; $\quad y_2 = x^2$;

$y_3 = 2 \cdot x^2$; $\quad y_4 = 3 \cdot x^2$;

$y_5 = 4 \cdot x^2$.

x	$\frac{1}{2}x^2$	x^2	$2 \cdot x^2$	$3 \cdot x^2$	$4 \cdot x^2$
−4	8	16	32	48	64
−3	$4\frac{1}{2}$	9	18	27	36
−2	2	4	8	12	16
−1	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
2	2	4	8	12	16
3	$4\frac{1}{2}$	9	18	27	36
4	8	16	32	48	64
5	$12\frac{1}{2}$	25	50	75	100

Al representar, de acuerdo con esta »tabla«, estas cinco funciones, se observa que (Fig. 3):

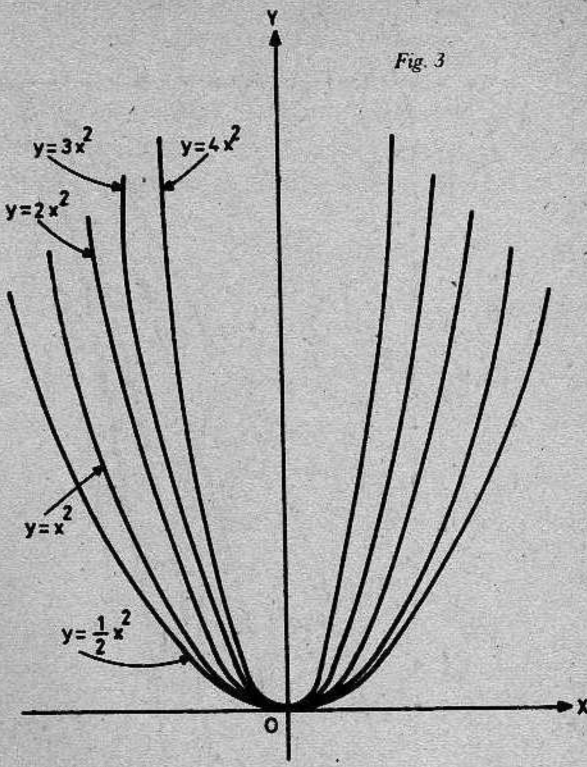


Fig. 3

1) Todas tienen sus ramas abiertas hacia arriba.

2) Al aumentar el valor de »a« la parábola se va cerrando cada vez más.

3) Todas tienen el punto (0,0) en común que corresponde al *vértice* de cada parábola (*punto de inflexión* de ellas);

4) Todas tienen el mismo *punto mínimo* (0,0), pero no existe un *punto máximo*. Este valor mínimo de la función f(x) se obtiene, en este caso, para $x = 0$.

5) No existen valores negativos de la función f(x) ya que $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0$.

6) Todas estas parábolas tienen el mismo eje de simetría que es el eje de las Y, $(x = 0)$.

B) Analicemos, ahora, la misma función $y = a \cdot x^2$, pero con $a < 0$. Por ejemplo:

$y_1 = -\frac{1}{2} \cdot x^2$; $\quad y_2 = -x^2$;

$y_3 = -2x^2$; $\quad y_4 = -3x^2$;

$y_5 = -4x^2$.

Complete Ud. la »tabla« siguiente y dibuje en una hoja cuadriculada o en un papel milimetrado todas estas parábolas y observará que (Fig. 4):

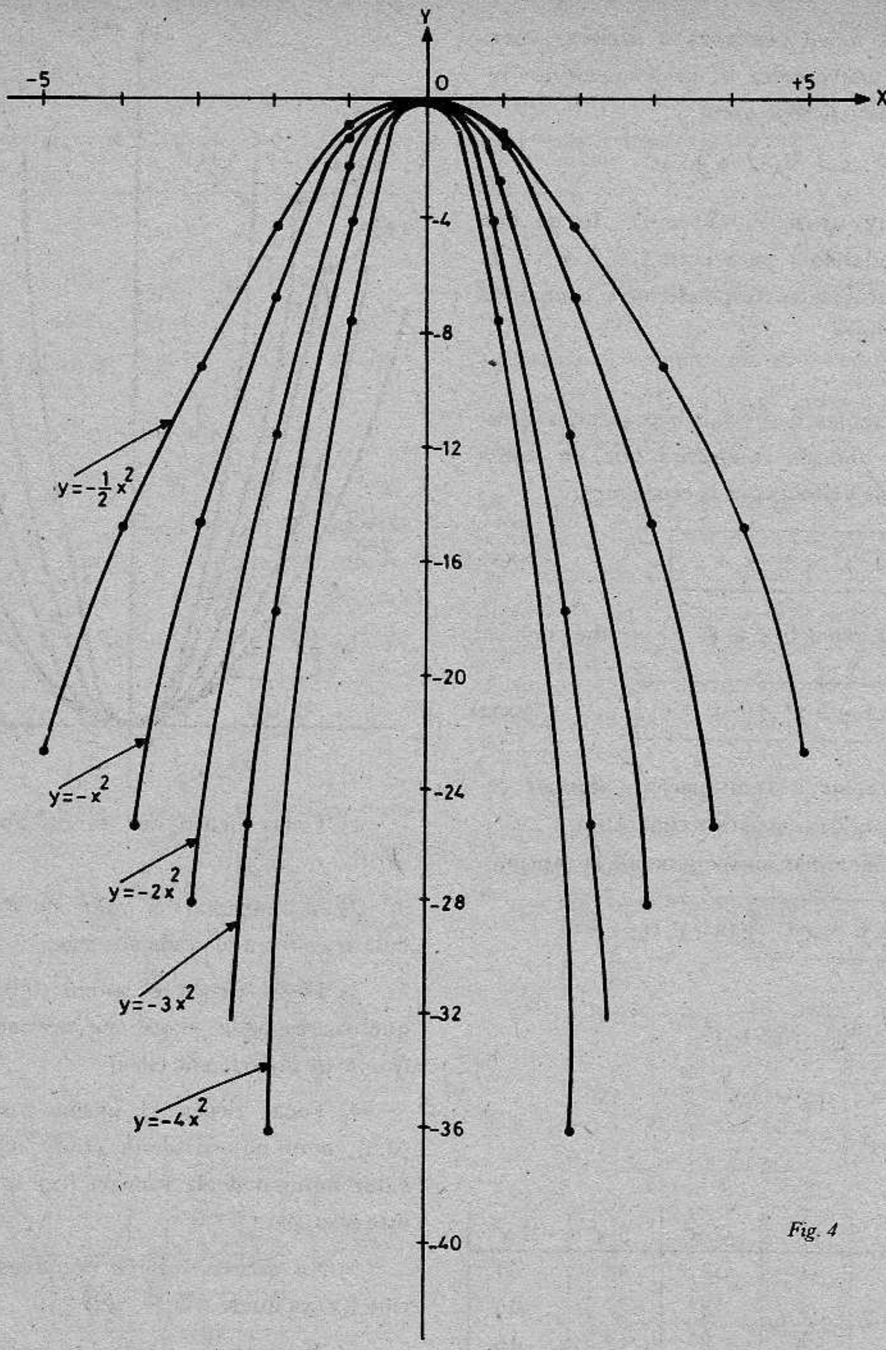


Fig. 4

x	$-\frac{1}{2}x^2$	$-x^2$	$-2x^2$	$-3x^2$	$-4x^2$
−4					
−3					
−2					
−1					
0					
1					
2					
3					
4					
5					

1) Todas tienen sus ramas abiertas hacia abajo;

2) Al aumentar en valor absoluto el valor negativo de »a« las parábolas se van cerrando;

3) Todas tienen un punto común (0,0) que es el vértice de cada parábola y que coincide con el origen del sistema;

4) Todas tienen el mismo punto máximo (0,0) para la función y no existe punto mínimo. Este punto máximo se obtiene para $x = 0$.

5) No existen valores positivos para f(x), ya que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq 0$;

6) Todas tienen el mismo eje de simetría que es el eje de las Y.

C) Analicemos la función:

$y = a \cdot x^2 + c \ (a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0)$

Por ejemplo: consideremos las funciones:

$y_1 = x^2 + 3; \quad y_2 = x^2 - 3; \quad y_3 = 2x^2 - 3$

Forme una »tabla« de valores y dibuje en un papel cuadriculado o milimétrico las parábolas correspondientes a cada ecuación. Se observa que (Fig. 5):

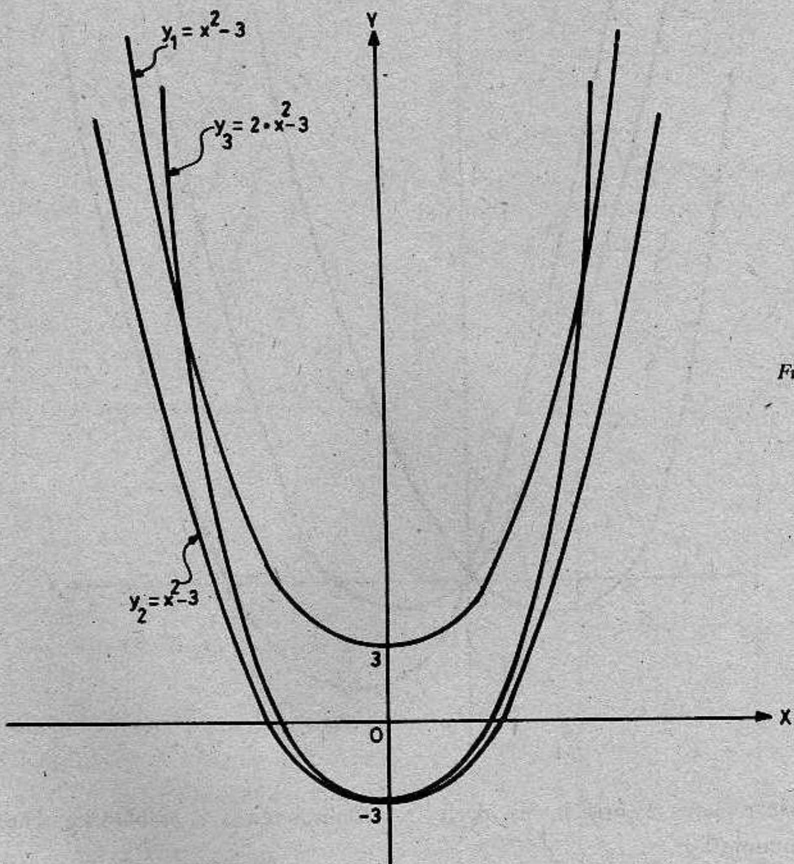


Fig. 5

1) Las tres tienen el vértice sobre el eje de las Y y a la distancia »c« del origen.

2) El eje de simetría de las tres es el eje de las Y (x = 0).

3) Las curvas que tienen el mismo valor para la »a« son congruentes y sólo se encuentran trasladadas en el valor de »c«. (En nuestros ejemplos, se tiene $y_1 \cong y_2$).

4) Al incrementar el valor de »a« las ramas de la parábola se van cerrando.

5) El punto mínimo de las tres corresponde al punto (0,c).

6) No existe en ellas un punto máximo.

D) Analicemos la función:

$y = a \cdot x^2 + b \cdot x (a \neq 0, b \neq 0, c = 0; a, b \in R)$

Por ejemplo:

$y_1 = x^2 + 2x; \ y_2 = x^2 - 2x; \ y_3 = x^2 - 5x$

Formemos la siguiente tabla:

x	$x^2 + 2x$	$x^2 - 2x$	$x^2 - 5x$
−5	15	35	50
−4	8	24	36
−3	3	15	24
−2	0	8	14
−1	−1	3	6
0	0	0	0
1	3	−1	−4
2	8	0	−6
3	15	3	−6
4	24	8	−4
5	35	15	0
6	48	24	6

Al construir los gráficos correspondientes a cada una de estas parábola, se observa que (Fig. 6):

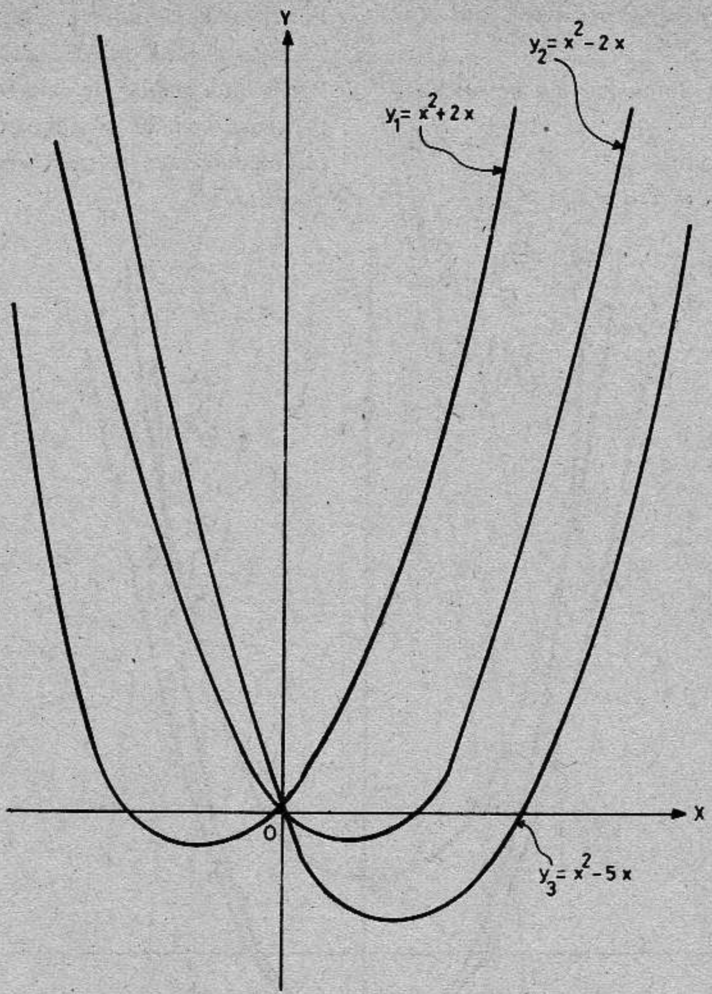


Fig. 6

1) Todas pasan por el origen, es decir, tienen el punto común (0,0).

2) Las tres tienen distinto eje de simetría, pero, todos paralelos entre sí y al eje de las Y.

3) El vértice de ninguna de ellas está sobre el eje de las Y ni sobre las X.

4) En el caso de $b > 0$, el eje de simetría está trasladado hacia la izquierda del eje de las Y; y si $b < 0$, está trasladado a la derecha de este eje.

5) Las tres parábolas son congruentes y sólo se encuentran trasladadas horizontal o verticalmente respecto a los ejes del sistema.

E) Veamos, ahora, el caso más general que corresponde a la función cuadrática:

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \quad (a,b,c \in R)$$

Consideremos: $y_1 = x^2 - 2x$; $y_2 = x^2 - 2x + 3$; $y_3 = x^2 - 2x - 5$; es decir, los casos en que $c = 0$, $c > 0$, $c < 0$.

Complete Ud. la »tabla« siguiente:

x	$x^2 - 2x$	$x^2 - 2x + 3$	$x^2 - 2x - 5$
−5			
−4			
−3			
−2			
−1			
0			
1			
2			
3			
4			
5			
6			

Al construir estas curvas de acuerdo con esta »tabla«, se observa (Fig. 7):

1) Todas tienen el mismo eje de simetría y la posición de éste no depende del valor de »c« sino del valor de »a« y »b«.

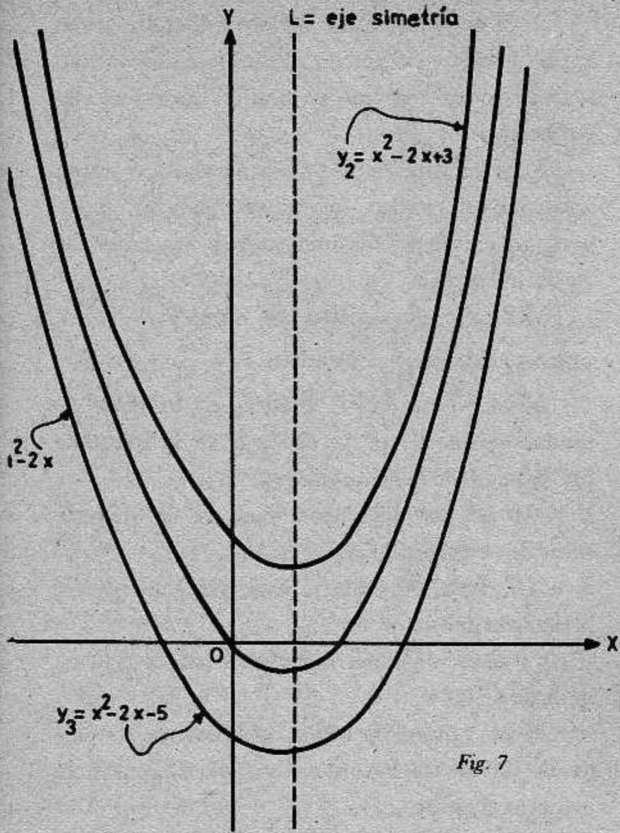


Fig. 7

En estos tres ejemplos la ecuación del eje de simetría es $x = 1$.

2) Para cualquier valor de x la función y_2 es mayor en 3 unidades al valor de y_1. De la misma manera, el valor de y_3 es 5 unidades menor que y_1.

3) Las tres curvas son congruentes y sólo se encuentran trasladadas verticalmente respecto al eje de las X.

4) Cada una corta al eje de las Y en puntos diferentes que corresponden al valor de »c«.

$y_1 = f_1(x)$ corta a las Y en el punto (0,0)
$y_2 = f_2(x)$ corta a las Y en el punto (0,3)
$y_3 = f_3(x)$ corta a las Y en el punto (0, −5).

5) Ninguna de estas funciones tiene valor máximo (punto máximo), pero cada una tiene un valor mínimo (punto mínimo) distinto que corresponde a la ordenada del vértice de cada parábola: $y_1 = -1$; $y_2 = 2$; $y_3 = -6$.

503. DISTINTAS ECUACIONES DE LA PARABOLA. Discusión

Ya hemos dicho que la función cuadrática: $y = ax^2 + bx + c$ representa gráficamente una parábola cuyo eje de simetría es paralelo a las Y (Fig. 8). En cambio, la ecuación:

$$x = ay^2 + by + c$$

(que no es función) tiene también por gráfica una parábola, pero su eje de simetría es paralelo al eje X (Fig. 9).

La función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ se anula, o sea $y = 0$, en los puntos x' y x''. Por lo tanto (Fig. 8):

$$ax^2 + bx + c = 0$$

en la cual x' y x'' son las raíces de esta ecuación, y tienen la propiedad de que:

$$x' + x'' = -\frac{b}{a}$$

Pero, por ser L (Fig. 8) el eje de simetría, el punto M equidista de x' y x''. Por lo tanto, obenemos:

$$u = \frac{x' + x''}{2} \quad \text{de donde:} \quad \boxed{u = \frac{-b}{2a}} \quad \text{(XXXII)}$$

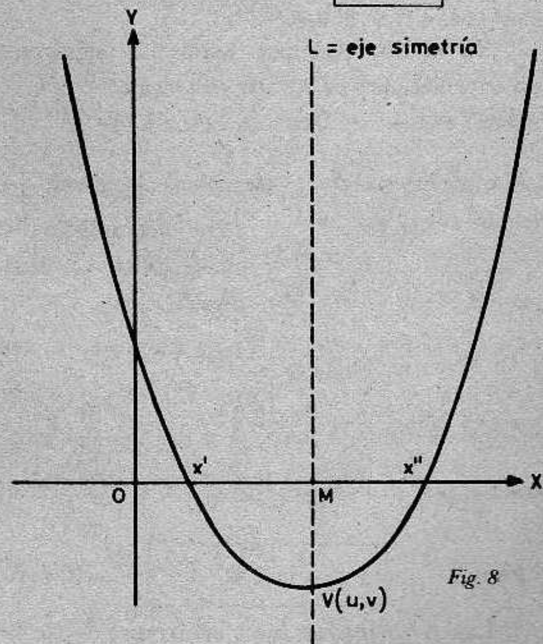


Fig. 8

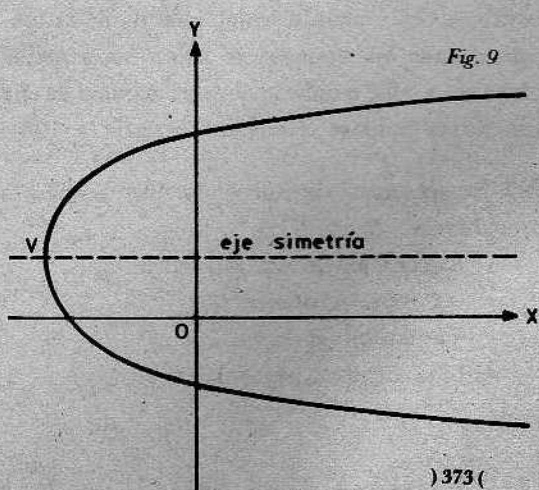


Fig. 9

Al sustituir este valor en la ecuación $y = ax^2 + bx + c$ se obtiene el valor de la ordenada »v« del vértice V de la parábola:

$$v = a\cdot\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\cdot\left(\frac{-b}{2a}\right) + c$$

Haciendo los cálculos y reducciones, resulta

$$\boxed{v = \frac{4ac - b^2}{4a}} \qquad \text{(XXXIII)}$$

Luego: las coordenadas del vértice son:

$$\boxed{V\,(u,v)} \quad \text{o bien:} \quad \boxed{V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)} \qquad \text{(XXXIV)}$$

Conocidas las coordenadas del vértice V(u,v,), a la ecuación cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ se le puede dar la forma canónica:

$$\boxed{y = a\cdot(x - u)^2 + v} \qquad \text{(XXXV)}$$

en la cual $a \neq 0$ $a, u, v \in \mathbb{R}$.

En efecto, podemos hacer las siguientes transformaciones para darle esta forma:

$y = ax^2 + bx + c$ (se saca factor común »a«)

$y = a\cdot(x^2 + \frac{b}{a}\cdot x + \frac{c}{a})$ (se suma y resta $\frac{b^2}{4a^2}$ para completar el cuadrado de un binomio).

$$y = a\cdot(x^2 + \frac{b}{a}\cdot x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a})$$

$$y = a\cdot\left[(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$$

$$y = a\cdot(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}; \text{ pero } \frac{b}{2a} = -u; \frac{4ac - b^2}{4a} = v$$

luego: $\boxed{y = a\cdot(x - u)^2 + v}$ (q.e.d.)

Las coordenadas (u,v) del vértice V de la parábola determinan el valor mínimo de la función cuando las »ramas« se abren hacia arriba (debe ser $a > 0$); o indican el valor máximo de ella cuando las »ramas« se abren hacia abajo ($a < 0$).

504. En resumen, podemos dar las siguientes conclusiones:

1) La ecuación de la parábola es:
$y = ax^2 + bx + c$; o bien:
$y = a\cdot(x - u)^2 + v$

2) El vértice de la parábola es: V (u,v)
siendo: $u = \frac{-b}{2a}$; $v = \frac{4ac - b^2}{4a}$

3) Si $a > 0$ las ramas de la parábola se abren hacia arriba; existe un punto mínimo (u,v), pero no existe máximo ya que las ramas se alejan hacia $+\infty$.

4) Si $a < 0$ las ramas de la parábola se abren hacia abajo; existe un punto máximo (u,v), pero no existe un mínimo ya que las ramas se alejan hacia $-\infty$.

5) El eje de simetría es paralelo a las Y y su ecuación es $x = u$ siendo $u = \frac{-b}{2a}$.

6) El valor de $|u|$ indica el número de unidades que el eje de simetría de la parábola está trasladado *horizontalmente*. Así:
si $u = 0$ no hay traslación y el eje de simetría coincide con el eje de las Y;
si $u > 0$ el eje de simetría está trasladado hacia la *derecha* del eje de las Y;
si $u < 0$ el eje de simetría está trasladado a la *izquierda* de las Y.

7) El valor $|v|$ indica el número de unidades de la traslación *vertical* de la parábola respecto al eje de las X.
Si $v = 0$ no hay traslación y el vértice de la parábola está sobre el eje de las X;
si $v > 0$, la traslación es hacia *arriba* respecto al eje X.
si $v < 0$, la traslación es hacia *abajo* de este eje.

Desarrollaremos dos ejemplos:

I) En la parábola: $y = 2x^2 - 12x + 14$ determinar: a) su vértice; b) su máximo y mínimo; c) ecuación del eje de simetría; d) su ecuación canónica; e) la traslación horizontal y vertical; f) su ecuación general; g) gráfico de esta curva.

Solución:

a) Si $y = 2x^2 - 12x + 14 \Longrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -12 \\ c = 14 \end{cases}$

luego: $u = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-12)}{4} = 3$

$$v = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{112 - 144}{8} = -4.$$

Por lo tanto: V(3, −4).

b) Como $a > 0$ pues $a = 2$, la parábola tiene su mínimo en el punto (3, −4); no existe máximo.

c) El eje de simetría es $x = u \Rightarrow x = 3$ (es la paralela al eje de las Y por el punto $x = 3$).

d) Siendo $a = 2$, $u = 3$, $v = -4$ la ecuación canónica de la parábola es:

$y = 2 \cdot (x - 3)^2 - 4$.

e) Como $u = 3 \wedge v = -4$, la traslación horizontal es de 3 unidades a la derecha de las Y, y la vertical, es de 4 unidades por debajo de las X.

f) $y = 2 \cdot (x - 3)^2 - 4$ conduce a la ecuación general dada: $y = 2x^2 - 12x + 14$.

g) ¡Hágalo Ud.! (Ubique los puntos encontrados y aproveche la ecuación canónica para encontrar fácilmente otros puntos).

II) Si $y = -3 \cdot (x + 2)^2 + 1$, determinar:

a) el vértice; b) la traslación horizontal y vertical; c) ecuación del eje de simetría; d) su máximo y mínimo; e) la ecuación general; f) dibuje esta parábola.

Solución:

a) De la ecuación dada se obtiene inmediatamente: $u = -2$, $v = 1$. Por lo tanto: $V(-2;1)$.

b) La traslación horizontal es a la izquierda pues $u = -2$; la traslación vertical es de una unidad sobre las X pues $v = 1$.

c) $x = -2$ (paralela a las Y por el punto $x = -2$).

d) El máximo está en el punto $(-2; 1)$; no existe punto mínimo pues $a < 0$.

e) Basta desarrollar la ecuación dada, resultando: $y = -3x^2 - 12x - 11$.

f) Guíese por la ecuación dada y determine otros puntos; únalos y obtendrá la curva.

OPTATIVO

505. EJE DE SIMETRIA DE LA PARABOLA

Veamos un poco más detallado este tema ya tocado anteriormente.

Si consideramos y dibujamos la parábola:

$y = 2x^2 - 12x + 14$ (Fig. 10).

se observa que su punto mínimo es el vértice de ella $V(3, -4)$ y que las ramas se abren hacia arriba. El eje de simetría pasa por este punto y está situado a 3 unidades hacia la derecha del eje de las Y. Por lo tanto, la ecuación de este eje de simetría es $x = 3$.

Se observa, también, que a puntos equidistantes del eje de simetría les corresponde el mismo valor para la »y«. Por ejemplo: el punto

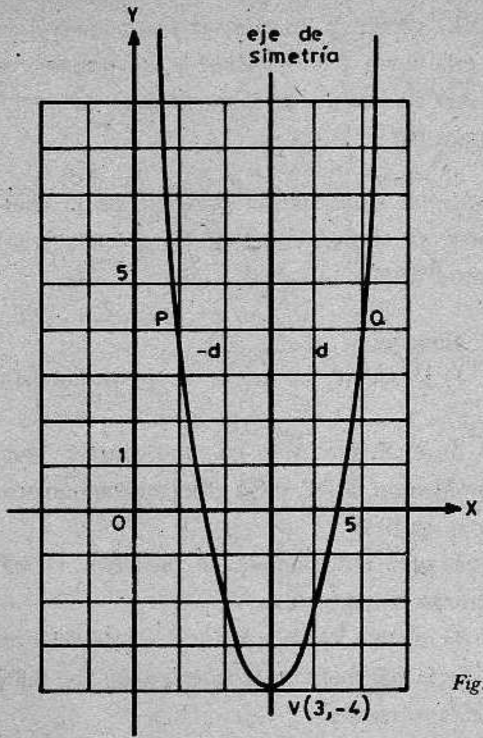


Fig. 10

(5;4) está a igual distancia (2 unidades) del eje de simetría que el punto (1;4). Es decir: para $x = 1 \wedge x = 5$ se obtiene la misma $y = 4$.

En general, siendo $x = u$ la ecuación del eje de simetría, los puntos para los cuales $x = u \pm d$ se obtiene la misma »y«.

Ya hemos demostrado que $u = \frac{-b}{2a}$. Entonces, al sustituir en la ecuación $y = ax^2 + bx + c$ de la parábola el valor $x = \frac{-b}{2a} + d$, y después el valor $x = \frac{-b}{2a} - d$, se debe llegar en ambos casos al mismo valor para la »y«.

En efecto:

1) si $x = \frac{-b}{2a} + d$

$\Rightarrow y_1 = a \cdot (d - \frac{b}{2a})^2 + b\,(d - \frac{b}{2a}) + c$

Al efectuar las operaciones y reducir, se obtiene:

$y_1 = \frac{4ac - b^2}{4a} + ad^2$.

2) si $x = -\frac{b}{2a} - d$

$\Rightarrow y_2 = a \cdot (\frac{-b}{2a} - d)^2 + b \cdot (\frac{-b}{2a} - d) + c$.

Al efectuar las operaciones y reducir, se obtiene: $y_2 = \frac{4ac - b^2}{4a} + ad^2$.

Resulta, por lo tanto, $y_1 = y_2$ con lo que se demuestra que $x = u = \frac{-b}{2a}$ es la ecuación del eje de simetría.

El vértice V (u,v) es el *punto de inflexión* de esta curva y corresponde a un mínimo cuando »a« es positivo o a un máximo cuando »a« es negativo.

Problema: Construir la parábola de la cual se conoce su vértice V, su eje de simetría L y un punto P de ella.

Solución:

1) Desde P se traza la perpendicular a $\overline{VL'}$;

2) se divide $\overline{VA}$ en »n« partes iguales (por ejemplo, n = 4) y $\overline{PA}$ en el mismo número de partes iguales;

3) por los puntos de división (1,2,3,4) se trazan las paralelas a $\overline{VL}$;

4) al unir V con a,b,c y P se obtienen puntos de la parábola en la intersección con las paralelas anteriores;

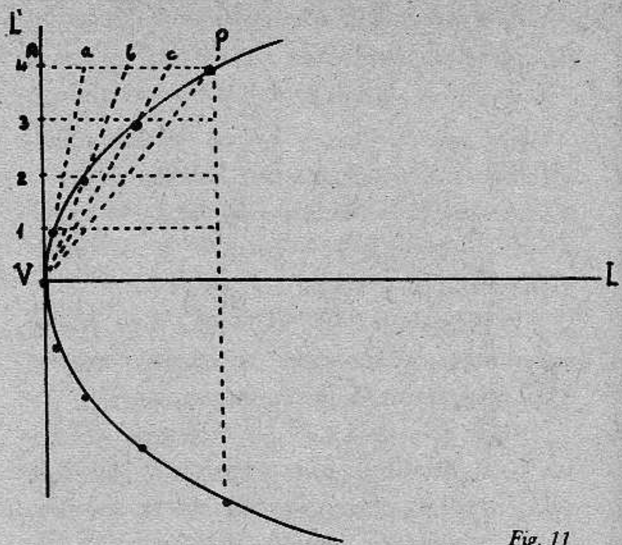


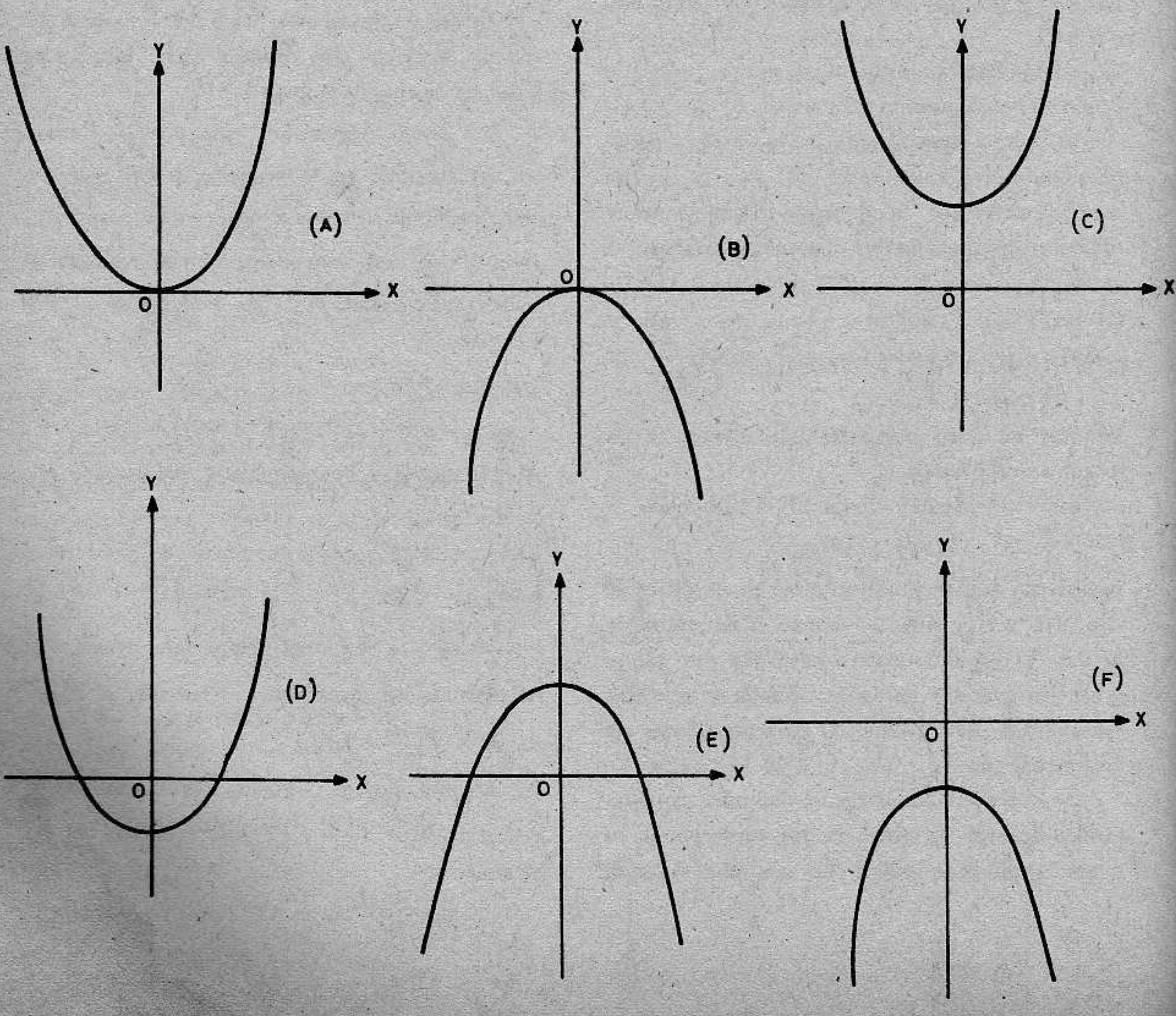
Fig. 11

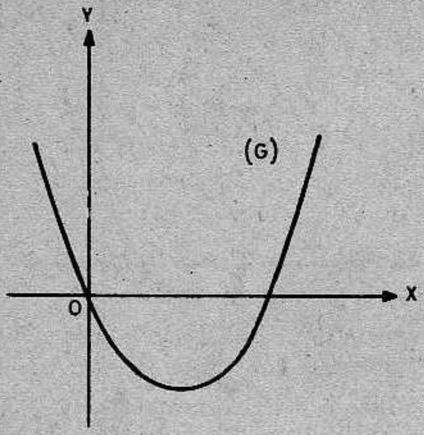
5) se unen estos puntos de intersección;

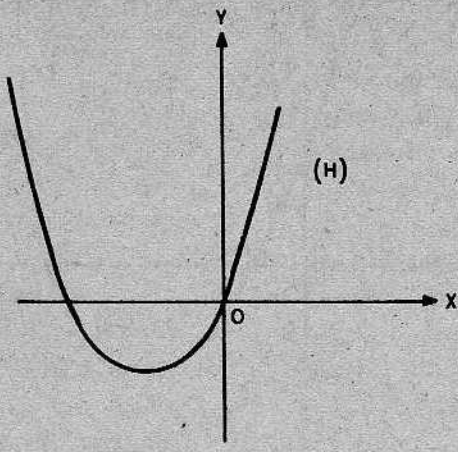
6) para dibujar la otra rama de la parábola basta determinar los puntos simétricos de los anteriores respecto al eje $\overline{VL}$.

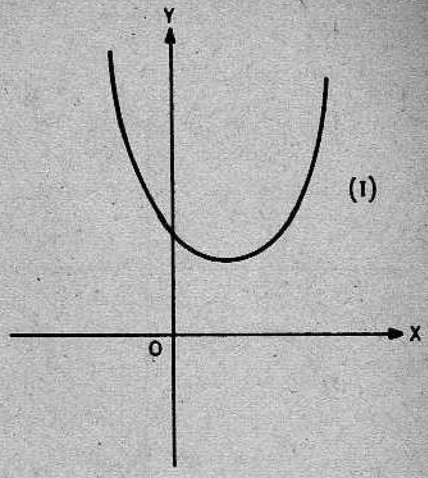
506. EJERCICIOS

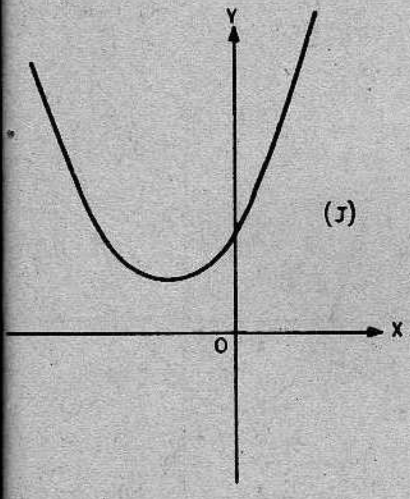
A continuación se indican los gráficos de diversas parábolas.

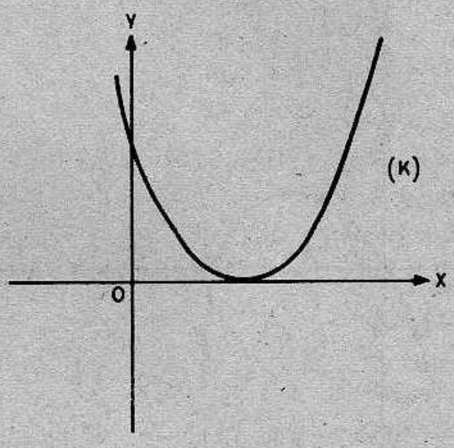


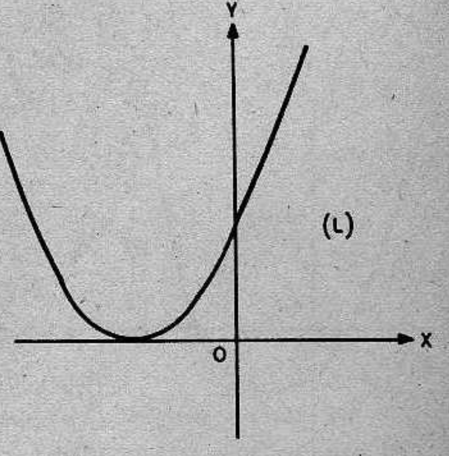

Y
(G)
X
O

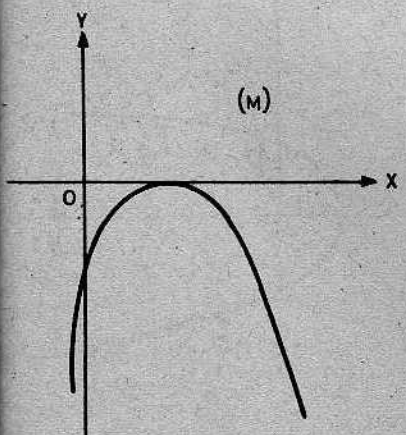

Y
(H)
X
O

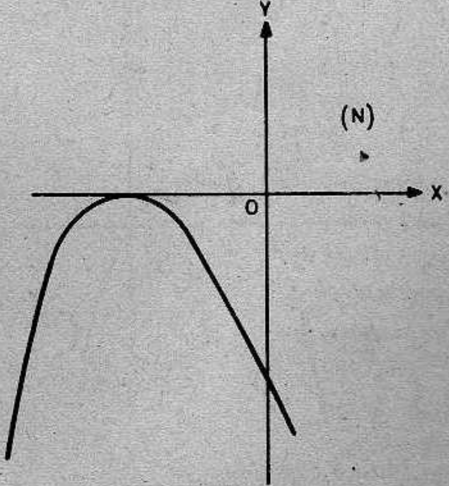

Y
(I)
X
O

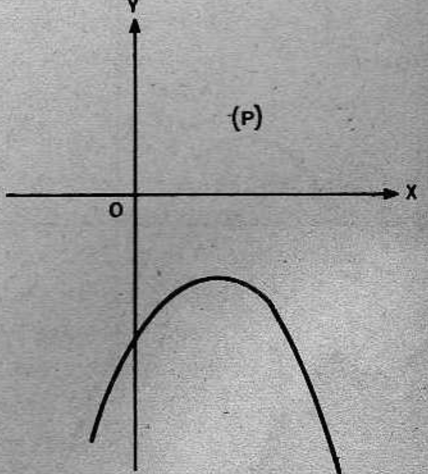

Y
(J)
X
O

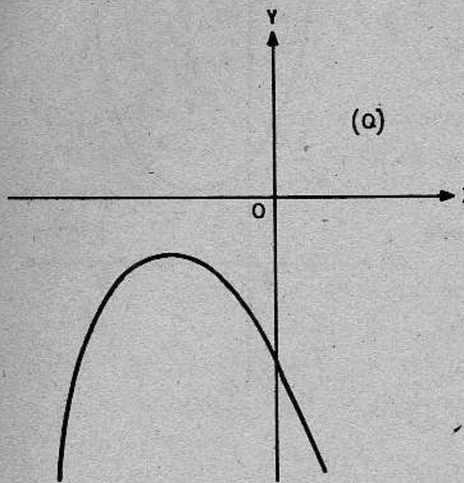

Y
(K)
X
O


Y
(L)
X
O

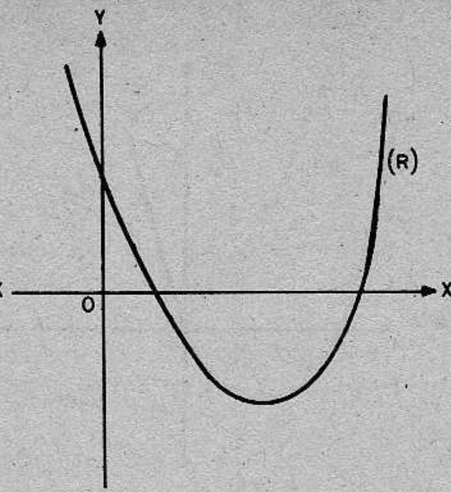

Y
(M)
X
O


Y
(N)
X
O

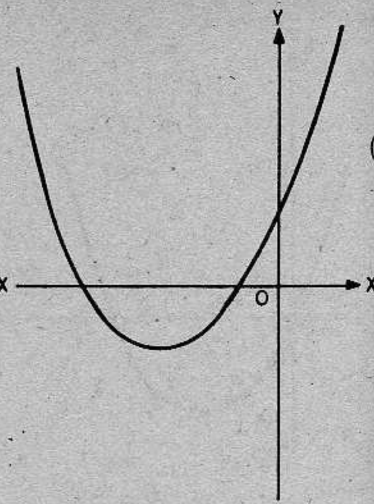

Y
(P)
X
O



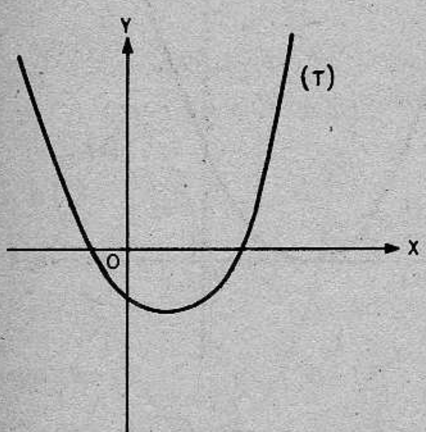
(Q)



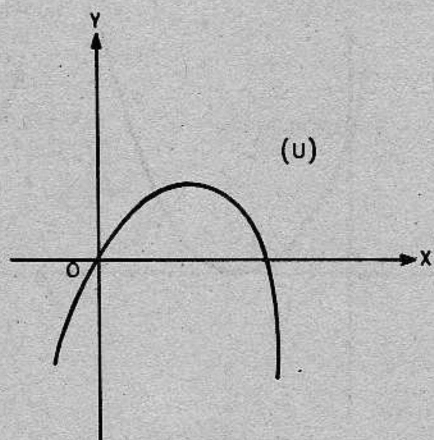
(R)



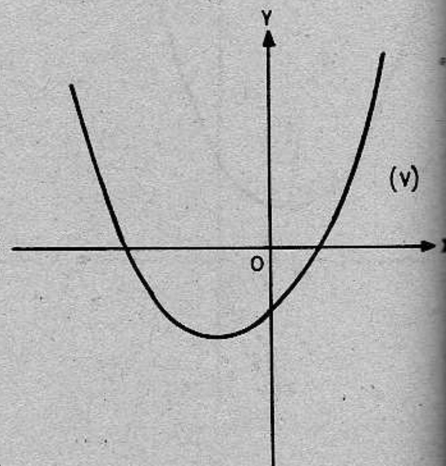
(S)



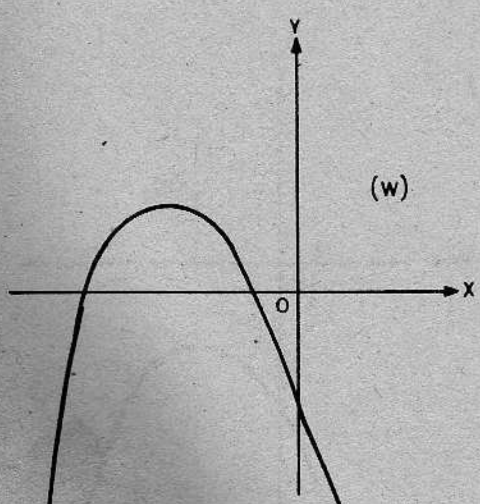
(T)



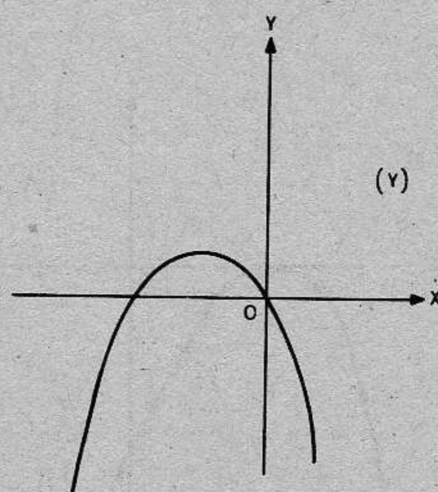
(U)



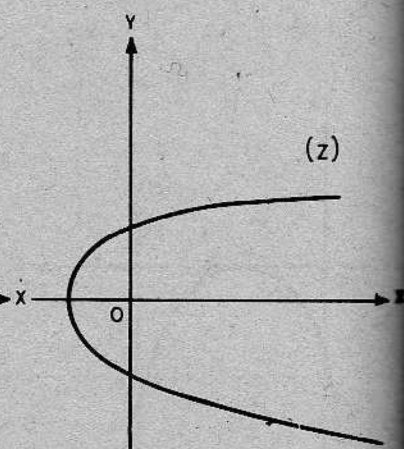
(V)



(W)



(Y)



(Z)

En los ejercicios 1 al 30 se pide colocar dentro del paréntesis la letra correspondiente a uno de los gráficos anteriores que más se aproxima a la ecuación dada.

Indicación: guíese: 1°) por el signo de »a« para saber si las ramas se abren hacia arriba o hacia abajo; 2°) por el valor »c« para saber el punto en que la parábola corta al eje de las Y; 3°) por las coordenadas del vértice para saber la traslación horizontal y vertical; 4°) en caso de duda forme una »tabla de valores« y construya la curva. Para confeccionar esta »tabla« conviene usar la forma canónica de la parábola, pues con ella se facilitan los cálculos.

1) ( ) $y = x^2 + 4x - 5$
2) ( ) $y = x^2 - 4x - 5$
3) ( ) $y = x^2 - 4x + 5$
4) ( ) $y = x^2 + 4x + 5$
5) ( ) $y = x^2 + 4x$
6) ( ) $y = x^2 - 4x$
7) ( ) $y = -x^2 + 4x$
8) ( ) $y = x^2 - 2x - 8$
9) ( ) $y = 9x^2 + 6x + 1$
10) ( ) $y = -0{,}75\, x^2$
11) ( ) $y = -3x^2 + 10$
12) ( ) $y = -x^2 - 2x - 1$
13) ( ) $y = 2x^2 - 12x + 14$
14) ( ) $y = -x^2 + 8x - 19$
15) ( ) $y = -3x^2 - 12x - 11$
16) ( ) $y = 2x^2 - 16x + 27$
17) ( ) $y = x^2 - 2x$
18) ( ) $y = -2x^2 + x$
19) ( ) $y = 3x^2 - 2$
20) ( ) $y = -4x^2 - 5$
21) ( ) $y = -2x^2 - 4x$
22) ( ) $y = \frac{3}{5} \cdot x^2$
23) ( ) $y = x^2 + 6x + 5$
24) ( ) $y = \frac{1}{2} \cdot x^2 + 1$
25) ( ) $y = 4x^2 - 4x + 1$
26) ( ) $y = -(x+2)^2 - 2$
27) ( ) $y = -(x-2)^2$
28) ( ) $y = -x^2 - 2x + 5$
29) ( ) $y = -x^2 - 2x - 5$
30) ( ) $x = 3y^2$.

31) Se da la parábola: $y = 4x^2 - 20x + 25$. Determinar: a) su vértice; b) su máximo o mínimo; c) el eje de simetría; d) puntos en que corta a los ejes coordenados; e) dibujarla.

32) Idem., pero siendo $y = (2x-3)^2 - 9$.

33) En la parábola: $y = 2x^2 - 12x + 14$ determinar: a) su vértice; b) su punto máximo o mínimo; c) el eje de simetría; d) su ecuación canónica; e) su intersección con las X; f) su intersección con el eje Y.

34) Idem., pero en la parábola:
$y = -3x^2 - 12x - 11$.

35) Idem., pero en la parábola:
$y = -x^2 + 8x - 19$.

36) Idem., pero en la parábola:
$y = 2x^2 - 12x + 13$.
Además, dibujarla.

37) Los puntos de una parábola son: A(5;3), B(2, −3) y C(0;13). ¿Cuál es la ecuación de la parábola?

Solución: Su ecuación es:

$y = ax^2 + bx + c;$

por lo tanto se debe calcular a,b,c. Para esto se sustituye en la ecuación las coordenadas de estos puntos que deben satisfacerla. Se obtiene:

para el punto A: $3 = 25a + 5b + c$
para el punto B: $-3 = 4a + 2b + c$
para el punto C: $13 = c$

Al resolver este sistema obtendremos los valores: $a = 2$, $b = -12$, $c = 13$. Por lo tanto, la ecuación de la parábola es:

$y = 2x^2 - 12x + 13$.

38) Determinar »u« para que la parábola $y = (x-u)^2 + 5$ pase por el punto $(-3;9)$.

39) Determinar las coordenadas del vértice de la parábola: $y = -2 \cdot (x+1)^2 + v$ para que pase por el punto $(-1;3)$.

40) Determinar las coordenadas del vértice de la parábola: $y = -3 \cdot (x-5)^2 + v$ para que pase por el punto $(4;2)$.

41) Determinar las coordenadas del vértice de la parábola que pasa por los puntos $(0;13) \wedge (-4;5)$ siendo $a = 1$.

42) Determinar la ecuación de la parábola que pasa por los puntos $(2, -3) \wedge (6;5)$ siendo $a = 1$.

43) Determinar la ecuación de la parábola que pasa por los puntos $A(3, -8) \wedge B(1, -8)$ siendo $a = -2$.

44) Determinar gráficamente y algebraicamente la intersección de las parábolas: $y = (x - 3)^2 - 1; y = (x + 1)^2 - 1$.

45) ¿Cuáles de los siguientes puntos (pares ordenados) pertenecen a la función $y = x^2 - 4x + 4$? $A(0,0)$; $B(2;4)$; $C(4;4)$; $D(-4, -4)$; $E(5;9)$.

46) Dibujar la parábola $x = (y - 3)^2 - 1$. a) ¿En qué puntos corta a los ejes coordenados? b) ¿Es función?

47) Dibujar la parábola $x = -2 \cdot (y - 5)^2 + 7$.

48) Graficar: $y = 0,25 \cdot x^2$.

49) Graficar: $y = 2x^2 - 5$.

50) Graficar: $y = -x^2 - 3$.

51) Graficar: $y = -x^2 - x - 2$.

52) Graficar: $y = -2x^2 + 5$.

53) Graficar: $x = y^2 + 2y - 3$.

54) Determinar gráficamente la intersección de las curvas: $y = x^2 - 4$; $x = y^2 - 4$.

Resp.: 1 = V; 2 = T; 3 = I; 4 = J; 5 = H; 6 = G; 7 = U; 8 = T; 9 = L; 10 = B; 11 = E; 12 = N; 13 = R; 14 = P; 15 = W; 16 = R; 17 = G; 18 = U; 19 = D; 20 = F; 21 = Y; 22 = A; 23 = S; 24 = C; 25 = K; 26 = Q; 27 = M; 28 = ninguna; 29 = Q; 30 = ninguna; 31) a) $V(2\frac{1}{2};0)$; b) punto mínimo $(2,5;0)$; c) $x = 2,5$; d) $(2,5;0)$ a las X; $(0;25)$ a las Y; 32) a) $V(1\frac{1}{2}; -9)$; b) punto mínimo $(1,5; -9)$; c) $x = 1\frac{1}{2}$; d) $(0,0) \wedge (3;0)$ a las X; $(0,0)$ a las Y. 33) a) $V(3, -4)$; b) punto mínimo $(3, -4)$; c) $x = 3$; d) $y = 2 \cdot (x - 3)^2 - 4$; e) $x = 3 \pm \sqrt{2}$; f) $y = 14$; 34) a) $V(-2;1)$; b) punto máximo $(-2;1)$; c) $x = -2$; d) $y = -3 \cdot (x + 2)^2 + 1$; e) $x = -2 \pm \frac{1}{3}\sqrt{3}$; f) $y = -11$; 35) a) $(4, -3)$; b) punto máximo $(4, -3)$; c) $x = 4$; d) $y = -(x - 4)^2 - 3$; e) no existe; f) $y = -19$; 36) a) $V(3, -5)$; b) punto mínimo $(3, -5)$; c) $x = 3$; d) $y = 2 \cdot (x - 3)^2 - 5$; e) $(3 + \frac{1}{2}\sqrt{10};0) \wedge (3 - \frac{1}{2}\sqrt{10};0)$ a las X; f) $(0;13)$ a las Y; 38) $u' = -1$; $u'' = -5$; 39) $V(-1;3)$; 40) $V(5;5)$; 41) $V(-3;4)$; 42) $y = (x - 3)^2 - 4$; 43) $y = -2 \cdot (x - 2)^2 - 6$; 44) $P(1;3)$; 45) C y E; 46) a) $(8;0)$, $(0;2)$, $(0;4)$; b) no.

 Patricio Saavedra

La elipse, su ecuación y sus elementos.

507. ECUACION DE LA ELIPSE

La ecuación de la elipse que tiene su centro en el origen del sistema es:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \qquad \text{(XXXVI)}$$

en la cual »a« es el semieje mayor y »b«, el semieje menor (Fig. 1). Esta ecuación se la puede expresar también, en la forma:

$$\boxed{A \cdot x^2 + B \cdot y^2 = K} \qquad \text{(XXXVII)}$$

en que A, B y K son todos distintos de cero, todos positivos o todos negativos.

Si $a > b$ el eje mayor es horizontal (Fig. 1).

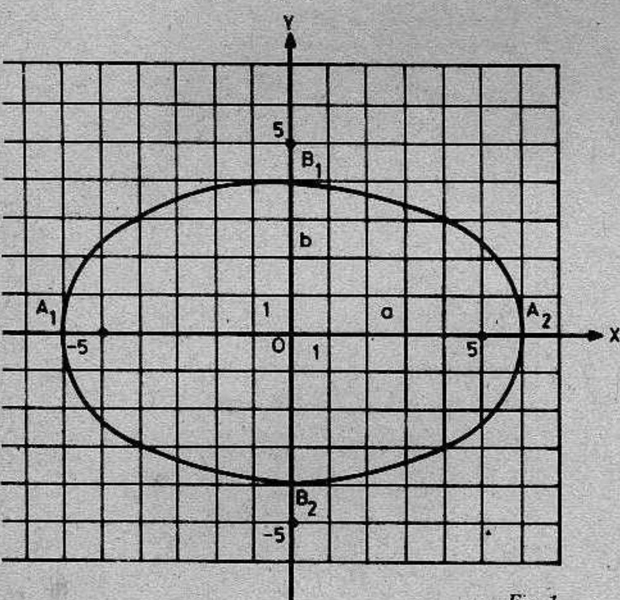


Fig. 1

Si $a < b$, el eje mayor es vertical (Fig. 2).

Por ejemplo: dibujar la elipse:

$4x^2 + 9y^2 = 144$

Solución: Al dividir la ecuación dada por 144, se obtiene:

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$$

de donde: $a = \pm 6$; $b = \pm 4$. Con estos valores se sabe que el eje mayor mide 12 unidades y es horizontal; el eje menor mide 8 unidades y es vertical. Además, estos valores permiten conocer cuatro puntos de la elipse: (6; 0), (−6; 0), (0; 4), (0, −4) (Fig. 1).

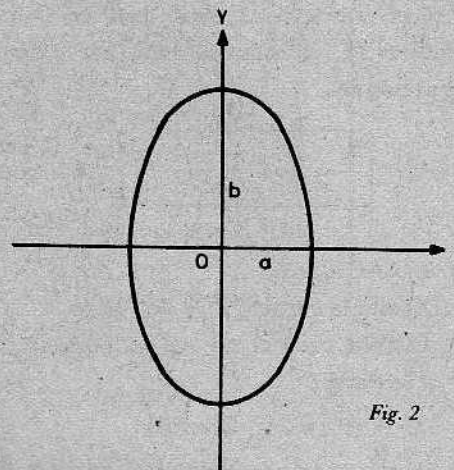


Fig. 2

Para determinar otros puntos de la elipse basta despejar »y« de la ecuación dada o la »x«, obteniéndose en este ejemplo:

$$y = \pm \frac{1}{3}\sqrt{144 - 4x^2};$$

o bien: $x = \pm \frac{1}{2}\sqrt{144 - 9y^2}$

Por lo tanto: el dominio es: $-6 \leq x \leq 6$

el rango es: $-4 \leq y \leq 4$

»Tabla de valores«:

x	±6	±5	±4	±3	±2	±1	0
y	0	±2,21	±2,98	±3,46	±3,74	±3,94	±4

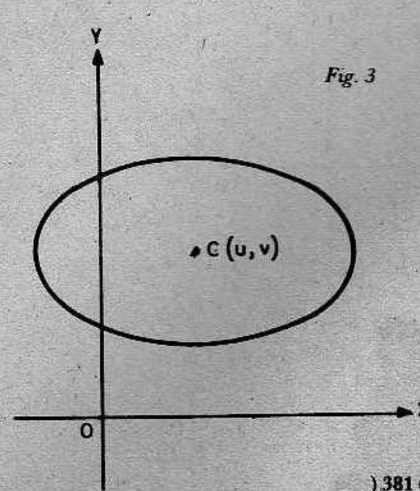


Fig. 3

Si la elipse tiene su centro en el origen del sistema de coordenadas, los puntos de intersección con los ejes del sistema son:

$(\pm a, 0) \wedge (0, \pm b)$.

Si el centro de la elipse está en un punto cualquiera (u, v), como se indica en la figura 3, su ecuación es:

$$\boxed{\frac{(x-u)^2}{a^2} + \frac{(y-v)^2}{b^2} = 1} \qquad \text{(XXXVIII)}$$

508. EJERCICIOS

1) Dibujar la elipse: $9x^2 + 4y^2 = 36$
2) ¿Cuánto mide el eje mayor y el eje menor de la elipse:

   $3x^2 + 4y^2 = 24$? Dibujarla.
3) El centro de una elipse está en $(-4; 3)$. Si su eje mayor mide 8 unidades y el menor 6 unidades, ¿cuál es su ecuación?
4) Determinar la ecuación canónica y las coordenadas del centro de la elipse:

   $9x^2 + 16y^2 - 36x + 96y + 36 = 0$.

   Además, determinar sus semiejes y dibujarla.

   (*Resp.*: $C(2, -3)$; $a = 4$; $b = 3$;

   $\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$
5) Dibujar la elipse: $4 \cdot (x-4)^2 + y^2 = 100$.
6) Si el área de una elipse es: $\pi \cdot ab$. ¿Cuál es el área de la elipse $3x^2 + 4y^2 = 72$?
7) Calcular el área comprendida entre las curvas:

   $4 \cdot (x+2)^2 + 9y^2 = 36$; $x^2 + y^2 + 2x - 15 = 0$.
8) Calcular el área comprendida por la intersección de las curvas:

   I) $x^2 + y^2 = 25$;

   II) $9x^2 + 4y^2 = 36$;

   III) $4x^2 + 9y^2 + 16x - 20 = 0$
9) Resolver gráficamente el sistema:

   $$\left.\begin{array}{l} \frac{(x+2)^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ (x-1)^2 + y^2 = 36 \end{array}\right|$$

   (*Resp.*: $x = -5$; $y = 0$)

509. ECUACIONES DE LA HIPERBOLA

La hipérbola es una curva que tiene dos ramas que se abren continuamente. (La parábola tiene sólo una rama.)

La ecuación más conocida de esta curva es:

$$\boxed{xy = K} \qquad \text{(XXXIX)}$$

Corresponde a una *hipérbola equilátera* (las dos ramas iguales y simétricas respecto a los ejes del sistema o a su origen) (Fig. 1 a 4).

Una hipérbola se la puede expresar, también, en la forma:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \qquad \text{(XL)}$$

como, asimismo, por la ecuación:

$$\boxed{Ax^2 - By^2 = K} \qquad \text{(XLI)}$$

siendo A, B y K positivos.

Pueden presentarse los siguientes gráficos:

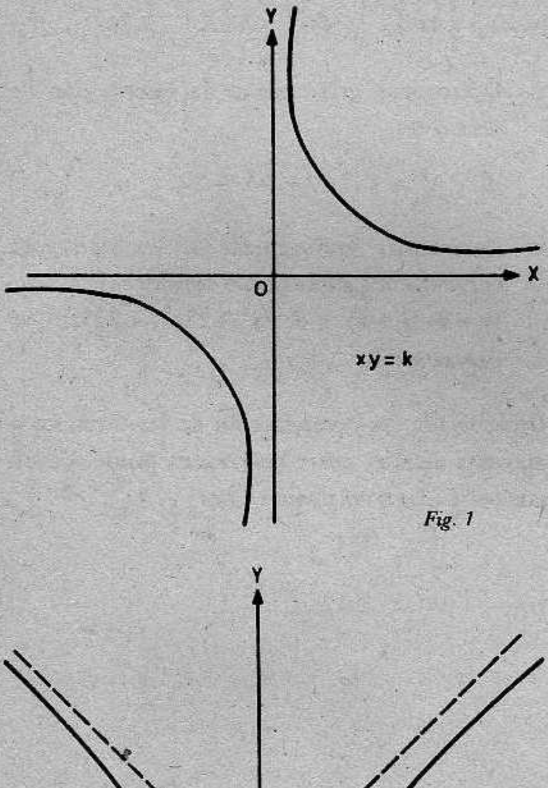


Fig. 1

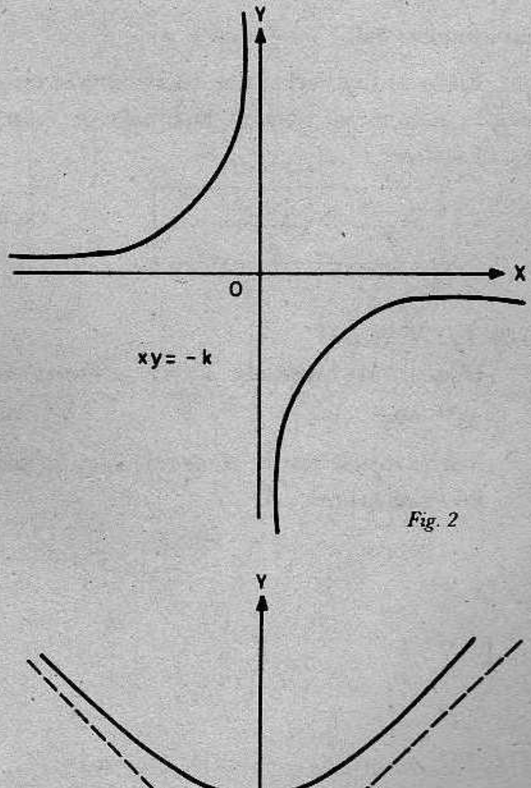


Fig. 2

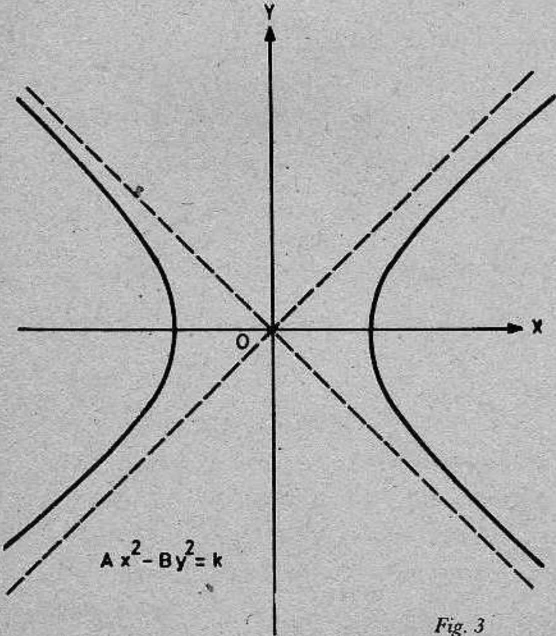


Fig. 3

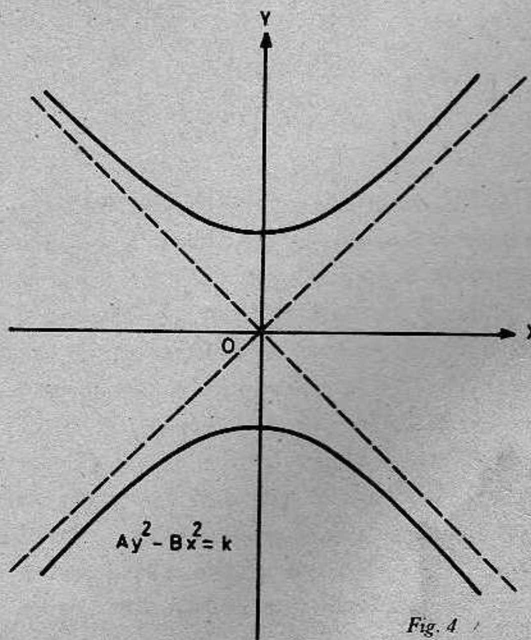


Fig. 4

Si k = 0, corresponde a la intersección de dos rectas que pasan por el origen, pues se obtiene:

$$(\sqrt{A}\cdot x + \sqrt{B}\cdot y)\,(\sqrt{A}\cdot x - \sqrt{B}\cdot y) = 0$$

Por lo tanto, una de las rectas es:

$\sqrt{A}\cdot x + \sqrt{B}\cdot y = 0$ de pendiente $m_1 = -\dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$; la otra recta es: $\sqrt{A}\cdot x - \sqrt{B}\cdot y = 0$ de pendiente $m_2 = \dfrac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$

Estas rectas se llaman *asíntotas* y las ramas de la hipérbola tienden a cortarse con ellas, aproximándose cada vez más, pero sin lograrlo jamás.

Si la ecuación está dada en la forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

las asíntotas son: $y = \frac{b}{a}\cdot x \wedge y = -\frac{b}{a}\cdot x$

En la misma forma que en las curvas estudiadas más atrás, para la hipérbola de centro (u, v) se tiene:

$$\boxed{\frac{(x-u)^2}{a^2} - \frac{(y-v)^2}{b^2} = 1} \qquad \text{(XLII)}$$

510. EJERCICIOS

1) Dibujar la hipérbola y las asíntotas de $4x^2 - 9y^2 = 36$.

Además, determinar el ángulo que forman las asíntotas entre sí.

2) Idem.: $9x^2 - 4y^2 = 36$.

3) **Dibujar la hipérbola $xy = 24$.**

4) Dibujar la hipérbola: $xy = -24$

5) Dibujar las curvas: $x^2 + y^2 = 4$; $x^2 - y^2 = 4$.

6) Dibujar la hipérbola: $9y^2 - 4x^2 = 36$.

7) La ley de Boyle-Mariette expresa que »a temperatura constante, los volúmenes que ocupa una misma masa gaseosa son inversamente proporcionales a las presiones a que está sometida«. De acuerdo con esta ley complete la tabla siguiente y grafique.

V (cm^3)		8	12	6			4	
p (atm)	16		4		3	2		24

8) Determinar gráficamente la intersección de las curvas:

$x^2 - y^2 = 1$; $2x^2 + 3y^2 = 12$

9) Determinar gráficamente si las siguientes **curvas tienen algún punto común:**

$(y - x)(y + x) = 8$; $9x^2 + 25y^2 = 225$. ¿Qué curvas son?

Observación: **la demostración de las fórmulas y mayores detalles sobre las cónicas puede consultarse el Tomo II del mismo autor.**

Resolución gráfica de sistemas de ecuaciones y de inecuaciones.

511. SISTEMAS DE ECUACIONES

Resolver geométricamente los siguientes sistemas de ecuaciones y, en seguida, compruebe algebraicamente las soluciones encontradas. Además, identifique previamente las curvas.

1) $\begin{cases} x^2 - 2y = 6 \\ 4x - y = 11 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ x - y = 2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x + 7y = 11 \\ 5x + 3y = -25 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} xy = 24 \\ 4x + 9y = 60 \end{cases}$

5) $\begin{cases} xy = 24 \\ 3y - 4x + 12 = 0 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ 9x^2 + 16y^2 = 144 \end{cases}$ 7) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 7 \\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ 9x^2 - 16y^2 = 144 \end{cases}$ 9) $\begin{cases} x = y^2 - 7 \\ x^2 + 5y^2 = 49 \end{cases}$

10) $\begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ 5x - 4y - 10 = 0 \\ x - 6y - 12 = 0 \end{cases}$

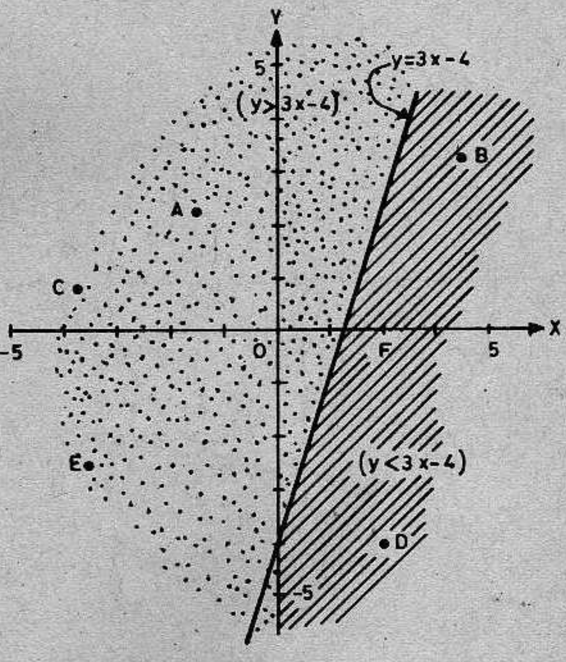
Resp.: 1) $x = 4$; $y = 5$; 2) $x' = 8$; $y' = 6$; $x'' = -6$; $y'' = -8$; 3) $x = -8$; $y = 5$; 4) $x' = 8$; $y' = 3$; $x'' = 12$; $y'' = 2$; 5) $x' = 6$; $y' = 4$; $x'' = -3$; $y'' = -8$; 6) $x = \pm 4$; $y = 0$; 7) $x = \pm 2$; $y = \pm\sqrt{3}$; 8) $x = \pm 4$; $y = 0$; 9) $x = 2$; $y = \pm 3$; 10) $x = \frac{6}{13}$; $y = -\frac{25}{13}$.

512. GRAFICOS DE INECUACIONES

A) El gráfico de la ecuación $y = 3x - 4$ divide al plano en dos semiplanos. La recta obtenida es la »frontera« entre ellos y, por lo tanto, los puntos de la recta no pertenecen a ninguno de estos semiplanos.

Si consideramos las inecuaciones:

a) $y > 3x - 4$); b) $y < 3x - 4$ veremos que hay puntos de uno de los semiplanos que satisfacen a una de estas inecuaciones y no a la otra; lo mismo sucede con los puntos del otro semiplano. En nuestro ejemplo, los puntos A, C y E que están a la »izquierda« de la recta L satisfacen a la inecuación a) y los puntos tales como B, D y F que pertenecen al semiplano de la »derecha« satisfacen a la inecuación b). Verifíquelo usted para ambos semiplanos. ¿Además, qué puede usted decir del origen?



Este ejemplo indica que para ubicar los puntos que satisfacen a una inecuación lineal del tipo: a) $y > m \cdot x + n$; b) $y < m + n \cdot x$ n es conveniente proceder en el orden siguiente.

1°. determinar la »frontera« para lo cual se dibuja la recta $y = m \cdot x + n$;

2°. se verifica si la desigualdad se cumple o no para el origen. Si se cumple, quiere decir que los puntos del semiplano que contiene al origen son los puntos pedidos. Si la desigualdad no se cumple para el origen, quiere decir que los puntos pedidos son los del otro semiplano;

3°. si la recta pasa por el origen, se considera un punto cualquiera de uno de los semiplanos y se calcula si sus coordenadas satisfacen o no la inecuación.

B) El mismo camino anterior es aplicable a inecuaciones de segundo grado o cuadráticas.

Por ejemplo: Graficar:

$x^2 + y^2 < 16$

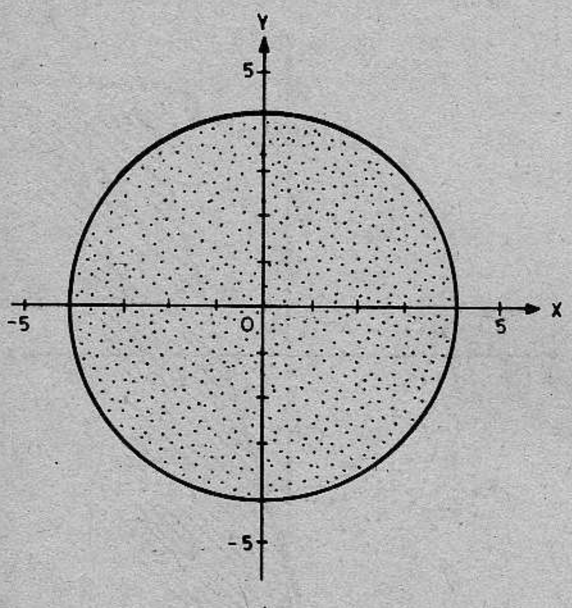
Solución: Se dibuja la circunferencia

$x^2 + y^2 = 16$

que es la »frontera«. Los puntos del círculo (región interior) cumplen con la inecuación dada:

$x^2 + y^2 < 16$

Verifíquelo usted para el origen y los puntos (2; 3), (–3, –1), (3, –5) y (–1,6).



513. EJERCICIOS

En los ejercicios siguientes es conveniente dibujar la »frontera« con línea punteada (-----) cuando no está incluida, o con línea continua (——) cuando se la incluye.

Dibujar el gráfico de las siguientes inecuaciones:

1) $y < -2x + 3$
2) $2x - 3y > 6$
3) $5x + 2y < 0$
4) $x > y$
5) $-3 < x < 2$
6) $-4 < y < -1$
7) $x + y \geq 2$
8) $2x - 5y \leq -3$
9) Dibujar en un solo gráfico: $4y \geq 3x - 12$, $7y + 4x \leq 28$.

(Para señalar mejor los semiplanos correspondientes a cada inecuación es conveniente usar lápices de colores).

10) Idem.: $2y \geq 3x$; $y \leq -5x + 4$
11) Idem.: $1 \leq x \leq 5$; $-3 \leq y \leq 4$
12) Idem.: $\{y \leq 4x + 5\} \cap \{y \geq \frac{5}{8} \cdot x - \frac{7}{4}\} \cap$ $\cap \{y \leq -\frac{1}{2} \cdot x + 5\}$
13) Idem.: $\{3x + 7y - 11 \geq 0\} \cap \{5x + 3y + 25 \leq 0\}$
14) Idem.: $\{y \geq 0{,}5 \cdot x + 9\} \cap \{3x \leq 11 - 7y\}$
15) Idem.: $\{x < 2y\} \cap \{2x \leq -5\}$
16) Graficar: $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 > 25$
17) Graficar: $x^2 + y^2 \leq 64$
18) Graficar: $(x + 5)^2 + (y - 2)^2 \leq 36$
19) Graficar: $y \geq \frac{1}{2} \cdot x^2 - 3$

Solución: 1°. Dibujar la parábola $y = 0{,}5 \cdot x^2 - 3$ (Fig. 1).

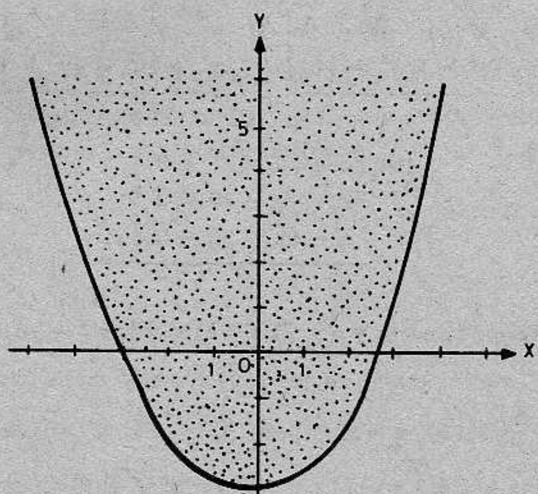


Fig. 1

2°. Verificar si las coordenadas del origen satisfacen o no la inecuación dada.

En este ejemplo, el origen (0, 0) satisface la inecuación y, por lo tanto, los puntos pedidos son los que están entre las ramas de la parábola (región interior) y la curva misma, pues la »frontera« está incluida.

20) Graficar: $xy \geq 12$

21) Graficar: $\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 \leq 25 \\ x + 2y > 4 \end{array} \right|$

22) Graficar: $\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 \leq 36 \\ x^2 + y^2 > 9 \end{array} \right|$

23) Graficar: $\left. \begin{array}{l} 16x^2 + 9y^2 \leq 144 \\ y > x^2 - 3 \end{array} \right|$

24) Graficar y »achurar« la región que cumpla con las inecuaciones:

$(x-1)^2 + (y+3)^2 < \sqrt{5};\ x > 2$

25) Graficar y »achurar«: $\left. \begin{array}{l} 4x^2 + 9y^2 \leq 36 \\ x^2 + y^2 \geq 16 \end{array} \right|$

26) Graficar y »achurar«:

$\{x^2 + 8x + y^2 - 10y + 1 < 0\} \cap$

$\cap\ \{x^2 - 2x + y^2 + 4y - 21 < 0\}$

OPTATIVO

514. ECUACIONES DE LA TANGENTE A UNA CURVA

Tomaremos, primeramente, la ecuación de la tangente a una circunferencia.

Sea $P_o(x_o, y_o)$ un punto de la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ (A)

Además, si $P_1(x_1, y_1)$ es otro punto de ella, la ecuación de la secante que pasa por estos dos puntos es (N° 481):

$$y - y_o = \frac{y_1 - y_o}{x_1 - x_o} \cdot (x - x_o) \qquad \text{(B)}$$

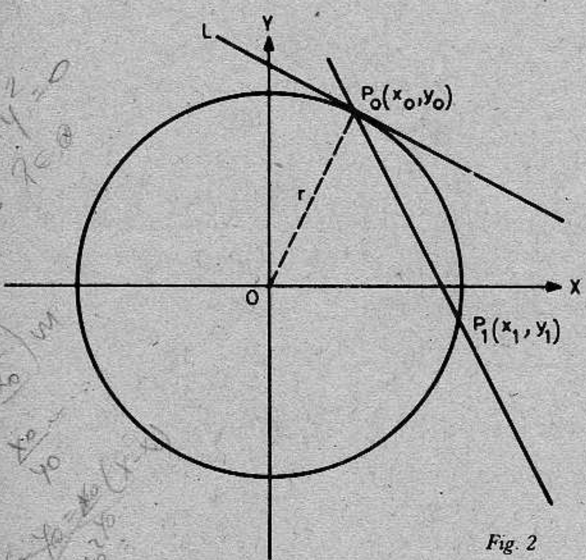


Fig. 2

Como P_o y P_1 pertenecen a la circunferencia A), sus coordenadas deben satisfacer a su ecuación, es decir:

$$\left.\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 &= r^2 \\ x_o^2 + y_o^2 &= r^2 \end{aligned}\right\} -$$

$$x_1^2 - x_o^2 + y_1^2 - y_o^2 = 0$$

$$(x_1 + x_o)(x_1 - x_o) + (y_1 + y_o)(y_1 - y_o) = 0$$

de donde: $\frac{y_1 - y_o}{x_1 - x_o} = -\frac{x_1 - x_o}{y_1 - y_o}$

Luego, la ecuación B) de la secante $\overline{P_oP_1}$ queda:

$$\boxed{y - y_o = -\frac{x_1 + x_o}{y_1 + y_o} \cdot (x - x_o)} \qquad \text{(XLIII)}$$

Al girar la secante P_oP_1 en torno al punto P_o de modo que P_1 tienda a P_o, el valor de x_1 se hace igual a x_o, el valor de y_1 se iguala con el de y_o y la secante P_oP_1 se convierte en la tangente L (Fig. 2). Con estas consideraciones obtenemos sucesivamente:

$$y - y_o = -\frac{2x_o}{2y_o} \cdot (x - x_o)$$

$$y \cdot y_o - y_o^2 = -x \cdot x_o + x_o^2$$

$$x \cdot x_o + y \cdot y_o = x_o^2 + y_o^2$$

Pero, al pertenecer P_o a la circunferencia resulta $x_o^2 + y_o^2 = r^2$; con esto la ecuación de la tangente en el punto P_o de la circunferencia es:

$$\boxed{x \cdot x_o + y \cdot y_o = r^2} \qquad \text{(XLIV)}$$

Esta ecuación se obtiene fácilmente »desdoblando« la ecuación de la circunferencia dada en $x \cdot x + y \cdot y = r^2$; en seguida, basta reemplazar uno de los factores de las coordenadas variables por las del punto de tangencia (x_o, y_o).

Otra demostración: (para los alumnos que saben Cálculo Diferencial).

La ecuación de la tangente en el punto P_o de la circunferencia dada es:

a) $y - y_o = m \cdot (x - x_o)$ que corresponde al haz de rectas por este punto (N° 480).

Pero la pendiente »m« equivale a la derivada de la curva (circunferencia en este caso) en el punto dado P_o. Por lo tanto, al derivar la ecuación: $x^2 + y^2 = r^2$ se obtiene:

$2x + 2y \cdot y' = 0$ de donde: $y' = -\frac{x}{y}$

Luego: $m = -\frac{x_o}{y_o}$; este valor sustituido en a) da:

$y - y_o = -\frac{x_o}{y_o} \cdot (x - x_o)$, etc., pues basta seguir como se hizo más atrás.

Este procedimiento es general. Por ejemplo, para la parábola: $y^2 = 2p \cdot x$ la ecuación de la tangente en P_o es:

$y - y_o = m \cdot (x - x_o)$ que es el haz de rectas por P_o.

Pero $m = y'$; por lo tanto, al derivar la ecuación de la parábola obtenemos $2y \cdot y' = 2p$ de donde: $y' = \frac{p}{y} = m$.

En el punto P_o se tiene: $m = \frac{p}{y_o}$ con lo que resulta:

$$y - y_o = \frac{p}{y} \cdot (x - x_o)$$

$$y \cdot y_o - y_o^2 = xp - px_o$$

Como P_o pertenece a la parábola dada, obtenemos: $y_o^2 = 2p \cdot x_o$.

Con esto queda:

$$y \cdot y_o - 2p \cdot x_o = p \cdot x - p \cdot x_o$$

de donde: $\boxed{y \cdot y_o = p \cdot (x + x_o)}$ (XLV)

Esta es la ecuación de la tangente a la parábola $y^2 = 2p \cdot x$ en el punto $P_o(x_o, y_o)$ de ella.

Este resultado indica que la ecuación $y^2 = 2p \cdot x$ se »desdobla« en $y \cdot y = p \cdot (x + x)$ bastando reemplazar una de las coordenadas variables por las fijas del punto dado P_o.

Este mismo camino seguiremos para determinar la ecuación de la tangente a la circunferencia: $x^2 + y^2 - 2ux - 2vy + k = 0$ (ecuación general), en el punto P_o (x_o, y_o).

Como la tangente es una recta que pasa por P_o, su ecuación es:

A) $y - y_o = m \cdot (x - x_o)$

Pero la pendiente de la tangente es $m = y'$; para determinarla basta derivar la ecuación de la circunferencia obteniéndose:

$$2x + 2y \cdot y' - 2u - 2v \cdot y' = 0$$

De aquí resulta: $y' = \frac{u - x}{y - v}$

Para P_o es: $y' = \frac{u - x_o}{y_o - v}$

Al sustituir este valor en A) resulta:

$$y - y_o = \frac{u - x_o}{y_o - v} \cdot (x - x_o)$$

de donde:

$$y \cdot y_o - v \cdot y + v \cdot y_o - y_o^2 = u \cdot x - x \cdot x_o - u \cdot x_o + x_o^2$$

$$x_o^2 + y_o^2 - x_o \cdot x - u \cdot x_o + v \cdot y - v \cdot y_o - y \cdot y_o + u \cdot x = 0 \quad \text{(B)}$$

Pero como P_o pertenece a la circunferencia, se obtiene:

$$x_o^2 + y_o^2 - 2u \cdot x_o - 2v \cdot y_o + k = 0 \quad \text{(C)}$$

Al efectuar la resta (C − B) resulta:

(XLVI)

$$\boxed{x \cdot x_o + y \cdot y_o - u \cdot (x + x_o) - v \cdot (y + y_o) + k = 0}$$

Esta es la ecuación de la tangente a la circunferencia dada en el punto P_o (x_o, y_o) de ella.

Se obtiene también, como en los ejemplos anteriores, »desdoblando« la ecuación de la circunferencia dada.

En general, si la ecuación de la curva es:

$$A \cdot x^2 + B \cdot y^2 + 2C \cdot xy + 2D \cdot x + 2E \cdot y + F = 0$$

la ecuación de la tangente en un punto P_o (x_o, y_o) de la curva, se obtiene »desdoblando« la ecuación anterior en la forma:

$$Ax \cdot x + By \cdot y + C \cdot (xy + xy) + D \cdot (x + x) + \\ + E \cdot (y + y) + F = 0$$

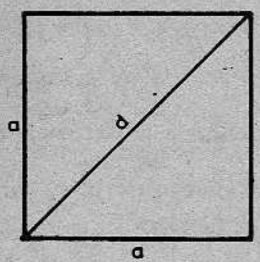
En seguida, basta reemplazar parcialmente las coordenadas variables por las del punto dado P_o de tangencia (obsérvese el reemplazo en xy):

(XLVII)

$$\boxed{\begin{array}{l} Ax \cdot x_o + By \cdot y_o + C(x \cdot y_o + x_o \cdot y) + D(x + x_o) + \\ + E(y + y_o) + F = 0 \end{array}}$$

A) *TRIANGULOS Y CUADRILATEROS*

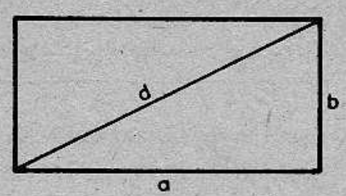
1) CUADRADO



lado $= a$; perímetro $= 4a$; diagonal $d = a\sqrt{2}$

área $A = a^2 = \frac{1}{2} d^2$

2) RECTANGULO



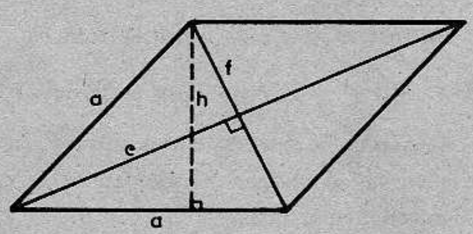
lados: $a \wedge b$

perímetro $= 2 \cdot (a + b)$

área $A = a \cdot b$

diagonal $d = \sqrt{a^2 + b^2}$

3) ROMBO



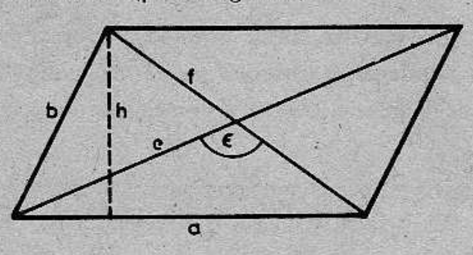
lado $= a$; altura $= h$; diagonales $= e \wedge f$

perímetro $= 4a$

altura $h = a \cdot \operatorname{sen} \alpha$

área $A = a \cdot h = \frac{1}{2}\, e \cdot f = a^2 \cdot \operatorname{sen} \alpha$

4) ROMBOIDE (paralelógramo)



lados $= a \wedge b$; h = altura; diagonales $= e \wedge f$

perímetro $= 2 \cdot (a + b)$

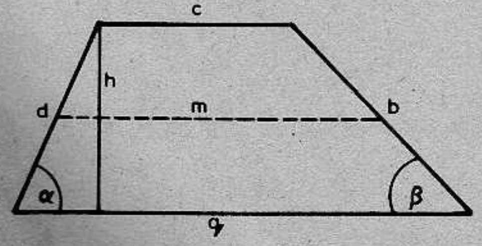
$h = b \cdot \operatorname{sen} \alpha$

$e = \sqrt{(a + h \cdot \cot \alpha)^2 + h^2}$

$f = \sqrt{(a - h \cdot \cot \alpha)^2 + h^2}$

área $A = a \cdot h = ab \cdot \operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2}\, ef \cdot \operatorname{sen} \epsilon$

5) TRAPECIO



lados $= a, b, c, d$; altura $= h$; mediana $= m$

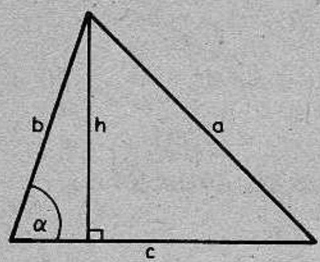
perímetro $= a + b + c + d = a + c + h \cdot \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta} \right)$

$h = d \cdot \operatorname{sen} \alpha = b \cdot \operatorname{sen} \beta$

$m = \frac{a + c}{2}$

área $A = \left(\frac{a + c}{2} \right) \cdot h = m \cdot h$

6) TRIANGULO



lados = a, b, c; r = radio circunferencia circunscrita;

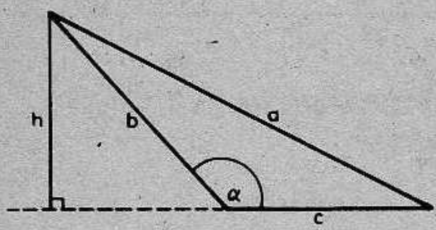
ρ = radio circunferencia inscrita;

ρ_a, ρ_b, ρ_c = radios circunferencias ex inscritas

$2s$ = perímetro = $a + b + c$

s = semiperímetro $= \frac{a+b+c}{2}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$

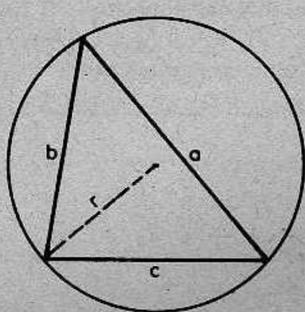


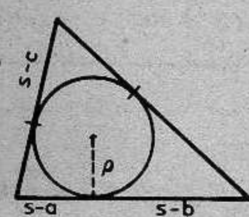
$$\text{área } A = \frac{c \cdot h}{2} = \frac{1}{2}\, bc \cdot \text{sen}\,\alpha = \frac{abc}{4r} = s \cdot \rho =$$

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = (s-a) \cdot \rho_a = \sqrt{\rho \cdot \rho_a \cdot \rho_b \cdot \rho_c}$$

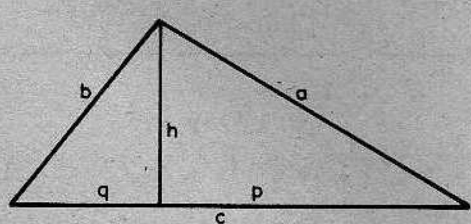
$$\rho = \frac{1}{s} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$r = \frac{abc}{4 \cdot \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$





7) TRIANGULO RECTANGULO



$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$a^2 = p \cdot c$$

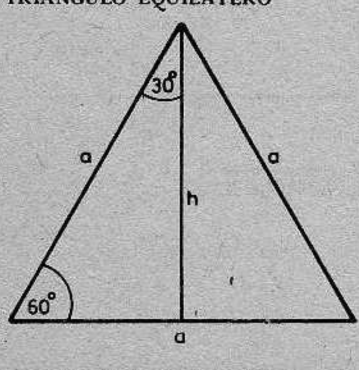
$$b^2 = q \cdot c$$

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{p}{q}$$

$$h^2 = p \cdot q$$

$$\text{área } A = \frac{1}{2}\, ab = \frac{1}{2}\, c \cdot h$$

8) TRIANGULO EQUILATERO



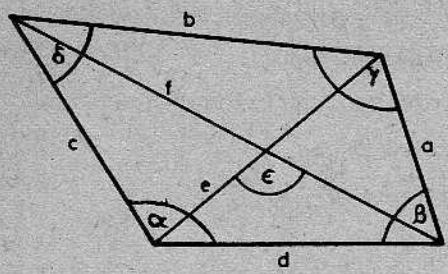
lado = a; altura = h

perímetro = 3a

altura $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$

área $A = \frac{1}{2}\, a \cdot h = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$

9) TRAPEZOIDE



perímetro = a + b + c + d

ángulos = $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$

área A = $\frac{1}{2}$ ef·sen ϵ

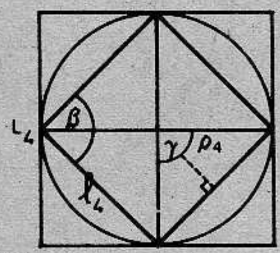
ϵ = ángulo que forman las diagonales e y f.

B) *POLIGONOS REGULARES INSCRITOS O CIRCUNSCRITOS EN UNA CIRCUNFERENCIA DE RADIO »r«*

Abreviaturas:

- l = lado polígono inscrito; ρ = apotema; α = ∡ del centro;
- L = lado polígono circunscrito; β = ∡ del polígono;
- A = área; p = perímetro; V = volumen engendrado.

10) CUADRADO



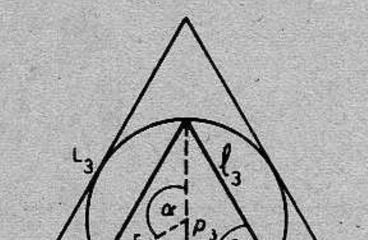
$l_4 = r\sqrt{2}$; $p_4 = 4r\sqrt{2}$; $\rho_4 = \frac{r}{2}\sqrt{2}$;

$\alpha_4 = 90°$; $\beta_4 = 90°$; $L_4 = 2r$

A_4 (inscrito) = $2r^2$; A_4 = (circunscrito) = $4r^2$

V (en torno al lado) = πl^3

11) TRIANGULO EQUILATERO



$l_3 = r\sqrt{3}$; $p_3 = 3r\sqrt{3}$; $\rho_3 = \frac{r}{2}$; $L_3 = 2r\sqrt{3}$

$\alpha_3 = 120°$; $\beta = 60°$;

A_3 (inscrito) = $\frac{3}{4} r^2 \cdot \sqrt{3}$

A_3 (circunscrito) = $3r^2 \cdot \sqrt{3}$

V (en torno al lado) = $\frac{1}{4}\pi l^3$

12) PENTAGONO

$l_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$; $\rho_5 = \frac{r}{4}\cdot(\sqrt{5}+1) = \frac{r}{4}\sqrt{6+2\sqrt{5}}$

$L_5 = 2r\cdot\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$; $\alpha_5 = 72°$; $\beta_5 = 108°$

A_5 (inscrito) = $\frac{5}{8} r^2 \cdot \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$

V (en torno al lado) = $\frac{1}{4}\pi l^3 \cdot (5 + 2\sqrt{5})$

13) HEXAGONO

$l_6 = r$; $p_6 = 6r$; $\rho_6 = \frac{r}{2}\sqrt{3}$; $\alpha_6 = 60°$; $\beta_6 = 120°$;

$L_6 = \frac{2}{3} r \cdot \sqrt{3}$; A_6 (inscrito) $= \frac{3}{2} r^2 \cdot \sqrt{3}$

A_6 (circunscrito) $= 2r^2 \cdot \sqrt{3}$

V (en torno al lado) $= \frac{9}{2}\pi l^3$

14) OCTOGONO

$l_8 = r\sqrt{2-\sqrt{2}}\ (=)\ 0{,}765 \cdot r$; $p_8\ (=)\ 6{,}122 \cdot r$

$\rho_8 = \frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\ (=)\ 0{,}924 \cdot r$; $\alpha_8 = 45°$; $\beta_8 = 135°$

$L_8 = 2r \cdot (\sqrt{2} - 1)\ (=)\ 0{,}8284 \cdot r$

A_8 (inscrito) $= 2r^2 \cdot \sqrt{2}$

A_8 (circunscrito) $= 8r^2 \cdot (\sqrt{2} - 1)\ (=)\ 3{,}314 \cdot r^2$

V (en torno al lado) $= 2\pi l^3 \cdot (3 + 2\sqrt{2})\ \ (=)\ 36{,}62 \cdot l^3$

15) DECAGONO

$l_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)\ (=)\ 0{,}618 \cdot r$

$p_{10}\ (=)\ 6{,}18 \cdot r$; $\alpha_{10} = 36°$; $\beta_{10} = 144°$

$\rho_{10} = \frac{r}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\ (=)\ 0{,}951 \cdot r$

$L_{10} = \frac{2}{5} r \cdot \sqrt{25 - 10\sqrt{5}}\ (=)\ 0{,}649 \cdot r$

A_{10} (inscrito) $= \frac{5}{4} r^2 \cdot \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\ (=)\ 2{,}939 \cdot r$

V (en torno a un lado) $= \frac{5}{2}\pi \cdot (5 + 2\sqrt{5}) \cdot l^3\ (=)\ 74{,}394 \cdot l^3$

16) DODECAGONO

$l_{12} = r\sqrt{2 - \sqrt{3}} = \frac{1}{2} r(\sqrt{6} - \sqrt{2})\ (=)\ 0{,}518 \cdot r$

$p_{12}\ (=)\ 6{,}216 \cdot r$; $\alpha_{12} = 30°$; $\beta_{12} = 150°$

$\rho_{12} = \frac{r}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}} = \frac{1}{4} r\ (\sqrt{6} + \sqrt{2})\ (=)\ 0{,}966 \cdot r$

$L_{12} = 2r \cdot (2 - \sqrt{3})\ (=)\ 0{,}5359 \cdot r$

A_{12} (inscrito) $= 3r^2$

A_{12} (circunscrito) $= 12r^2 \cdot (2 - \sqrt{3})\ (=)\ 3{,}2154 \cdot r^2$

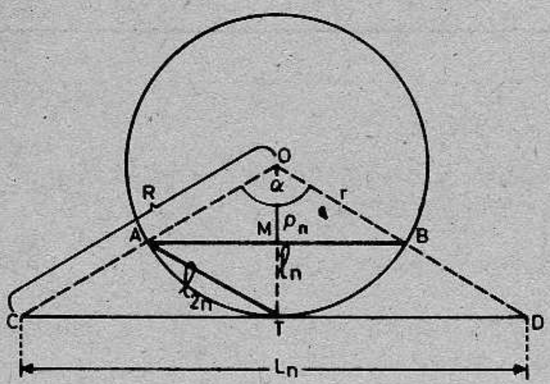
V (en torno a un lado) $= 3\pi \cdot (7 + 4\sqrt{3}) \cdot l^3\ (=)\ 131{,}27 \cdot l^3$

17) PENTADECAGONO

$$l_{15} = \frac{r}{4} \cdot \left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right) + \sqrt{3} - \sqrt{15}) \; (=) \, 0{,}416 \cdot r$$

$$\alpha_{15} = 24^\circ ; \beta_{15} = 156^\circ .$$

18) FORMULAS GENERALES



n = número de lados

l_n = $\overline{AB}$ (lado polígono inscrito de »n« lados)

L_n = $\overline{CD}$ (lado polígono circunscrito de »n« lados)

ρ_n = $\overline{OM}$ (apotema del polígono de »n« lados)

l_{2n} = $\overline{AT}$ (lado polígono de doble número de lados respecto al de »n« lados)

A_n = área del polígono regular inscrito.

A_c = área del polígono regular circunscrito.

$$l_{2n} = r\sqrt{2 - \sqrt{4 - \left(\frac{l_n}{r}\right)^2}}$$

$$l_n = l_{2n} \cdot \sqrt{4 - \left(\frac{l_{2n}}{r}\right)^2} \qquad \rho_n = \frac{r}{2} \cdot \sqrt{4 - \left(\frac{l_n}{r}\right)^2}$$

$$L_n = \frac{2 \cdot l_n}{\sqrt{4 - \left(\frac{l_n}{r}\right)^2}}; \qquad A_n = \frac{n \cdot l_n \cdot \rho_n}{2} = \frac{1}{4}\, n \cdot l_n \cdot \cot \frac{180^\circ}{n} = \frac{1}{2}\, n \cdot r^2 \cdot \operatorname{sen} \frac{360^\circ}{n} = \boxed{n\, \rho_n^{\,2} \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}$$

$$A_c = \frac{n \cdot r \cdot L_n}{2}; \qquad \text{perímetro } p = n \cdot l_n = 2nr \cdot \operatorname{sen} \frac{180^\circ}{n} = 2nr \cdot \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = 2n \cdot \rho_n \cdot \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$$

$$R = \frac{2r}{\sqrt{4 - \left(\frac{l_n}{r}\right)^2}} \qquad r = \frac{1}{2}\, l_n \cdot \operatorname{cosec} \frac{180^\circ}{n} \qquad \beta_n = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n} = 180^\circ - \alpha_n$$

$$\alpha_n = \frac{360^\circ}{n}$$

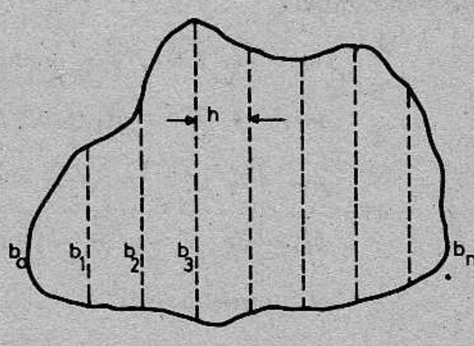
19) Cualquier polígono o cualquier figura

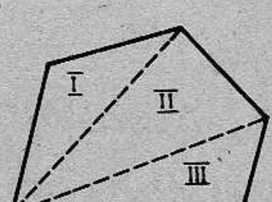
a) Se descompone en triángulos:

$$A = \triangle\, I + \triangle\, II + \triangle\, III$$

b) se descompone en trapecios de igual altura »h«:

$$A = h \cdot (\; b_0 + b_1 + b_2 + \ldots + \; b_n)$$





C) EL CIRCULO, LA ELIPSE Y LA PARABOLA

20) CIRCULO

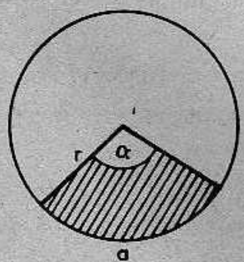
perímetro: $C = 2\pi r = \pi d$

área $A = \pi r^2 = \frac{1}{4}\pi d^2$

r = radio

d = diámetro

21) Sector circular



a = arco; α = ∡ del centro; 1 radian = 57°,3;

1° = 0,01745 rad.

$A = \frac{\alpha^\circ}{360^\circ} \cdot \pi r^2 = \frac{1}{2} ar$

$a = \alpha \cdot r$ (α en radianes)

$A = \frac{1}{2} r^2 \cdot \alpha$ (α en radianes)

22) SEGMENTO CIRCULAR

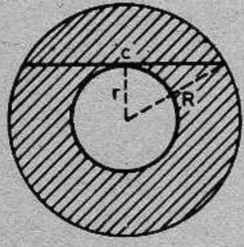
a = arco; c = cuerda; f = flecha

$A = \text{sector} - \triangle = \frac{\alpha^\circ}{360^\circ} \cdot \pi r^2 - \frac{c \cdot (r - f)}{2}$

$A = \frac{1}{2} r \cdot (a - r \cdot \operatorname{sen} \alpha)$

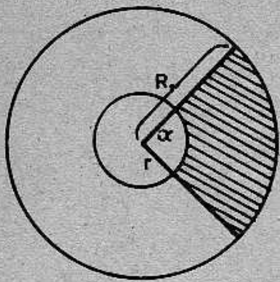
$A = \frac{1}{2} r^2 \cdot (\alpha - \operatorname{sen} \alpha)$ (α en radianes)

23) ANILLO O CORONA CIRCULAR



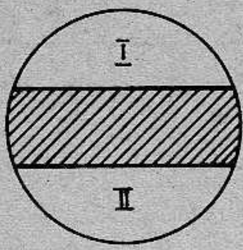
$A = \pi \cdot (R^2 - r^2) = \frac{1}{4}\pi c^2$

24) TRAPECIO CIRCULAR



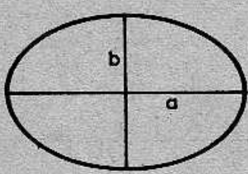
$$A = \frac{\alpha \cdot \pi}{360^\circ} \cdot (R^2 - r^2)$$

25) ZONA CIRCULAR



A = círculo − segmento I − segmento II

26) ELIPSE

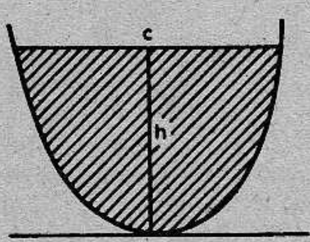


semiejes: $a \wedge b$

$A = \pi \cdot ab$

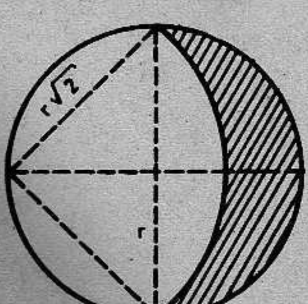
perímetro $(=) \pi \cdot (a + b)$

27) SEGMENTO DE PARABOLA



Area $= \frac{2}{3} \cdot c \cdot h$

28) MEDIA LUNA



$A = r^2$

perímetro $= \pi\, r\, (1 + \frac{1}{2}\sqrt{2})\ (=)\ 1{,}707\, \pi\, r$

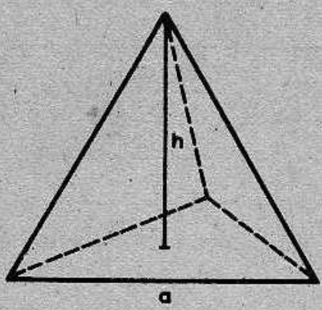
D) POLIEDROS REGULARES

a = arista; R = radio esfera circunscrita; r = radio esfera inscrita.

A_t = área total; V = volumen.

---

29) TETRAEDRO REGULAR



$A_t = a^2 \cdot \sqrt{3}\,(=)\,1{,}732 \cdot a^2$

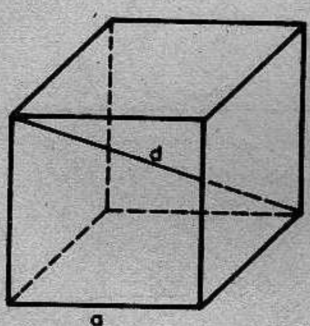
$h = \frac{a}{3}\sqrt{6}$

$V = \frac{a^2}{12}\sqrt{2} = 1{,}118 \cdot a^3$

$R = 0{,}612 \cdot a$; $\quad r = 0{,}204 \cdot a$

---

30) HEXAEDRO REGULAR O CUBO



$A = 6 \cdot a^2$

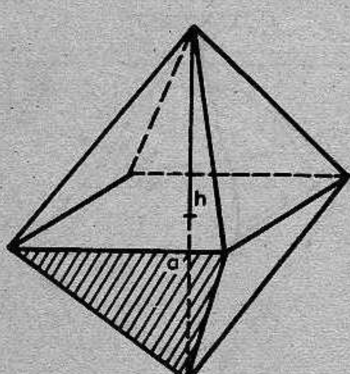
$d = a\sqrt{3}$

$V = a^3$

$R = 0{,}866 \cdot a$; $r = 0{,}5 \cdot a$

---

31) OCTAEDRO REGULAR



$A = 2a^2 \cdot \sqrt{3} = 3{,}464 \cdot a^2$

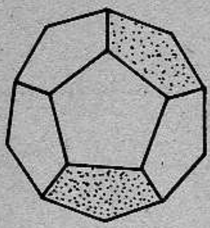
$h = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{2}$

$V = \frac{a^3}{3}\sqrt{2}\,(=)\,0{,}471 \cdot a^3$

$R = 0{,}707 \cdot a$; $r = 0{,}408 \cdot a$

---

32) DODECAGONO REGULAR



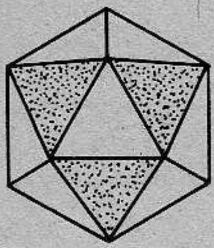
$A = 3a^2 \cdot \sqrt{25 + 10 \cdot \sqrt{5}} = 20,646 \cdot a^2$

$V = \frac{a^3}{4}(15 + 7 \cdot \sqrt{5}) = 7,663 \cdot a^3$

$R = 1,401 \cdot a$

$r = 1,114 \cdot a$

33) ICOSAEDRO REGULAR



$A = 5a^2 \cdot \sqrt{3} = 8,660 \cdot a^2$

$V = \frac{5}{12} a^3 \cdot (3 + \sqrt{5}) = 2,182 \cdot a^3$

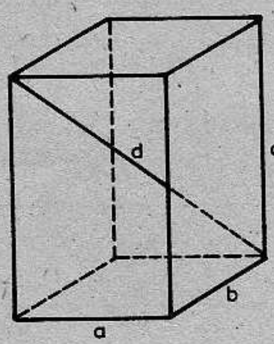
$R = 0,951 \cdot a$; $r = 0,756 \cdot a$

E) TIPO PRISMAS Y PIRAMIDES

A_l = área lateral; A_t = área total; a = arista basal; l = arista lateral; h = altura;

A_b o B = área basal; 2s = perímetro basal

34) PARALELEPIPEDO RECTANGULAR



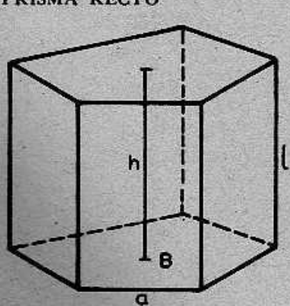
$A_l = 2c \cdot (a + b)$

$A_t = 2 \cdot (ab + ac + bc)$

$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

$V = abc$

35) PRISMA RECTO

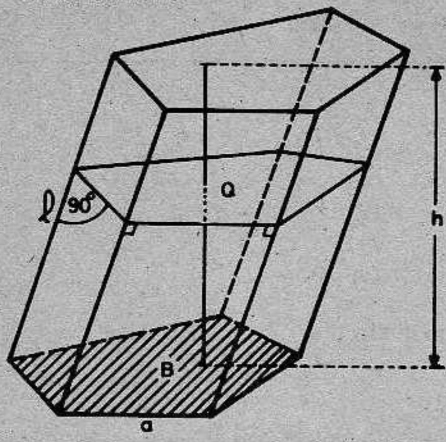


$A_l = 2s \cdot l$

$V = B \cdot h$

$A_t = A_l + 2 \cdot B$

36) PRISMA OBLICUO



Q = sección recta (es perpendicular a las aristas laterales)

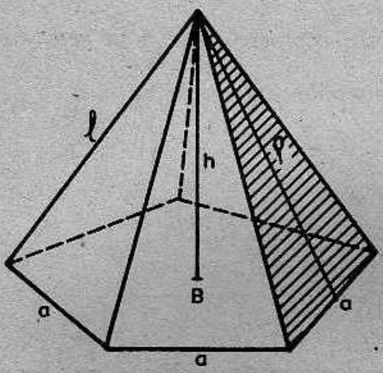
p = perímetro de la sección recta Q

$A_l = p \cdot l$

$A_t = p \cdot l + 2 \cdot B$

$V = B \cdot h$

37) PIRAMIDE RECTA-REGULAR



ρ = apotema lateral

s = semiperímetro basal

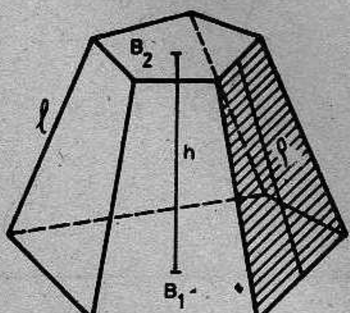
l = arista lateral

$A_l = s \cdot \rho$

$A_t = s \cdot \rho + B$

$V = \frac{1}{3} B \cdot h$ (cualquier pirámide)

38) TRONCO DE PIRAMIDE RECTA-REGULAR

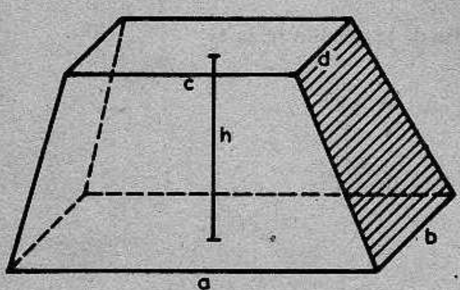


$A_l = (s_1 + s_2) \cdot \rho$

$A_t = A_l + B_1 + B_2$

$V = \frac{h}{3} \cdot (B_1 + B_2 + \sqrt{B_1 \cdot B_2})$

39) ARTESA (Prismoide)

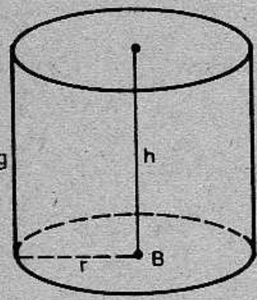


$V = \frac{h}{6} \cdot (2ab + bc + ad + 2cd)$

F) CUERPOS REDONDOS

g = generatriz; h = altura; R y r = radios.

40) CILINDRO RECTO



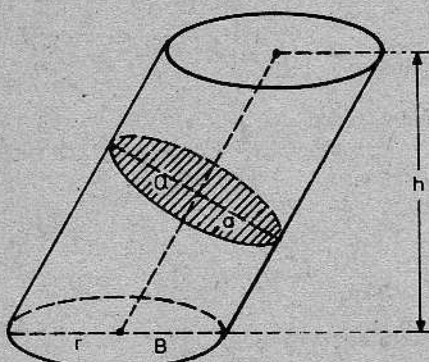
A_l (manto) $= 2\pi r \cdot g$

$B = \pi r^2$

$A_t = 2\pi r \cdot (g + r)$

$V = \pi r^2 \cdot h$ (cualquier cilindro)

41) CILINDRO OBLICUO



Q = sección recta (perpendicular a la generatriz)

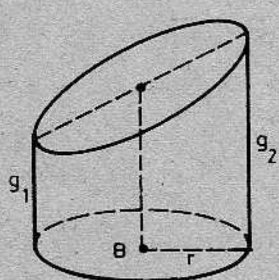
a = radio de la sección recta

$A_l = 2\pi a \cdot g$

$A_t = 2\pi \cdot (a \cdot g + r^2)$

$V = \pi r^2 \cdot h = \pi a^2 \cdot g$

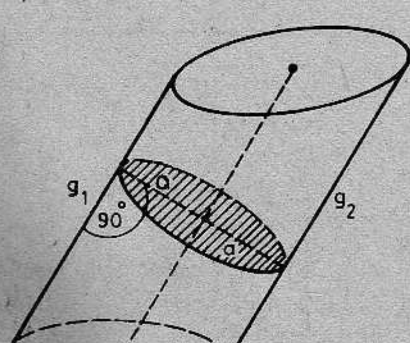
42) CILINDRO RECTO TRUNCADO



$A_l = \pi r \cdot (g_1 + g_2)$

$V = \frac{1}{2} \pi r^2 \cdot (g_1 + g_2)$

43) CILINDRO OBLICUO TRUNCADO

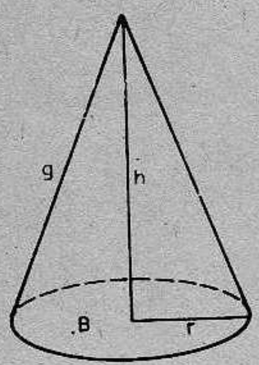


a = radio de la sección recta Q

$A_l = \pi a \cdot (g_1 + g_2)$

$V = \frac{1}{2} \pi a^2 \cdot (g_1 + g_2)$

44) CONO RECTO



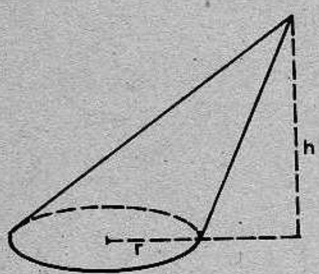
A_l (manto) $= \pi r \cdot g = \pi r \cdot \sqrt{r^2 + h^2}$

$A_t = \pi r \cdot (g + r)$

$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$ (recto u oblicuo)

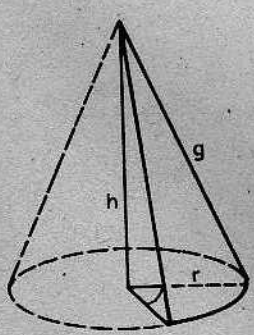
$g = \sqrt{r^2 + h^2}$

45) CONO OBLICUO



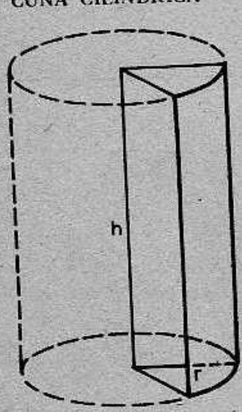
$V = \frac{1}{3} B \cdot h$

46) CUÑA CONICA



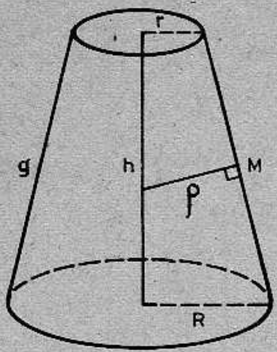
$V = \frac{\pi r^2 \cdot \alpha}{1080} \cdot h$

47) CUÑA CILINDRICA



$V = \frac{\pi r^2 \cdot \alpha}{360} h$

48) TRONCO DE CONO RECTO

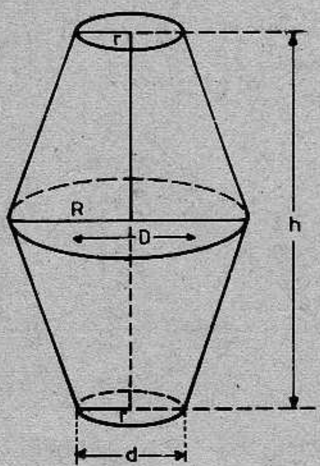


$A_l = \pi g \cdot (R + r) = 2\pi \rho \cdot h$ ($\rho \perp g$ en punto medio M)

$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + R \cdot r)$ (recto u oblicuo)

$g = \sqrt{(R - r)^2 + h^2}$

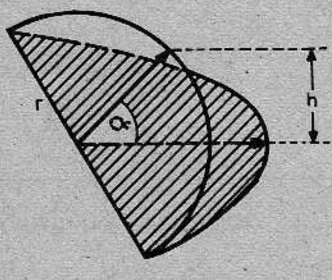
49) TONEL



$V = \frac{\pi h}{3}(2R^2 + r^2)$

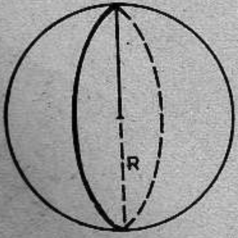
$V = \frac{\pi h}{12}(2 \cdot D^2 + d^2)$

50) UÑA CILINDRICA



$V = \frac{2}{3} r^2 \cdot h$

51) ESFERA

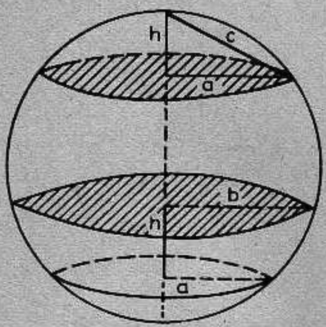


R = radio; D = diámetro

$A = 4\pi R^2 = \pi D^2$

$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\pi}{6} D^3$

52) CASQUETE, ZONA Y SEGMENTO ESFERICOS



Casquete: $A = 2\pi R \cdot h = \pi \cdot c^2$

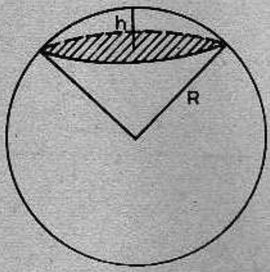
Zona $A = 2\pi R \cdot h$

Segmento de 1 base: $V = \frac{\pi h}{6} \cdot (h^2 + 3a^2) = \frac{\pi h^2}{3} \cdot (3R - h)$

Segmento de 2 bases o »rebanada«:

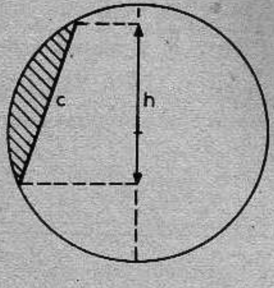
$$V = \frac{\pi h}{6} \cdot (h^2 + 3a^2 + 3b^2)$$

53) SECTOR ESFERICO



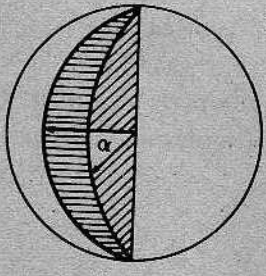
$$V = \frac{2}{3} \pi R^2 \cdot h$$

54) ANILLO ESFERICO



$$V = \frac{\pi}{6} \cdot c^2 \cdot h$$

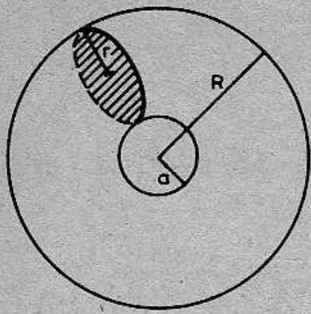
55) HUSO Y CUÑA ESFERICOS (Inglete)



Huso esférico: $A = \pi R^2 \cdot \frac{\alpha}{90}$

Cuña (inglete) $V = \pi R^3 \cdot \frac{\alpha}{270}$

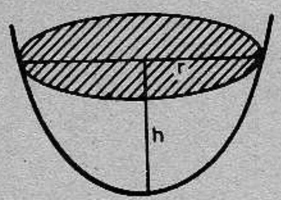
56) TORO



$$A = 4\pi^2 r \cdot (R - r) = \pi^2 \cdot (R^2 - a^2)$$

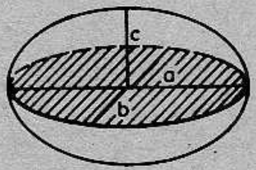
$$V = 2\pi^2 r^2 \cdot (R - r) = \frac{1}{4}\pi^2 \cdot (R + a)(R - a)^2$$

57) PARABOLOIDE



$$V = \frac{1}{2} \pi r^2 \cdot h$$

58) ELIPSOIDE



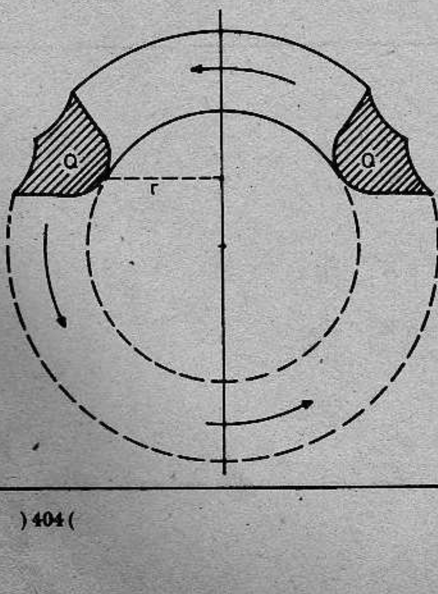
$$V = \frac{4}{3} \pi abc$$

59) FORMULA DE SARRUS. Es válida para calcular el volumen del prismoide, prisma, cilindro, pirámide, tronco de pirámide, cono, tronco de cono, esfera, segmento de esfera, elipsoide y segmento de elipsoide.

$$V = \frac{h}{6} \cdot (B_1 + B_2 + 4 \cdot B)$$

En esta fórmula B_1 y B_2 son las áreas de las bases paralelas entre sí y situadas a la distancia »h« una de la otra. (B_1 o B_2 pueden ser nulas, como en el cono; o ambas nulas como en la esfera).

60) TEOREMA DE GUILDIN (cuerpo de revolución)



Q = área de la figura que gira en torno al eje;

l = longitud de la línea o perímetro de la figura que gira;

A = área de la superficie engendrada;

V = volumen del cuerpo engendrado;

r = distancia del centro de gravedad de la figura que gira al eje de rotación.

$$A = 2\pi r \cdot l$$

$$V = 2\pi r \cdot Q$$

61) VOLUMEN ENGENDRADO POR UN TRIANGULO al girar en torno al lado »a«:

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{a}$$

$$\text{siendo } s = \frac{a+b+c}{2}$$

G) GEOMETRIA ANALITICA

62) Distancia entre dos puntos

$A(x_1, y_1) \wedge B(x_2, y_2)$ en el plano:

$$d = +\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

63) Distancia entre dos puntos $A(x_1, y_1) \wedge B(x_2, y_2)$ del espacio:

$$d = +\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

64) Distancia de un punto $P(x_1, y_1)$ a la recta $y = mx + n$ o a la recta $ax + by + c = 0$:

$$d = \frac{|y_1 - mx_1 \quad n|}{\sqrt{1+m^2}} \quad ; d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

65) Distancia del punto $P(x_1, y_1)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

66) Distancia entre dos planos paralelos:

$Ax + By + Cz + D = 0$; $Ax + By + Cz + D' = 0$:

$$d = \frac{|D - D'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

67) Area del $\triangle$ ABC de vértices $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$:

$$\triangle = \frac{1}{2}\left| (x_3 - x_2) \cdot y_1 + (x_1 - x_3) \cdot y_2 + (x_2 - x_1) \cdot y_3 \right|$$

o bien:

$$\triangle = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad ; \triangle = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

68) Area que tiene un vértice en el origen:

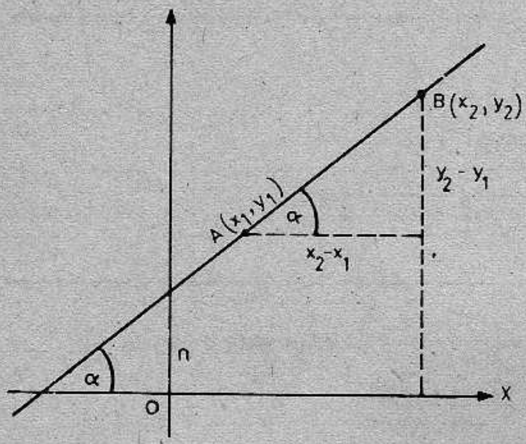
$$\triangle = \frac{1}{2} \cdot |(x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot x_2)|$$

69) Area del cuadrilátero ABCD de vértices

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, $D(x_4, y_4)$:

$$\text{área} = \frac{1}{2} \cdot |(x_4 - x_2) \cdot y_1 + (x_1 - x_3) \cdot y_2 +$$
$$+ (x_2 - x_4) \cdot y_3 + (x_3 - x_1) \cdot y_4|$$

70) Pendiente o inclinación de una recta:



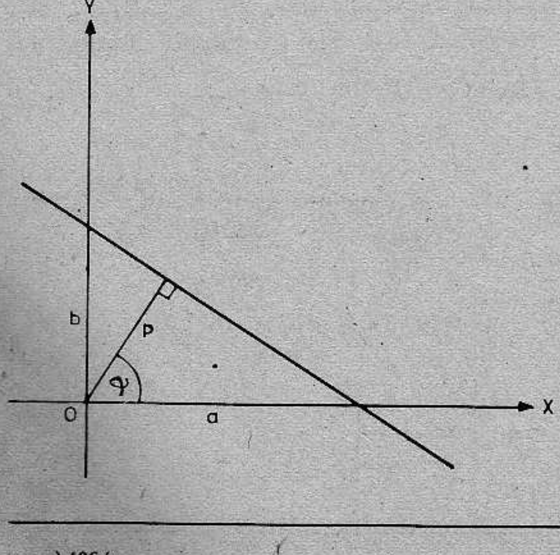
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \operatorname{tg} \alpha$$

m = pendiente o coeficiente angular

n = coeficiente de posición

α = inclinación (en grados o radianes)

71) Ecuaciones de la recta:



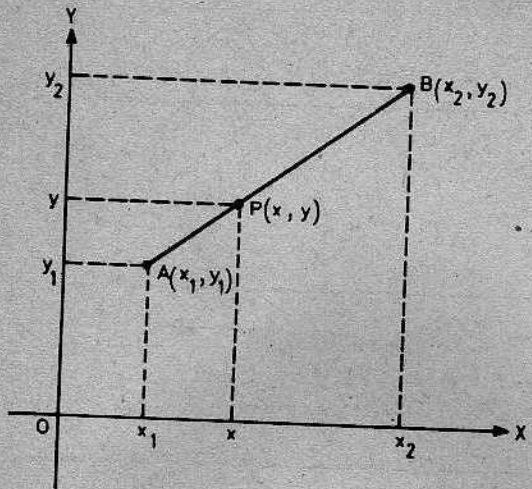
General: $Ax + By + C = O$

Principal: $y = mx + n$

De segmentos: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

Normal: $x \cdot \cos\varphi + y \cdot \operatorname{sen}\varphi = p$

72) Coordenadas del punto P(x, y) que divide a un trazo $\overline{AB}$ en la razón $\lambda = \frac{m}{n}$ de modo que



$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \lambda$$

$$x = \frac{x_1 + \lambda \cdot x_2}{1 + \lambda} \quad \text{o} \quad x = \frac{n \cdot x_1 + m \cdot x_2}{n + m}$$

$$y = \frac{y_1 + \lambda \cdot y_2}{1 + \lambda} \quad \text{o} \quad y = \frac{n \cdot y_1 + m \cdot y_2}{n + m}$$

$\lambda > 1$ para punto interior
$\lambda < 1$ para punto exterior
$\lambda = 1$ para el punto medio

73) Coordenadas del punto medio de un trazo:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \; ; \; y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

74) Coordenadas del centro de gravedad de un triángulo de vértices $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ $C(x_3, y_3, z_3)$:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \; ; \; y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \; ; \; z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$$

75) Coordenadas del centro de gravedad de un tetraedro de vértices $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ y $D(x_4, y_4, z_4)$:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \qquad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4} \qquad z = \frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_4}{4}$$

76) Recta por el origen:

$$y = mx$$

77) Rectas por el punto $P(x_1, y_1)$ o »haz de rectas« por P:

$$y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$$

78) Recta por dos puntos $A(x_1, y_1) \wedge B(x_2, y_2)$:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

79) Rectas paralelas:

$$\text{condición: } m_1 = m_2$$

80) Rectas perpendiculares:

$$\text{condición: } m_2 = -\frac{1}{m_1}, \text{ o bien: } m_1 \cdot m_2 = -1$$

81) Angulo δ formado por dos rectas:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}$$

82) Ecuación de la bisectriz de dos rectas:

$$\frac{A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm \frac{A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

$$\text{o bien: } \frac{y - m_1 \cdot x - n_1}{\sqrt{1 + m_1^2}} = \pm \frac{y - m_2 \cdot x - n_2}{\sqrt{1 + m_2^2}}$$

83) Condición para que tres puntos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ y $C(x_3, y_3)$ sean colineales:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

o bien: $(x_3 - x_2) \cdot y_1 + (x_1 - x_3) \cdot y_2 + (x_2 - x_1) \cdot y_3 = 0$

84) Condición para que las rectas $A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 = 0$; $A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 = 0$,

$A_3 \cdot x + B_3 \cdot y + C_3 = 0$, sean concurrentes:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0$$

Si se cumple esta condición, las rectas pueden ser coincidentes, paralelas o cortarse en un punto.

Las coordenadas del centro de la circunferencia de radio »r« son (u, v).

---

85) Ecuaciones de la circunferencia:

Ecuación general: $x^2 + y^2 + D \cdot x + E \cdot y + F = 0$

siendo $u = -\frac{D}{2}$; $v = -\frac{E}{2}$; $r^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4 \cdot F}{4}$

Ecuación canónica: $(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2$

Ecuación central: $x^2 + y^2 = r^2$

---

86) Circunferencia tangente a ambos ejes coordenados:

$$(x - r)^2 + (y - r)^2 = r^2$$

---

87) Ecuación de la tangente a la circunferencia $(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2$ en el punto $P(x_1, y_1)$ de ella:

$$y - y_1 = -\frac{x_1 - u}{y_1 - v} \cdot (x - x_1)$$

---

88) Ecuación de la tangente a la circunferencia:

$x^2 + y^2 + 2D \cdot x + 2E \cdot y + F = 0$ en el punto $P(x_1, y_1)$ ue ella:

$$x \cdot x_1 + y \cdot y_1 + D \cdot (x + x_1) + E \cdot (y + y_1) + F = 0$$

---

89) Ecuación de la tangente a la circunferencia central en el punto $P(x_1, y_1)$ es:

$$x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = r^2$$

---

90) La ecuación del eje radical de dos circunferencias:

$$x^2 + y^2 + 2D_1 \cdot x + 2E_1 \cdot y + F_1 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2D_2 \cdot x + 2E_2 \cdot y + F_2 = 0$$

es: $2 \cdot (D_1 - D_2) \cdot x + 2(E_1 - E_2) \cdot y + (F_1 - F_2) = 0$

---

91) La potencia de un punto $A(x_1, y_1)$ respecto a la circunferencia $(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2$

es: $P = (x_1 - u)^2 + (y_1 - v)^2$ o bien: $P = x_1^2 + y_1^2 + 2D \cdot x_1 + 2E \cdot y_1 + F$

ELIPSE

92) Ecuación central: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, o bien:

$A \cdot x^2 + B \cdot y^2 = C$ siendo A, B, C todos positivos o todos negativos.

Si $a > b$, el eje mayor es horizontal

Si $a < b$, el eje mayor es vertical

Ecuación canónica: $\frac{(x-u)^2}{a^2} + \frac{(y-v)^2}{b^2} = 1$

siendo (u, v) las coordenadas del centro.

Ecuación general:

$A \cdot x^2 + B \cdot y^2 + D \cdot x + E \cdot y + F = 0$

o bien: $A \cdot (x + \frac{D}{2A})^2 + B \cdot (y + \frac{E}{2B})^2 = K$

siendo $K = \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4B} - F$

si $K = 0$ se obtiene el punto $(-\frac{D}{2A}; -\frac{E}{2B})$

si $k > 0$, es una elipse de centro $(u,v) = (-\frac{D}{2A}; -\frac{E}{2B})$

si $k < 0$, es el conjunto vacío $\varnothing$

PARABOLA

93) Función cuadrática: $y = ax^2 + bx + c$

vértice V (u, v) donde $u = \frac{-b}{2a}$, $v = \frac{4ac - b^2}{4a}$

eje de simetría: $x = -\frac{b}{2a}$

Ecuación canónica: $y = a \cdot (x-u)^2 + v$

Ecuación general: $A \cdot y^2 + D \cdot x + E \cdot y + F = 0$

HIPERBOLA

94) Ecuación central: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, asíntotas: $\begin{cases} y = \pm \frac{b}{a} \cdot x \\ y = \pm\sqrt{\frac{A}{B}} \end{cases}$

o bien: $A \cdot x^2 - B \cdot y^2 = C$ (siendo A, B, C positivos).

Ecuación canónica: $\frac{(x-u)^2}{a^2} - \frac{(y-v)^2}{b^2} = 1$

Ecuación general:

$A\cdot x^2 + B\cdot y^2 + D\cdot x + E\cdot y + F = 0$; o bien:

$A\cdot(x + \frac{D}{2A})^2 + B\cdot(y + \frac{E}{2B})^2 = K$ siendo: $K = \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4B} - F$

Si $A\cdot B<0$ (signos contrarios) y $K\neq 0$ se obtiene una hipérbola de centro $(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2B}) = (u, v)$.

Si $k=0$, representa dos rectas que se cortan.

---

95) **ECUACION CUADRATICA GENERAL:**

$A\cdot x^2 + B\cdot y^2 + C\cdot xy + D\cdot x + E\cdot y + F = 0$ $\qquad \triangle = C^2 - 4A\cdot B$

a) si $\triangle = 0$, es una parábola
 si $\triangle < 0$, es una elipse
 si $\triangle > 0$, es una hipérbola
 si $\triangle < 0$, $C=0$ y $A=B$, es una circunferencia.

b) Si $C = 0$ queda:

$A\cdot x^2 + B\cdot y^2 + D\cdot x + E\cdot y + F = 0$ que puede ser un punto, una recta, dos rectas paralelas o una sección cónica.

Si $A=B=0$ es una recta

si $A=B\neq 0$ puede ser un punto, una circunferencia o el ϕ

si $A=0$ (o $B=0$) es una parábola o dos rectas paralelas o el ϕ

si $A\cdot B>0$, es una alipse o un punto o el ϕ

si $A\cdot B<0$, es una hipérbola o dos rectas concurrentes.

Indice alfabético

CURSO DE MATEMÁTICA ELEMENTAL
Tomos III y IV
GEOMETRÍA

Este libro, que comprende los Tomos III y IV del CURSO DE MATEMÁTICA ELEMENTAL, del profesor Carlos Mercado Schüler —ya clásico en la Enseñanza Media y Superior de esta disciplina— se ajusta admirablemente a la evolución de los actuales programas en esos niveles.

La línea desarrollada por el Profesor Mercado en su Curso de Matemática Elemental, comprende los tomos siguientes:

Rosa

TOMO I ÁLGEBRA
TOMO II LOGARITMOS, VECTORES Y ESCALARES, CÁLCULO DIFERENCIAL, COMPLEJOS CÁLCULO INTEGRAL, TRIGONOMETRÍA, GEOMETRÍA ANALÍTICA
TOMOS III Y IV GEOMETRÍA
TOMO V ARITMÉTICA
TOMO VI CONJUNTOS
TOMO VII MATRICES, DETERMINANTES, TRANSFORMACIONES PUNTUALES Y PROYECCIONES
TOMO VIII ANÁLISIS COMBINATORIO Y CÁLCULO DE PROBABILIDADES
TOMO IX ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA